Jost-Hinrich Eschenburg

Sternstunden der Mathematik

Springer Spektrum

Sternstunden der Mathematik

Jost-Hinrich Eschenburg

Sternstunden der Mathematik

Springer Spektrum

Jost-Hinrich Eschenburg
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
Deutschland

ISBN 978-3-658-17294-7 ISBN 978-3-658-17295-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-17295-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Einbandabbildung: © Prof. Dan Shechtman
Planung: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Strasse 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Wolfgang Meyer in Dankbarkeit gewidmet

Vorwort

Der Titel „Sternstunden der Mathematik“ ist ausgeborgt von *Stefan Zweigs*[1] „Sternstunden der Menschheit“, den „zwölf historischen Miniaturen“ zur Weltgeschichte. Es sind nicht die bekanntesten historischen Ereignisse, an die in diesem Buch erinnert wird, sondern etwas verborgenere, in denen sich gleichwohl das Weltgeschehen fokussierte, wie die Entdeckung des Pazifik 1513 oder das Schicksal der Familie Suter, auf deren Besitz der kalifornische Goldrausch von 1849 begann, oder die erste Telegrafenleitung über den Atlantik 1858, die gleich wieder verstummte. Stefan Zweig schreibt im Vorwort zu seinem Buch: „Was ansonsten gemächlich nacheinander und nebeneinander abläuft, komprimiert sich in einem einzigen Augenblick, der alles bestimmt und alles entscheidet.“

Von solchen Ereignissen hat auch die Mathematik viele zu bieten. Die Entdeckung der komplexen Zahlen durch Rafael Bombelli um 1572 ist durchaus mit der Entdeckung des Pazifischen Ozeans zu vergleichen, und das Schicksal von Évariste Galois war nicht weniger dramatisch und traurig als das von Johann August Suter. Das Buch, das aus einer Augsburger Vorlesungsreihe im Winter 2014/15 entstand, möchte versuchen, mathematische Ideengeschichte nachzuzeichnen anhand einer Auswahl von Ereignissen, die stark von den Interessen und dem begrenzten Wissen des Autors bestimmt ist.[2] Die herausgegriffenen Ereignisse stehen jeweils für eine ganze Entwicklung, die vorher begonnen hatte und nachher weiter entfaltet wurde.

Das Buch hat aber nicht in erster Linie den Anspruch, historische Ereignisse wiederzugeben. Vielmehr möchte es einen Beitrag leisten, mathematische Ideen und Vorstellungen in ihren Zusammenhängen vom Augenblick ihres Entstehens an verständlich darzustellen. Dabei gehe ich sehr frei mit den „Gewändern“ um, den sprachlichen Ausdrücken, in die Ideen gekleidet wurden und die selbst starken Wandlungen unterlagen. So spreche ich bei Archimedes vom „Prinzip von Cavalieri“, obwohl dieses erst viele Jahrhunderte später formuliert wurde, aber die Idee wurde implizit benutzt und ihre explizite Verwendung trägt zum Verstehen der Gedanken von Archimedes

[1] Stefan Zweig, 1881 (Wien) - 1942 (Petrópolis, Brasilien).

[2] Es fehlt zum Beispiel die Entwicklung der Differentialrechnung bei Newton und Leibniz. Aus neuerer Zeit fehlen z.B. Emmy Noether, 1882 (Erlangen) - 1935 (Bryn Mawr, Pennsylvania) und Alexander Grothendieck, 1928 (Berlin) - 2014 (Saint-Lizier, Frankreich), um nur zwei Namen zu nennen, die für eine Neuausrichtung eines ganzen mathematischen Gebiets stehen (Algebra und algebraische Geometrie).

bei. Die Zahlbereichserweiterung von den (positiven) rationalen zu den reellen Zahlen sehe ich bereits in der Verhältnislehre der Antike (Eudoxos) weitgehend vollzogen, obwohl erst das 19. Jahrhundert formale Hilfsmittel dazu entwickelte. Die komplexen Zahlen galten jahrhundertelang als mystisch, und noch Gauß in seiner 1799 eingereichten Doktorarbeit über den Fundamentalsatz der Algebra vermied sie, aber ihre Verwendung macht vieles einfacher, was Gauß selbst anlässlich seines goldenen Doktorjubiläums 1849 zu einer Neubearbeitung nutzte. Manchmal sind die vorhandenen Aufzeichnungen so spärlich, dass nur noch eine „Nachentdeckung" möglich ist. Das trifft nicht nur für Autoren aus früher Zeit zu, sondern z.B. auch für Riemann, dessen Gedanken mir ohne die 70 Jahre späteren Kommentare von Hermann Weyl in wesentlichen Teilen unverständlich geblieben wären.

Die einzelnen Kapitel beschreiben jeweils einen eng umrissenen Moment in der Mathematikgeschichte, aber sie bauen insgesamt aufeinander auf. Ein solcher Strang ist die Entwicklung der Gleichungslehre von der Antike über das islamische Mittelalter bis zur Galoistheorie und der quintischen Gleichung im 19. Jahrhundert. Ein anderer Strang beginnt bei Pascal, der sich für die Probleme von Glücksspielern interessierte und dabei auf die Binomialkoeffizienten stieß; diese waren unerlässlich für Eulers Entdeckung der Exponentialreihe, die erst den Fundamentalsatz der Algebra ermöglichte, ohne den die Untersuchung der Lösbarkeit von Gleichungen durch Galois keine Basis gehabt hätte, und die Neubegründung der räumlichen Geometrie durch Riemann bildete die Grundlage wichtiger Entwicklungen, die in nachfolgenden Kapiteln beschrieben sind (Allgemeine Relativitätstheorie, globale Geometrie, Poincaré-Vermutung).

Das Buch richtet sich an alle Mathematik-Interessierten, Laien wie Fachleute. Mathematik darzustellen ist nicht einfach, weil sie nur in der Formelsprache unmissverständlich wiedergegeben werden kann, diese aber gerade die Ideen eher verbirgt. Deshalb ist der Geburtsmoment der Ideen wichtig. Ich habe mich um eine möglichst wenig formale Sprechweise mit zahlreichen Bildern bemüht, die die Gedanken hoffentlich verständlich wiedergibt. Die „Übungen" sind Teil des Stoffes und dienen zur Ergänzung und Vertiefung.

Vielen, die mich bei diesem Buch mit hilfreichen Kommentaren unterstützt haben, gilt mein Dank. Stellvertretend nenne ich Christoph Böhm, Kai Cieliebak, Ludwig Neidhart und ganz besonders Erich Dorner, der das Manuskript immer wieder gelesen und mich auf zahllose Fehler aufmerksam gemacht hat.

