26

Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik

Claudia Hildenbrand

Förderung früher mathematischer Kompetenzen

Eine Interventionsstudie zu den Effekten unterschiedlicher Förderkonzepte

WAXMANN

Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik

herausgegeben von

Götz Krummheuer
und Aiso Heinze

Band 26

Editorial

Der Mathematikunterricht steht vor großen Herausforderungen: Neuere empirische Untersuchungen legen (erneut) Defizite und Unzulänglichkeiten offen, deren Analyse und Behebung einer umfassenden empirischen Erforschung bedürfen. Der Erfolg derartiger Bemühungen hängt in umfassender Weise davon ab, inwieweit hierbei auch mathematikdidaktische Theoriebildung stattfindet. In der Reihe „Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik“ werden dazu empirische Forschungsarbeiten veröffentlicht, die sich durch hohe Standards und internationale Anschlussfähigkeit auszeichnen. Das Spektrum umfasst sowohl grundlagentheoretische Arbeiten, in denen empirisch begründete, theoretische Ansätze zum besseren Verstehen mathematischer Unterrichtsprozesse vorgestellt werden, als auch eher implementative Studien, in denen innovative Ideen zur Gestaltung mathematischer Lehr-Lern-Prozesse erforscht und deren theoretische Grundlagen dargelegt werden. Alle Manuskripte müssen vor Aufnahme in die Reihe ein Begutachtungsverfahren positiv durchlaufen. Diese konsequente Begutachtung sichert den hohen Qualitätsstandard der Reihe.

Claudia Hildenbrand

Förderung früher mathematischer Kompetenzen

Eine Interventionsstudie zu den Effekten unterschiedlicher Förderkonzepte

Waxmann 2016
Münster • New York

Bibliografische Informationen der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Band 26

ISSN 1868-1441
Print-ISBN 978-3-8309-3423-3
E-Book-ISBN 978-3-8309-8423-8

www.waxmann.com
info@waxmann.com

Umschlaggestaltung: Christian Averbeck, Münster
Titelbild: © Claudia Hildenbrand
Druck: Hubert & Co., Göttingen
Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier, säurefrei gemäß ISO 9706

FSC
www.fsc.org
MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C016439

Printed in Germany

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen bedanken, die mich in den vergangenen Jahren bei dieser Arbeit unterstützt und begleitet haben.

Zunächst danke ich Prof. Dr. Gabriele Ricken für die Betreuung und Begutachtung dieser Arbeit, die Bereicherung durch ihren fachkundigen Rat sowie ihr Vertrauen und den gewährten Gestaltungsfreiraum. Weiterhin danke ich meinem zweiten Gutachter Prof. Dr. Knut Schwippert für die wertvollen Denkanstöße im Forschungskolloquium und die hilfreiche Unterstützung in methodischen Fragen. Seine Rückmeldungen und bereichernden Hinweise haben dazu beigetragen, dass ich stetig lernen und mich weiterentwickeln konnte. Ein großer Dank geht auch an Prof. Dr. Marcus Hasselhorn, der mir als Mentor zur Seite stand und durch motivierende Gespräche und fachliche Impulse zur Weiterentwicklung und zum Gelingen der Arbeit beigetragen hat.

Mein aufrichtiger Dank gilt allen teilnehmenden Kindern und Eltern, Erzieherinnen und Erziehern sowie Leitungen der Kindertagesstätten für ihr Interesse und ihre Mitwirkung. In diesem Zusammenhang möchte ich auch meinen Kolleginnen und Kollegen des Instituts für Bildungsmonitoring und Qualitätsentwicklung Hamburg ein herzliches Dankeschön aussprechen, deren Unterstützung die Arbeit erst ermöglichte.

Bedanken möchte ich mich auch bei der Robert Bosch Stiftung für die Förderung durch das Stipendium Forschungskolleg Frühkindliche Bildung.

Ein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Petra Strehmel, die mein Interesse am wissenschaftlichen Arbeiten geweckt und gefördert hat und mir seitdem beratend zur Seite stand. Sie hat damit einen wichtigen Grundstein für meine berufliche Entwicklung bis zum heutigen Tag gelegt.

Abschließend danke ich meiner Familie und meinen Freunden für ihr Verständnis, ihren Zuspruch und ihre offenen Ohren. Mein tiefster Dank gilt jedoch Sören, der mich trotz eigener Promotion stützte und mir Rückhalt gab.

