BestMasters

Pascal Teßmer

Äquivariante Torsion auf Kontakt-Mannigfaltigkeiten

Springer Spektrum

BestMasters

Mit „BestMasters“ zeichnet Springer die besten Masterarbeiten aus, die an renommierten Hochschulen in Deutschland, Österreich und der Schweiz entstanden sind. Die mit Höchstnote ausgezeichneten Arbeiten wurden durch Gutachter zur Veröffentlichung empfohlen und behandeln aktuelle Themen aus unterschiedlichen Fachgebieten der Naturwissenschaften, Psychologie, Technik und Wirtschaftswissenschaften.
Die Reihe wendet sich an Praktiker und Wissenschaftler gleichermaßen und soll insbesondere auch Nachwuchswissenschaftlern Orientierung geben.

Pascal Teßmer

Äquivariante Torsion auf Kontakt-Mannigfaltigkeiten

Springer Spektrum

Pascal Teßmer
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Deutschland

BestMasters
ISBN 978-3-658-17793-5 ISBN 978-3-658-17794-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-17794-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

An dieser Stelle möchte ich mich aufrichtig bei meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Kai Köhler bedanken. Er führte mich in dieses interessante Gebiet ein, von dem ich vorher noch nichts wusste, und stand mir bei jeder Frage und Beratung geduldig zur Seite.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Beim Studium von Mannigfaltigkeiten sind die Kohomologie- und Homotopiegruppen feste Bestandteile, die zu den wichtigsten topologischen Invarianten gehören. Es existieren jedoch bestimmte Mannigfaltigkeiten, die Linsenräume, welche zwar die selben Kohomologie- und Homotopiegruppen besitzen können, jedoch nicht homöomorph sein müssen. Reidemeister und Franz führten aus diesem Grund im Jahre 1935 eine neue topologische Invariante ein, welche in der Lage war, zwischen diesen Räumen zu unterscheiden. Diese Invariante wird Reidemeister-Torsion genannt.
Der Atiyah-Singer-Indexsatz stellte die Möglichkeit her, gewisse topologische Informationen einer Mannigfaltigkeit analytisch darzustellen. Ray und Singer folgten 1971 ebenfalls dem Ziel, eine analytische Interpretation der Reidemeister-Torsion einzuführen. Sie konstruierten in ihrer Arbeit [RS71] mit Methoden aus der Analysis die analytische Torsion, assoziiert zu dem de Rham-Komplex, welche viele gemeinsame Eigenschaften mit der Reidemeister-Torsion aufweist. Dies veranlasste sie zu vermuten, dass diese beiden Größen übereinstimmen, welches jedoch zu dem Zeitpunkt noch nicht bewiesen werden konnte. Erst in den 1980ern konnten Cheeger und Müller unabhängig voneinander die Identität der beiden Torsionen zeigen.
Schon bereits in [R70] führte Ray eine äquivariante Version der analytischen Torsion ein, speziell bezüglich einer Darstellung der Fundamentalgruppe in S^1, und der Begriff der äquivarianten analytischen Torsion wurde dann allgemein in [K93] definiert, welcher in der Arakelov Geometrie von Bedeutung ist.

Eine wichtige Aufgabe in der Kontaktgeometrie ist es Invarianten zu finden, welche zwischen den Kontaktstrukturen unterscheiden

können, sogenannte Kontakt-Invarianten. Analog zur analytischen Torsion konstruierten Rumin und Seshadri in [RuS12] für Kontakt-Mannigfaltigkeiten mit Hilfe eines speziellen Komplexes, den Rumin-Komplex, welcher die Rolle des de Rham-Komplexes bei der analytischen Torsion spielt, die Kontakt-Torsion. Sie muss notwendigerweise von der Kontaktstruktur abhängen, damit sie diese unterscheiden kann. Bei der Konstruktion hängt die Kontakt-Torsion jedoch von der Metrik ab, welche wiederum von weiteren Größen abhängt. Im Spezialfall einer 3-dimensionalen CR-Seifert-Mannigfaltigkeit konnten nützliche Eigenschaften der Kontakt-Torsion gezeigt werden, unter anderem sogar deren Gleichheit mit der Ray-Singer-Torsion.
In diesem Buch werden die Definition der Kontakt-Torsion und einige Resultate aus [RuS12] auf den äquivarianten Fall erweitert. Während die äquivariante holomorphe Torsion in der Arakelov-Geometrie Anwendung findet, konzentrieren wir hier uns mehr auf Variationsformeln in Abhängigkeit von den Fixpunkten der Operation einer Isometrie und untersuchen die äquivariante Torsion auf kontakt-invariante Eigenschaften. Das Buch ist dabei wie folgt aufgebaut.

- Präliminarien: Hier werden einige Sätze über symplektische Mannigfaltigkeiten wiedergegeben, welche später auf Kontakt-Mannigfaltigkeiten angewendet werden.
- Kapitel 1: Für die Konstruktion der Kontakt-Torsion ist es hilfreich zu wissen, wie die analytische Torsion aufgebaut ist. Dies wird in diesem Kapitel erläutert.
- Kapitel 2: In diesem Kapitel werden die für uns relevanten Grundlagen über Kontakt-Mannigfaltigkeiten und Aussagen über den Rumin-Komplex wiedergegeben.

- Kapitel 3:	Dieses Kapitel behandelt allgemein den Heisenbergkalkül, welcher später auf einen bestimmten Operator, den Kontakt-Laplace-Operator, angewendet wird, um eine asymptotische Entwicklung von dessen Wärmeleitungskern zu bekommen, welches für die Definition der Kontakt-Torsion benötigt wird.
- Kapitel 4:	In diesem Kapitel wird dann schließlich die äquivariante Kontakt-Torsion definiert. Die Motivation und Herleitung verläuft ähnlich wie in Kapitel 1 bei der analytischen Torsion.
- Kapitel 5:	In diesem Kapitel wird das Verhalten der äquivarianten Kontakt-Torsion im Hinblick auf die Variation der Metrik untersucht. Dabei werden sowohl die Fälle der fixpunktfreien Operation und der Operation mit isolierten Fixpunkten behandelt.

In diesem Buch wird das Grundwissen über Differentialgeometrie und globale Analysis als bekannt vorausgesetzt. Die differentialgeometrischen Grundlagen findet man in [K14] und die verwendete Notation orientiert sich auch streng, bis auf wenige Ausnahmen, an diesem Buch. Im Symbolverzeichnis können einige Notationen nochmal nachgeschlagen werden. Die Resultate aus der globalen Analysis findet man in [BGV92], [Gi84] und [Ro97]. Einige Aussagen aus anderen Teilgebieten werden ohne Beweis nur zitiert. Der Grund ist nicht nur der Umfang, sondern auch, weil die Resultate in Büchern zu finden sind, in denen sie bereits ausführlich erklärt wurden. Diese Quellen werden vor den Aussagen immer angegeben sein.
Alle Objekte in diesem Buch werden, sofern nichts anderes erwähnt wird, C^∞ sein, das heißt Mannigfaltigkeiten, Funktionen, Schnitte etc. werden immer als **glatt** vorausgesetzt.