Augsburg, April 2017

Jost-Hinrich Eschenburg
eschenburg@math.uni-augsburg.de
http://myweb.rz.uni-augsburg.de/∼eschenbu/

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

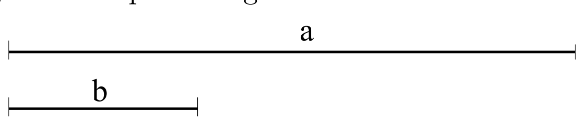
Pythagoras: Verhältnis und Unendlichkeit (−500)

Zusammenfassung. Am Anfang der Mathematik steht die Zahl als Anzahl einer Menge von Gegenständen. Doch schon früh in der Menschheitsgeschichte trat neben das Zählen das Messen, mit dem „unzählbare“ Größen miteinander verglichen werden konnten, Längen, Abstände, Volumina, Gewichte. Dies geschah mit der Methode der Wechselwegnahme, dem vielleicht ältesten Algorithmus der Mathematikgeschichte. Pythagoras erkannte die große Bedeutung dieses Verfahrens, durch das Größen durch Zahlen beherrschbar wurden; „alles ist Zahl“, soll er gesagt haben. Doch die Anwendung der Zahlen über ihren ursprünglichen Bereich (das Zählen) hinaus auf das Vergleichen von Größen führte in eine Krise, als sich herausstellte, dass das Verfahren der Wechselwegnahme nicht immer abbrach (Entdeckung der Irrationalität). Von diesem Zeitpunkt an spielte das Unendliche in der Mathematik eine Rolle.

Die Proportionenlehre bildet einen Ausgangspunkt der Mathematikgeschichte, denn sie gibt eine überraschende Antwort auf die Frage: Was sind eigentlich die Zahlen?

Am Anfang kannte man nur die natürlichen Zahlen 1,2,3 usw. Sie dienten zum Zählen von endlichen *Mengen*, d.h. von Zusammenfassungen von Individuen nach bestimmten Gesichtspunkten. In diesem Sinn sind Mengen grundlegender als Zahlen: Bevor man zählen kann, muss man wissen, was man zählen will, und die Vereinigung von Mengen ist ursprünglicher als die Addition von Zahlen.[1]

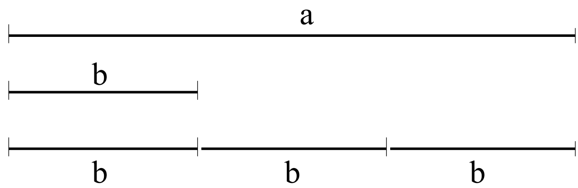
Doch schon früh, sicher bereits in ägyptischer und babylonischer Zeit erkannte man, dass die Zahlen noch zu etwas anderem dienen konnten: zum *Vergleichen* von *Größen*. Das waren zum Beispiel Längen, Flächen- und Rauminhalte, Massen und Gewichte, Zeitspannen. Da es keine allgemein anerkannten Maßeinheiten gab, konnte man solche Größen nicht einfach durch Zahlen ausdrücken. Aber man konnte zwei von ihnen miteinander vergleichen, zum Beispiel eine größere Strecke a mit einer kleineren b.



[1] Wir werden die Symbole der Mengenlehre benutzen, wie $\cup$ = Vereinigung, $\cap$ = Durchschnitt, $\subset$ für Teilmenge, $\in$ für „Element“, vgl. auch Seite 154.

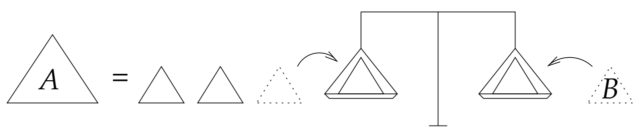
J.-H. Eschenburg, *Sternstunden der Mathematik*, DOI 10.1007/978-3-658-17295-4_1

Zunächst kann man nur feststellen: dass a größer ist als b. Aber *um wie viel* größer? Im besten Fall gewinnen wir a durch mehrfaches Aneinanderlegen von b:



In unserer Figur erhalten wir a durch dreifaches Aneinanderlegen von (Kopien von) b, also $a = 3b$. Weder a noch b sind Zahlen, aber gemeinsam definieren sie eine Zahl, nämlich ihr *Verhältnis* $a/b = 3$.

Ein anderes Beispiel ist der Vergleich großer Mengen. Ich stelle mir zwei ägyptische Bauern vor – nennen wir sie A und B – die zum staatlichen Getreideeinkäufer nach Memphis kommen, zur Zeit von „Joseph dem Ernährer" während der „sieben fetten Jahre".[2] Beide haben einen Sack Getreide mitgebracht, A einen großen und B einen kleinen. Sie wollen gerecht entlohnt werden. A muss mehr Lohn bekommen, aber wie viel mehr? Den Gewichten, die der Einkäufer bereithält, trauen sie nicht. Aber mit einer Balkenwaage kann man nicht allzu sehr betrügen: Wenn sie vor und nach dem Beladen beider Schalen im Gleichgewicht ist, sind die Lasten auf beiden Seiten gleich. Also lädt der Einkäufer das Getreide von B auf die eine Waagschale und soviel von dem Getreide von A auf die andere, bis sie im Gleichgewicht ist. Dann lässt er den zu A gehörigen Haufen auf die Seite schaffen und wiederholt das Gleiche mit dem restlichen Getreide von A, so oft, bis es aufgebraucht ist.



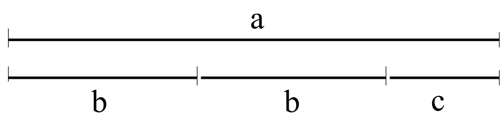
Auch hier erscheint eine Zahl: A hat 3-mal soviel Getreide wie B. Wir haben nicht die Körner gezählt, es sind ja „unzählige", sondern die Gleichheit der vier (durchaus unterschiedlichen) kleinen Haufen als Gleichheit der Gewichte definiert.

Das „Gleiche" ist bekanntlich nicht „dasselbe". Gleichheit bezieht sich nur auf ein Wesensmerkmal von zwei Gegenständen; bei den Strecken ist es die Länge und vielleicht noch die Richtung, bei den Getreidehaufen das Gewicht. Die „Gleichheit" unterschiedlicher Getreidehaufen ist allerdings bereits im ursprünglichen Begriff des Zählens vorhanden: Hätten wir die Körner zählen können und gleiche Anzahlen festgestellt, hätten wir auch die Haufen als „gleich" angesehen. Das Neue hier liegt also nicht im Begriff der Gleichheit, sondern in der Methode des „Zählens des Unzählbaren"

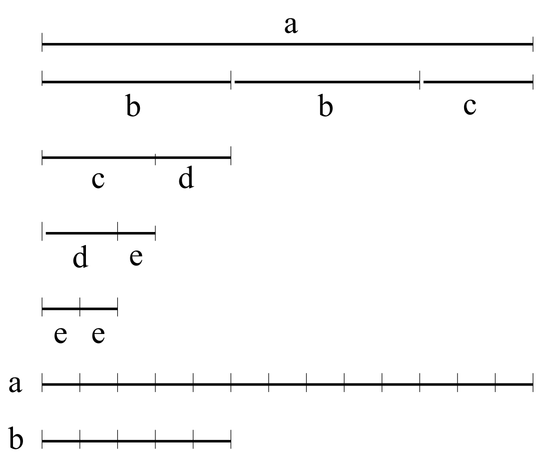
[2]Gen. 41, 47 - 49.

durch Längen- oder Gewichtsmessung; wir sind vom *Zählen* zum *Messen* übergegangen. Wann dieser wichtige Schritt zum ersten Mal vollzogen wurde, verliert sich im Dunkel der frühen Geschichte.

Aber was machen wir, wenn es „nicht auskommt“? In unserer zweiten Figur passt b zweimal in a hinein, und es bleibt noch ein Rest c. Dieser ist kleiner als b, sonst würde ja noch ein drittes Exemplar von b in a hineinpassen.

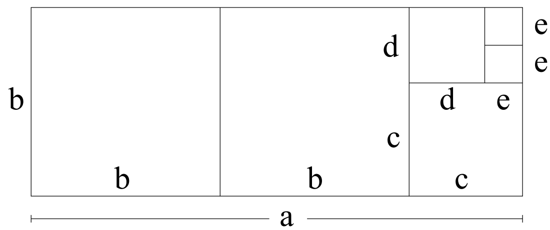


Zunächst können wir nur sagen, dass das Verhältnis a/b zwischen 2 und 3 liegen muss. Um Genaueres zu sagen müssen wir c näher bestimmen, indem wir c mit b vergleichen. Das geht auf gleiche Weise wie vorher: Wieder haben wir eine große und eine kleine Strecke, statt a und b diesmal b und c, und wieder prüfen wir, wie oft c in b hineinpasst; in unserer Figur geht es einmal, und es bleibt ein Rest d, der kleiner als c ist. Nun vergleichen wir d mit c; wieder passt d einmal in c hinein mit einem Rest e, der in unserem Beispiel schließlich genau zweimal in d aufgeht.



$$\left.\begin{array}{rcl} a &=& 2b+c \\ b &=& c+d \\ c &=& d+e \\ d &=& 2e \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{lcccccc} d &=& & & & & 2e \\ c &=& d+e &=& 2e+e &=& 3e \\ b &=& c+d &=& 3e+2e &=& \underline{5e} \\ a &=& 2b+c &=& 2\cdot 5\,e+3e &=& \underline{13\,e}\,. \end{array}\right.$$

Wenn wir die zweite Dimension hinzunehmen, können wir dieses Verfahren noch etwas anschaulicher darstellen, als „Quadratur“ des Rechtecks mit den Kantenlängen a und b, d.h. wir füllen das Rechteck sukzessive mit möglichst großen Quadraten:



Wir stellen also fest, dass b in a zwar nicht mehr ganzzahlig aufgeht, dass es aber eine kleinere Strecke e gibt, die sowohl in a als auch in b ganzzahlig aufgeht, 13-mal in a und 5-mal in b. Wir haben keine Maßeinheit gebraucht, um dies festzustellen; die beiden Strecken haben sich nämlich die für den Vergleich am besten geeignete Maßeinheit, ihr „gemeinsames Maß“ e, selbst gesucht.[3] Damit können wir wieder das genaue Verhältnis a/b feststellen, nämlich $13/5$.[4]

Halten wir noch einmal fest: Größen sind im Allgemeinen keine Zahlen, aber zwei Größen a und b können wie Zahlen miteinander verglichen werden: Sie können gleich sein oder eine von beiden, sagen wir a, ist größer als die andere, $a > b$. Die kleinere Größe b können wir mehrfach (sagen wir: p-mal) vervielfältigen und die Kopien zu einer neuen Größe pb zusammensetzen. Wir können das so oft machen, dass pb gerade noch in a hineinpasst; noch eine weitere Kopie von b passt nicht mehr. Wenn es nicht „aufgeht“, wenn also $pb < a$, dann vergleichen wir b mit dem Rest $c = a - pb$, der sicher kleiner als b ist (sonst würde ja noch eine weitere Kopie von b in a hineinpassen). Was wir vorher mit a und b gemacht haben, das machen wir nun mit b und c: Wir kopieren die kleinere Strecke c so oft (sagen wir: q-mal), dass $qc \leq b$, aber $(q+1)c > b$. Damit haben wir einen *Algorithmus* geschaffen, ein Rechenverfahren, das den immer gleichen Rechenschritt auf immer neue Eingaben anwendet, die im Laufe des Verfahrens erst produziert werden. Dieses Verfahren heißt *Wechselwegnahme* oder *euklidischer Algorithmus*, weil es von *Euklid*[5] beschrieben worden ist. Es ist aber sehr viel älter und war sicher schon *Pythagoras*[6] vor 500 v.Chr. bekannt. Vielleicht

[3] Wenn wir die Gleichung anders herum auflösen, können wir auch das gemeinsame Maß e durch die gegebenen Größen a und b ausdrücken:
$e = c - d,\quad d = b - c,\quad c = a - 2b \quad\Rightarrow\quad e = c - (b - c) = 2c - b = 2(a - 2b) - b = 2a - 5b.$

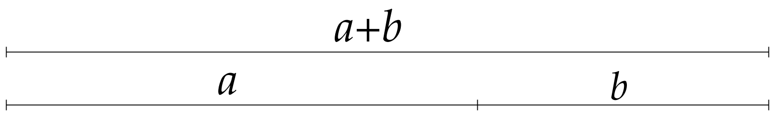
[4] Wir hätten auch gleich das Verhältnis a/b ausdrücken können:
$\frac{a}{b} = 2 + \frac{c}{b}$, $\frac{b}{c} = 1 + \frac{d}{c}$, $\frac{c}{d} = 1 + \frac{e}{d}$, $\frac{d}{e} = 2$ und damit $\frac{a}{b} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$. Einen solchen Ausdruck nennen wir einen *regelmäßigen Kettenbruch* und schreiben dafür kurz $\frac{a}{b} = [2; 1, 1, 2]$. Das hier beschriebene Verfahren der *Wechselwegnahme* ist dasselbe wie die regelmäßige Kettenbruchentwicklung des Verhältnisses a/b.

[5] Euklid von Alexandria, ca. 325 - 265 v.Chr. (Alexandria, Ägypten), fasste um 280 v.Chr. das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit in seinem Lehrbuch „Elemente“ zusammen. Die Proportionenlehre findet sich im 5. Buch der „Elemente“.

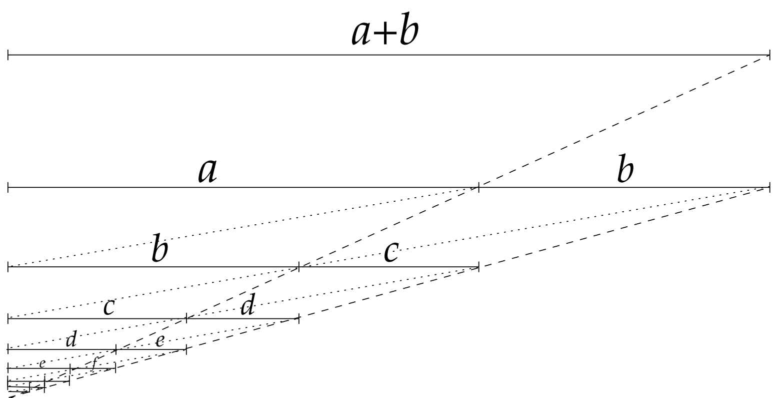
[6] Pythagoras von Samos, ca. 570 - 510 v.Chr.

hat er es auf seinen ausgedehnten Reisen nach Ägypten und Mesopotamien kennen gelernt. Jedenfalls hat er die Bedeutung dieses Verfahrens voll erkannt und soll in den Jubelruf „Alles ist Zahl“ ausgebrochen sein, weil Zahlenverhältnisse die Verhältnisse beliebiger realer Größen ausdrückten, aus welchem Bereich auch immer sie stammen mochten: Geometrie, Astronomie, Mechanik, Wirtschaft und sogar Musik (siehe Übung 1.9). Das war „Angewandte Mathematik“.

Doch nur wenige Jahre später schüttete ein Schüler des Pythagoras, vermutlich *Hippasos*,[7] reichlich Wasser in diesen schönen Wein, durch eine der folgenreichsten mathematischen Erkenntnisse der Antike: Es gibt Strecken a und b, deren Verhältnis mit der Wechselwegnahme niemals genau ermittelt werden kann; immer bleibt noch ein Rest und das Verfahren endet nie. Vermutlich geschah diese Entdeckung am Verhältnis des *Goldenen Schnitts*. Dabei wird eine Strecke $a+b$ so in zwei ungleiche Teile a und b unterteilt, dass sie sich zum größeren Teil a so verhält wie a zum Rest b, also $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.[8]



Die Teilstrecke a passt also einmal in $a+b$ hinein, und der Rest b steht zu a wieder im gleichen Verhältnis wie vorher a zu $a+b$. Beim Vergleich von b mit a stehen wir daher wieder vor der gleichen Situation; a und b bilden ein verkleinertes Abbild von $a+b$ und a, weil ja die Verhältnisse (Proportionen) gleich sind. Wieder passt b einmal in a hinein, und für den Rest c gilt wiederum $a/b = b/c$.



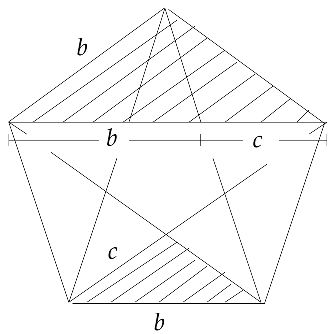
---

[7]Hippasos von Metapont, ca. 550 - 470 v.Chr., Metapont (Süditalien).

[8]Aus der Gleichung $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ lässt sich der Wert dieses Verhältnisses $x = a/b$ durch eine Quadratwurzel ausdrücken: $x = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{x}$. Multiplikation mit x auf beiden Seiten ergibt die quadratische Gleichung $x^2 = x + 1$ mit der positiven Lösung $x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1{,}618$ (die zweite Lösung $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ ist negativ). Diese Zahl x und ihr Kehrwert $\frac{1}{x} = x - 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0{,}618$ werden *Goldener Schnitt* genannt.

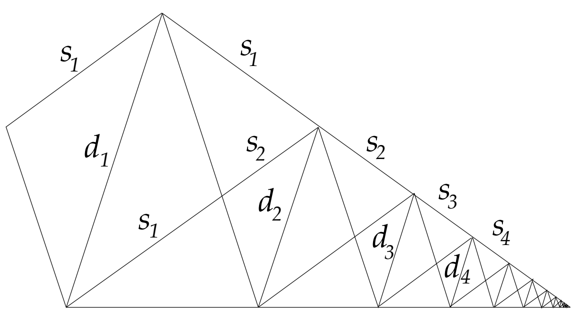
Diese Situation wiederholt sich auf jeder Stufe; das Verfahren bricht niemals ab und wir finden deshalb kein gemeinsames Maß (siehe auch Übung 2.3, Seite 19).

Der Goldene Schnitt war in der Zeit um 500 v.Chr. nicht nur den Mathematikern, sondern auch den Künstlern bestens bekannt und fand vielfache Verwendung. Die Schule des Pythagoras hatte sogar ein besonders enges Verhältnis dazu, denn ihr Symbol war das Pentagramm, der Diagonalenstern des regelmäßigen Fünfecks, und je zwei Diagonalen unterteilen sich gegenseitig im Verhältnis des Goldenen Schnittes. Dies folgt aus der *Ähnlichkeit* (gleiche Form bei unterschiedlicher Größe) der beiden schraffierten gleichschenkligen Dreiecke in der nachfolgenden Figur:



Das Verhältnis von großer und kleiner Seite ist in den beiden ähnlichen Dreiecken gleich, also folgt die Gleichung des Goldenen Schnittes, $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.

Mit dieser Konstruktion können wir noch einmal sehr anschaulich erkennen, dass es wirklich kein gemeinsames Maß zwischen $a + b$ und a oder zwischen a und b gibt. Möglicherweise ist auch Hippasos so zu seiner Erkenntnis gelangt. Dazu betrachten wir eine Kette von immer kleineren Fünfecken, wobei die Seite s_k des k-ten Fünfecks die Diagonale d_{k+1} des $(k + 1)$-ten Fünfecks ist:



Aus der Figur sehen wir $d_2 = s_1$ und $s_2 = d_1 - s_1$, allgemein

$$(*) \qquad d_{k+1} = s_k, \quad s_{k+1} = d_k - s_k.$$

Wenn d_1 und s_1 ein gemeinsames Maß hätten, also ganze Vielfache einer Strecke e wären (wie klein diese auch immer sein mag), dann wären auch die Strecken $d_2 = s_1$ und $s_2 = d_1 - s_1$ ganze Vielfache von e, und durch Wiederholung des Schlusses würde dasselbe für alle d_k und s_k gelten: Alle sind ganzzahlige Vielfache von e, und doch werden sie beliebig klein und schließlich kleiner als e, ein Widerspruch![9]

Diagonale und Seitenlänge des regelmäßigen Fünfecks besitzen somit kein gemeinsames Maß, sie sind *inkommensurabel*. Ihr Verhältnis (das Goldene Schnittverhältnis) lässt sich nicht mehr als Verhältnis ganzer Zahlen schreiben; es ist *irrational*.[10]

Pythagoras' Erkenntnis „Alles ist Zahl“ war daher falsch, solange man unter „Zahl“ nur die natürlichen Zahlen verstand. Der Begriff des *Verhältnisses* führte notwendig über die natürlichen Zahlen hinaus. Im Laufe der nächsten zwei Jahrhunderte wurden die Regeln für den Umgang mit Verhältnissen jeder Art entwickelt; sie spielen eine große Rolle in den „Elementen“ des Euklid. Der Ersatz für die Darstellung von Größenverhältnissen $\frac{a}{b}$ als Verhältnis natürlicher Zahlen $\frac{k}{n}$ war das *Archimedische Axiom*,[11] das Archimedes selbst aber dem *Eudoxos*[12] zuschreibt und das bereits der Wechselwegnahme zugrunde liegt:

> Zu je zwei Größen a, b mit $a > b$ gibt es eine natürliche Zahl k mit $kb \leq a < (k+1)b$.

Wenn wir diesen Grundsatz statt auf a und b auf na und b für eine beliebig große Zahl $n \in \mathbb{N}$ anwenden, finden wir ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$kb \leq na < (k+1)b$$

und damit $\frac{k}{n} \leq \frac{a}{b} < \frac{k+1}{n} = \frac{k}{n} + \frac{1}{n}$. Das Verhältnis $\frac{a}{b}$ ist also fast gleich dem ganzzahligen Verhältnis $\frac{k}{n}$; es weicht davon um höchstens $\frac{1}{n}$ ab. Wenn wir die Genauigkeit steigern wollen, müssen wir allerdings den Nenner erhöhen, und für einen exakten Wert müssten wir ihn bis ins *Unendliche* erhöhen.

Die Entdeckung der Irrationalität und in der Folge das Rechnen mit Verhältnissen, die nicht mehr als Verhältnisse ganzer Zahlen darstellbar waren, führte zur ersten bewusst durchgeführten *Zahlbereichserweiterung* der Mathematikgeschichte.[13] Möglich wurde dies, weil neben die Zahl („arithmos“) ein zweiter Begriff getreten war, das *Verhältnis* („logos“) von Größen.

---

[9] Es ist sehr bemerkenswert, dass gerade das ganzzahlige Gleichungssystem $(*)$ zu einer Nicht-Ganzzahligkeits-Aussage führt: Diagonale und Seitenlänge sind nicht ganzzahlige Vielfache eines gemeinsamen Maßes.

[10] Die *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$ (von lat./engl. „ratio“ = Verhältnis) sind die Quotienten ganzer Zahlen k/n (Brüche). „Irrational“ bedeutet: kein Verhältnis ganzer Zahlen.

Der Goldene Schnitt ist nicht nur irgend eine irrationale Zahl, sondern die „irrationalste“ Zahl überhaupt: In jedem Schritt passt der Rest nur einmal in die Teilstrecke hinein, er ist also fast so groß wie diese (größer als die Hälfte), und deshalb sind wir maximal weit von einem rationalen Verhältnis entfernt.

[11] Archimedes von Syrakus, ca. 287 - 212 v.Chr.

[12] Eudoxos von Knidos, ca. 408 - 355 v.Chr.

[13] Dabei betrachten wir die lange vorher bekannten Verhältnisse ganzer Zahlen (Brüche) noch nicht als eigenständige Objekte.

Größen waren auch außerhalb der Mathematik zu finden (Gewichte, Abmessungen, Volumina), und es schien zunächst, als ob die ganzen Zahlen diesen neuen Begriff beherrschten („Alles ist Zahl"). Aber diese Vorstellung erwies sich als trügerisch, als in der Mathematik selbst, in der Geometrie Größenverhältnisse gefunden wurden, die nicht mehr als Verhältnis ganzer Zahlen darstellbar waren. Der Verhältnisbegriff drängte also zu einer Erweiterung. Die positiven *reellen Zahlen* waren geboren als Größenverhältnisse, die durch Verhältnisse ganzer Zahlen zwar nicht immer ausgedrückt, aber doch beliebig genau angenähert werden konnten.

Übungen

1.1. Kommensurabel heißt Rationales Verhältnis: Zeigen Sie: Zwei Größen $a > b$ haben genau dann ein rationales Verhältnis, wenn die Wechselwegnahme abbricht, d.h. wenn sie nach endlich vielen Schritten mit dem Rest 0 endet und damit ein „gemeinsames Maß" produziert. Zu zeigen ist also:

a) Wenn a/b rational, dann bricht die Wechselwegnahme ab,
b) Wenn die Wechselwegnahme abbricht, dann ist a/b rational.

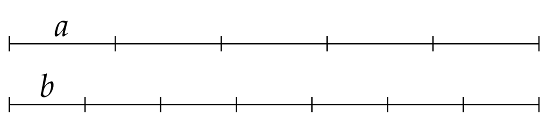
1.2. Anwendung auf ganze Zahlen: Sind a, b natürliche Zahlen, so heißt ihr gemeinsames Maß ihr „größter gemeinsamer Teiler" (ggT). Der euklidische Algorithmus durch Wechselwegnahme berechnet also auch den ggT. Berechnen Sie damit den ggT der Zahlen a, b mit

a) $a = 112$ und $b = 91$.
b) $a = 544$ und $b = 323$.

Drücken Sie umgekehrt den ggT durch die gegebenen Zahlen aus (vgl. Fußnote 3, Seite 4)!

1.3. Eindeutige Teilbarkeit: Zwei teilerfremde ganze Zahlen p, q (d.h. $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$) seien Teiler einer dritten Zahl n, also $n = ap = bq$ für ganze Zahlen a, b. Zeigen Sie, dass p ein Teiler von b ist (und entsprechend q ein Teiler von a). *Anleitung:* Weil sich der ggT durch die beiden Zahlen p und q audrücken lässt, gibt es ganze Zahlen u, v mit $up + vq = 1$. Multiplizieren Sie diese Gleichung mit b und zeigen Sie damit, dass b durch p teilbar ist. Beachten Sie, dass $n = bq$ durch p teilbar ist.

1.4. Gemeinsame Verfeinerung: Gegeben sind zwei gleichmäßige Unterteilungen der gleichen Strecke in 5 bzw 7 gleiche Teile (a bzw. b).



Konstruieren Sie graphisch die gemeinsame Verfeinerung und überzeugen Sie sich, dass dadurch die Teilstrecke a in 7 und die Teilstrecke b in 5 gleiche

Teile geteilt wird. Weisen Sie das Gleiche auch rechnerisch nach durch die Wechselwegnahme für a und b mit $5a = 7b$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & a & = & b+c, & & \\ 7b & = & 5a & = & 5b+5c & \Rightarrow & 2b=5c, \\ & & b & = & 2c+d & & \\ 5c & = & 2b & = & 4c+2d & \Rightarrow & c=2d \\ \hline & & b & = & 2c+d & = & 4d+d \;\; =5d, \\ & & a & = & b+c & = & 5d+2d=7d. \end{array}$$

Probieren Sie noch ein weiteres Beispiel, etwa $7a = 11b$.

1.5. Eindeutige Primfaktorzerlegung: Bekanntlich lässt sich eine positive ganze Zahl n nur auf genau eine Weise (bis auf Reihenfolge) als ein Produkt von Primzahlen schreiben, zum Beispiel $35 = 5 \cdot 7$ oder $77 = 7 \cdot 11$. Finden Sie die genaue Beziehung dieses Satzes zur den beiden vorigen Aufgaben heraus!

1.6. Zahlen ohne eindeutige Primfaktorzerlegung: Die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in den ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

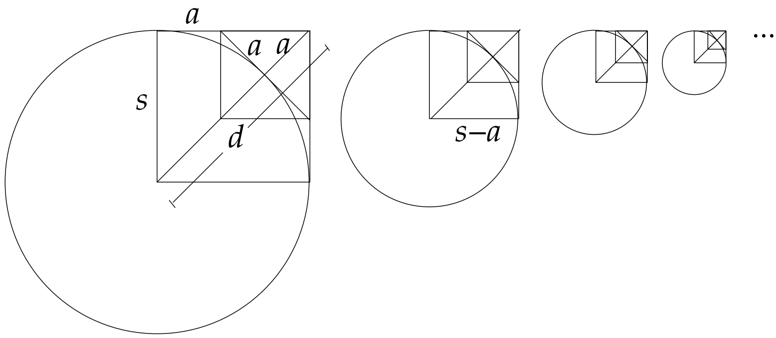
ist nicht selbstverständlich. In manchen anderen Zahlbereichen ist sie nicht gegeben. Das erste Beispiel dieser Art ist

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{m + n\sqrt{-5};\ m, n \in \mathbb{Z}\}$$

(mit $\sqrt{-5} = i\sqrt{5}$, vgl. Kapitel 6). In dieser Menge von (komplexen) Zahlen kann man unbeschränkt addieren, subtrahieren und multiplizieren, genau wie in den ganzen Zahlen. Auch hier gibt es *Primzahlen*, solche, die keine echte Zerlegung mehr haben (außer mit Faktor ± 1). Zeigen Sie: Die Zahl 6 hat zwei Zerlegungen in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, nämlich $6 = 2 \cdot 3$ sowie $6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$. Überzeugen Sie sich, dass 2 und 3 auch in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ immer noch Primzahlen sind, und zwar folgendermaßen: Aus $3 = a \cdot b$ folgt auch $3 = \bar{a} \cdot \bar{b}$, wobei $\bar{a}, \bar{b}$ die komplex Konjugierten zu a, b sind (siehe Seite 62). Zeigen Sie: Durch Multiplizieren der Gleichungen $3 = a \cdot b$ und $3 = \bar{a} \cdot \bar{b}$ für $a = m + n\sqrt{-5}$ und $b = p + q\sqrt{-5}$ folgt die ganzzahlige Gleichung $9 = a \cdot \bar{a} \cdot b \cdot \bar{b} = (m^2 + 5n^2)(p^2 + 5q^2)$. Wie folgt daraus, dass a oder b gleich ± 1 sein muss?

1.7. Quadratwurzel von 2: Führen Sie einen geometrischen Irrationalitätsbeweis für $\sqrt{2}$, dem Verhältnis von Diagonale und Seite im Quadrat, analog wie beim Goldenen Schnitt (Seite 6). Zeigen Sie in der folgenden Zeichnung:[14] Wären die Diagonale d und die Seitenlänge s im großen Quadrat ganzzahlige Vielfache eines gemeinsamen Maßes e, dann wäre auch $a = d - s$ ein Vielfaches von e, und ebenso die Diagonale $2a$ und die Seitenlänge $s - a$ des nächstkleineren Quadrats.

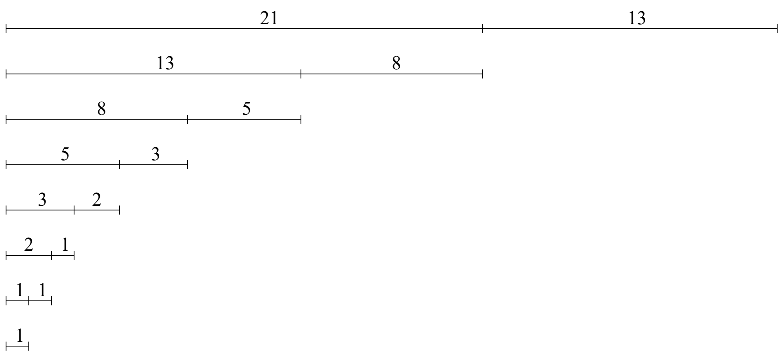
[14] nach T. Apostol, Amer. Math. Monthly 107(9), 841 - 842.



1.8. Fibonacci-Zahlen: Wenn man beim Goldenen Schnitt einen „letzten“ Rest vernachlässigt, entstehen die Fibonaccizahlen 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... ; die jeweils nächste Zahl ist die Summe ihrer beiden Vorgänger:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1, \\ f_2 &= 2, \\ f_{k+1} &= f_k + f_{k-1} \end{aligned}$$

für $k = 2, 3, \ldots$. Machen Sie sich das Prinzip an der folgenden Figur klar.



1.9. Pythagoras und die Musik: Pythagoras erkannte, dass Tonverhältnisse mit bestimmten Streckenverhältnissen korrespondieren: Unterteilt man eine Saite in der Mitte, ertönt die Oktave, drittelt man sie, hört man die Quinte über der Oktave usw. Die bekannten Tonintervalle sind auf diese Weise einfachen Zahlenverhältnissen zugeordnet:[15]

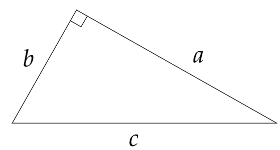
2/1	Oktave (Ok)	9/8	Großer Ganzton (gG)
3/2	Quinte (Qi)	10/9	Kleiner Ganzton (kG)
4/3	Quarte (Qa)	16/15	Großer Halbton (gH)
5/4	Große Terz (gT)	25/24	Kleiner Halbton (kH)
6/5	Kleine Terz (kT)	81/80	Syntonisches Komma (SK)

Zeigen Sie die folgenden Beziehungen: $\mathrm{Ok} = \mathrm{Qi} \cdot \mathrm{Qa},\ \mathrm{Qi} = \mathrm{gT} \cdot \mathrm{kT},\ \mathrm{Qa} = \mathrm{gT} \cdot \mathrm{gH},\ \mathrm{gT} = \mathrm{gG} \cdot \mathrm{kG},\ \mathrm{kT} = \mathrm{gG} \cdot \mathrm{gH},\ \mathrm{gG} = \mathrm{kG} \cdot \mathrm{SK},\ \mathrm{kG} = \mathrm{gH} \cdot \mathrm{kH}$.

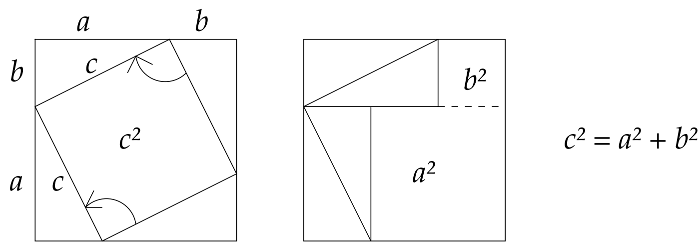
[15]Die folgenden Brüche sind vermutlich die einzigen vom Typ $(n+1)/n$, bei denen sowohl $n+1$ als auch n keine anderen Primteiler als 2, 3 und 5 haben.

1.10. Der Lehrsatz des Pythagoras (1): Der Name Pythagoras wird vielfach mit dem „Lehrsatz des Pythagoras" in Verbindung gebracht:

> *Die Summe der Quadrate über den Katheten a, b eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Quadrat über der Hypothenuse c.*

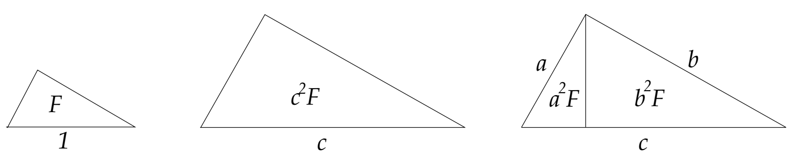


Die *Katheten* sind die am rechten Winkel angrenzenden Seiten, die *Hypothenuse* die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite. Wir wissen nicht, ob Pythagoras einen Beweis für diesen Satz gefunden hat, der Satz selbst ist aber auf jeden Fall älter und war bereits den Ägyptern, Babyloniern und Indern bekannt. Der vielleicht schönste Beweis des Satzes von Pythagoras ist vermutlich indischen Ursprungs. Dabei wird ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c zu einem Quadrat mit Kantenlänge $a + b$ ergänzt:



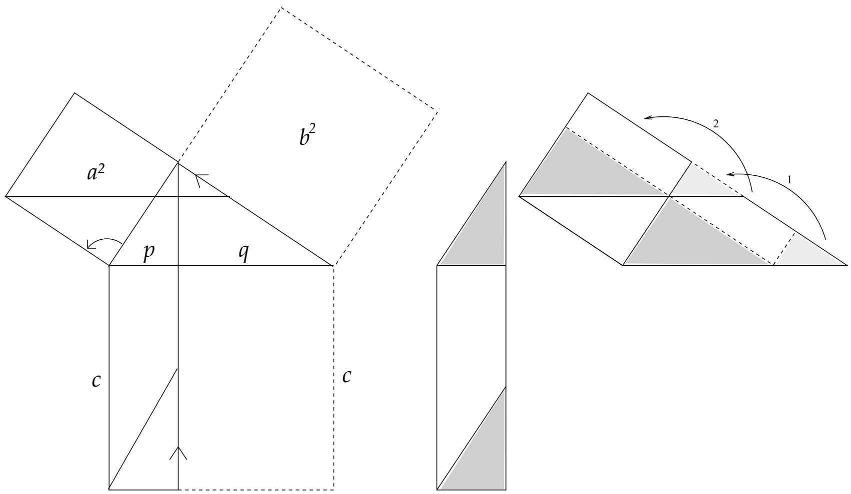
Wenn man viermal die Dreiecksfläche von der Quadratfläche wegnimmt, ergibt sich in der linken Figur c^2, in der rechten $a^2 + b^2$, also ist $c^2 = a^2 + b^2$.

1.11. Der Lehrsatz des Pythagoras (2): Ein weniger bekannter Beweis des Satzes von Pythagoras: Die Höhe zerlegt das rechtwinklige Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke mit Hypothenusen a und b, die zum großen Dreieck ähnlich sind, da sie mit ihm jeweils einen Winkel gemeinsam haben. Wir denken uns zusätzlich ein dazu ähnliches Dreieck mit Hypothenuse 1; sein Flächeninhalt sei F.



Der Flächeninhalt ähnlicher Dreiecke wächst proportional zum Quadrat der Streckungsfaktoren; diese sind a, b für die Teildreiecke und c für das große Dreieck. Die Flächeninhalte sind also a^2F, b^2F, c^2F. Da die Gesamtfläche die Summe der Teilflächen ist, folgt $c^2F = a^2F + b^2F$, also $c^2 = a^2 + b^2$.

1.12. Der Lehrsatz des Pythagoras (3):



Das ist der Beweis von *Euklid*.[16] Die Hypothenuse c wird durch den Höhenfußpunkt in zwei Abschnitte p und q zerlegt. Damit wird das Quadrat über c in zwei Rechtecke pc und qc aufgeteilt. Wenn wir $pc = a^2$ und entsprechend $qc = b^2$ zeigen können (*Kathetensatz*), dann folgt $a^2 + b^2 = pc + qc = c^2$. Die Flächengleichheit $pc = a^2$ ergibt sich in drei Schritten: Das Rechteck pc wird durch *Scherung* in ein flächengleiches Parallelogramm verwandelt (indem ein Teildreieck abgeschnitten und auf der anderen Seite wieder angeheftet wird, siehe die Figuren rechts). Dieses Parallelogramm wird um 90^o gedreht und dann durch eine erneute Scherung[17] entlang der mit einem Pfeil bezeichneten Kante in das Quadrat über der Seite a überführt. Dieser Beweis hat mehr Schritte als die beiden vorigen, er hat aber auch einen Vorteil: Es wird nicht benutzt, dass der Flächeninhalt unter Drehungen (außer 90^o-Drehungen) unverändert bleibt.[18]

---

[16]Euklid: Die Elemente, Erstes Buch, Paragraph 47 (Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 235, S. 32).

[17]Das Abschneiden und Wiederanheften muss bei dieser Scherung in zwei Teilen geschehen, siehe die gefärbten Dreiecke in der ganz rechten Figur.

[18]Wenn man den Flächeninhalt einer Figur definiert, indem man die achsenparallelen Einheitsquadrate (Rechenkästchen) zählt, die sie überdecken (und diese nötigenfalls noch weiter unterteilt, um die Figur besser anzunähern), dann ist die Invarianz des Flächeninhaltes bei Verschiebungen und 90-Grad-Drehungen der Figur klar, denn diese Transformationen überführen achsenparallele Einheitsquadrate in ebensolche, aber die Invarianz unter *beliebigen* Drehungen ist nicht so selbstverständlich. Um sie einzusehen, überdeckt man die Figur zunächst mit gleichfalls gedrehten (also nicht mehr achsenparallelen) Einheitsquadraten; ihre Anzahl ist die gleiche wie die der achsenparallelen, die vorher die ungedrehte Figur überdeckten. Dann muss man nur noch zeigen, dass die Einheitsquadrate ihren Flächeninhalt unter Drehungen nicht verändern. Dazu benutzt man den Kreis als Figur; er bleibt unter Drehungen gleich und wird von ebenso vielen gedrehten wie achsenparallelen Einheitsquadraten überdeckt, also sind deren Flächeninhalte gleich.

KAPITEL 2

Theodoros: Wurzeln und Selbstähnlichkeit (−399)

ZUSAMMENFASSUNG. In Platons Dialog „Theaitetos“ findet sich die Bemerkung, ein gewisser Theodoros habe die Irrationalität der Qudratwurzeln bis $\sqrt{17}$ „durch Zeichnungen“ bewiesen, aber nicht weiter. Benno Artmann fand 1994 heraus, welche Zeichnungen Theodoros vermutlich angefertigt hat und warum die nachfolgende Wurzel $\sqrt{19}$ für ihn unerreichbar war. Diese verblüffend einfachen Figuren enthalten viel mehr als nur den Beweis der Irrationalität; aus ihnen lässt sich der Wert der Quadratwurzel mit beliebiger Genauigkeit ermitteln, denn sie kodieren den unendlichen Prozess der Wechselwegnahme für die Quadratwurzel im Verhältnis zu Eins. Der Prozess ist periodisch, was sich in der Selbstähnlichkeit der Figuren ausdrückt. Diese Eigenschaft wurde von Theodoros bis $\sqrt{17}$ beobachtet; erst über zwei Jahrtausende später hat Lagrange sie allgemein bewiesen. Wir geben ein sehr einfaches Argument dafür.

Im vorigen Kapitel, besonders in der Figur auf Seite 6 haben wir gesehen, dass die quadratische Gleichung des Goldenen Schnittes, $x^2 = x + 1$ etwas mit *Selbstähnlichkeit* zu tun hat. Eine Figur heißt *selbstähnlich*, wenn sie eine Teilfigur enthält, die zur ganzen Figur *ähnlich* ist (kongruent nach Verkleinerung). Der antike griechische Mathematiker *Theodoros* von Kyrene (ca. 460 - 390 v.Chr.) erkannte, dass viele Quadratwurzeln durch selbstähnliche Figuren ausgedrückt werden, mit denen man nicht nur die Irrationalität zeigen, sondern die Quadratwurzeln auch beliebig genau berechnen kann.

Theodoros war der Lehrer eines sehr viel bekannteren Mathematikers, *Theaitetos* (417 - 369 v.Chr.), dem wir die Entdeckung des Dodekaeders und Ikosaeders sowie den Beweis der Irrationaliät aller Quadratwurzeln von Primzahlen verdanken, so wie er später in den „Elementen“ des Euklid überliefert wurde und heute noch geführt wird.[1] In dem gleichnamigen Dialog von Platon (ca. 428 - 348 v.Chr.), der ein fiktives Gespräch aus dem Jahr 399 v.Chr. (dem Todesjahr von Sokrates) schildert, erwähnt der junge Theaitetos diese Leistung und vergleicht sie mit der seines Lehrers:

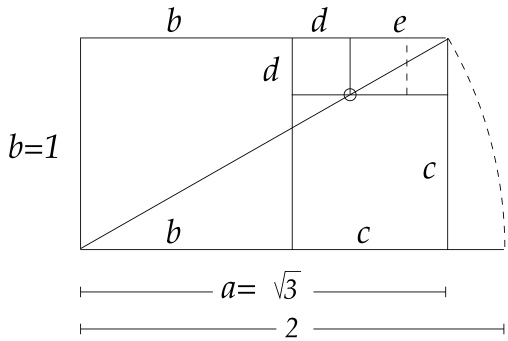
> „Über Quadratwurzeln (‘dynamis’) zeichnete uns Theodoros hier etwas, womit er von den Quadraten von drei

[1] $\sqrt{p} = \frac{k}{n} \Rightarrow p = \frac{k^2}{n^2} \Rightarrow (*)\ n^2p = k^2$. In einer Quadratzahl wie k^2 und n^2 kommt jeder Primfaktor in gerader Potenz vor. In der Gleichung $(*)$ kommt also der Primfaktor p rechts in gerader Potenz vor, links aber in ungerader, Widerspruch!

J.-H. Eschenburg, *Sternstunden der Mathematik*, DOI 10.1007/978-3-658-17295-4_2

> und fünf Quadratfuß Flächeninhalt bewies, dass ihre Seitenlänge nicht messbar wäre durch die einfüßige. Und so ging er jede Quadratwurzel einzeln durch bis zum Quadrat mit siebzehn Quadratfuß; bei dieser hielt er inne. Uns nun fiel so etwas ein, da der Quadratwurzeln unendlich viele zu sein schienen, wollten wir versuchen, sie zusammenzufassen in eins, wodurch wir diese Quadratwurzeln alle behandeln könnten.“

Benno Artmann[2] hat in einem Artikel von 1994 gezeigt, was Theodoros vermutlich gezeichnet hat und warum er nicht weiter als bis 17 gekommen ist.[3] Hier ist die Figur für $\sqrt{3}$, die Theodoros vermutlich gefunden hat:



Zur geometrischen Konstruktion von $\sqrt{3}$ benötigt man ein Rechteck mit Höhe $b = 1$ und Diagonale 2, dann ist die Breite $a = \sqrt{3}$ (denn $1^2 + \sqrt{3}^2 = 2^2$). Dieses ist leicht konstruierbar. Nun führen wir die Wechselwegnahme von $a = \sqrt{3}$ und $b = 1$ durch wie in der Rechteckfigur auf Seite 4: Wir versuchen, das Rechteck durch jeweils möglichst große Quadrate auszufüllen. Zuerst spalten wir ein Quadrat der Seitenlänge b ab, danach eins der Seitenlänge $c = a - b$, danach eins mit Seitenlänge $d = b - c$. Von dieser Sorte würde noch ein zweites Quadrat in den freien Raum passen. Aber schon beim ersten Quadrat mit Seitenlänge d macht Theodoros eine entscheidende Beobachtung: Der rechte untere Eckpunkt (in der Figur eingekreist) liegt auf der Diagonalen des ursprünglichen Rechtecks! Ob Theodoros das wirklich bewiesen hat oder nur an der Zeichnung abgelesen, wissen wir nicht. Ein algebraischer Beweis dafür ist schnell gegeben: Zu zeigen ist

$$a/b = e/d \iff x := a/b = \sqrt{3},$$

wobei $e = c - d$, $d = b - c$, $c = a - b$. Also ist

$$\begin{array}{rclclclcl} e &=& c-d &=& c-(b-c) &=& 2c-b &=& 2(a-b)-b = 2a-3b, \\ d &=& b-c &=& b-(a-b) &=& 2b-a && \end{array}$$

[2]Benno Artmann, 1933 (Heiligenstadt) - 2010 (Göttingen).

[3]B. Artmann: A proof for Theodoros’ theorem by drawing diagrams, Journal of Geometry 49 (1994). Siehe auch Janina Deininger: Ein Beweis des Theorems von Theodoros durch graphische Darstellung, Zulassungsarbeit, Augsburg 2012.