Inhalt

1 Einleitung

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen beginnt sehr früh und bereits bei wenigen Tage alten Säuglingen können erste mathematische Fähigkeiten festgestellt werden. Im Laufe der Kindheit lernen die Kinder kontinuierlich hinzu und verfügen bei Schuleintritt über beachtliche mathematische Kompetenzen. Diese sind jedoch nicht bei allen Kindern gleich entwickelt, sondern können sich deutlich unterscheiden. Die Spannbreite der in einer Altersgruppe vorhandenen Kompetenzen ist sehr groß und Defizite sind im Verlauf der Schulzeit kaum aufzuholen. Zwischen den Kindern vorhandene Unterschiede bleiben überwiegend stabil erhalten oder vergrößern sich im Laufe der Grundschulzeit (z.B. Aunola, Leskinen, Lerkkannen & Nurmi, 2004; Grüßing, 2002; Hasselhorn, Roick & Gölitz, 2005; Krajewski, 2003; Stern, 1998). Ein beträchtlicher Anteil der Kinder verfügt dabei über gering ausgeprägte und als unzureichend zu beurteilende mathematische Kompetenzen. In der internationalen Vergleichsstudie TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) zeigte sich, dass knapp jedes fünfte Kind in der vierten Klasse allenfalls über elementares mathematisches Wissen sowie elementare mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten verfügte (Bos, Wendt, Köller & Selter, 2012). Dies stellt äußerst ungünstige Voraussetzungen für das Lernen in der Sekundarstufe dar, was sich in der PISA-Studie bestätigte, in der etwa jedem sechsten Fünfzehnjährigen lediglich ein Mathematikverständnis auf dem Niveau der letzten Grundschulklasse bescheinigt wurde (Prenzel, Sälzer, Klieme & Köller, 2013). Auch als Reaktion auf diese Vergleichsstudien hat sich die politische, wissenschaftliche und gesellschaftliche Aufmerksamkeit verstärkt dem Bereich der frühkindlichen Bildung zugewendet. Spätestens seit der zweiten PISA-Studie (Prenzel et al., 2005), in der belegt wurde, dass dem Besuch einer Vorschuleinrichtung ein prädiktiver Wert für den Kompetenzerwerb zukommt, sind Kindertagesstätten als Bildungseinrichtungen in das öffentliche Bewusstsein eingegangen. So konnten Jugendliche, die länger als ein Jahr eine Kindertagesstätte besucht haben, eine höhere Mathematikkompetenz erreichen als Kinder, die weniger als ein Jahr eine Kindertagesstätte besuchten (Ehmke, Siegle & Hohensee, 2005, S. 250; Müller & Ehmke, 2013, S. 262 ff.).

Nachdem sich die Bildungsforschung zunächst auf sprachliche Kompetenzen von Kindern in Kindertagesstätten konzentrierte, wurden in den letzten Jahren auch verstärkt die mathematischen Kompetenzen sowie deren Entwicklung und Förderung untersucht. So konnten bereits im Jahr vor der Einschulung Basiskompetenzen identifiziert werden, deren Ausprägung die mathematische Leistung am Ende der Grundschulzeit vorhersagen können (Krajewski & Schneider, 2006). Diese Kompetenzen stellen Ansatzpunkte für eine frühe, systematische und individuelle Förderung dar, mit der die optimale Entfaltung der individuellen Bildungspotentiale unterstützt werden soll. Die Frage, wie diese Förderung realisiert werden kann und wie pädagogische Fachkräfte in Kindertagesstätten die Förderung bestmöglich umsetzen können, ist jedoch bislang noch weitgehend ungeklärt. Umfassende Konzepte dazu liegen kaum vor und auch die seit dem Jahr 2004 von den Bundesländern sukzessive eingeführten Bildungspläne für die frühe Bildung in Kindertagesstätten enthalten nur wenige Konkretisierungen oder konzeptionelle Vorgaben. Um eine möglichst flächendeckende Durchführung der mathematischen Förderung in Kindertagesstätten zu stützen, ist es jedoch von zentraler Bedeutung, den pädagogischen Fachkräften alltagstaugliche Förderkonzepte zur Verfügung zu stellen. In den letzten Jahren wurde zwar eine Vielzahl an Programmen, Leitfäden und Materialien zur frühen mathematischen Förderung publiziert, über eine umfassende fachtheoretische Fundierung sowie eine adäquate empirische Überprüfung der Wirksamkeit verfügen jedoch nur wenige. Hinsichtlich der methodischen Konzeption können grundsätzlich zwei Ansätze unterschieden werden: mathematische Trainingsprogramme, die in der Regel in Kleingruppen durchgeführt werden, sowie eine in den normalen Ablauf der Kindertagesstätten integrierte Förderung, die alltägliche Situationen aufgreift und zur Anregung mathematischer Kompetenzen nutzt. Bislang wurde jedoch kaum untersucht, welcher dieser beiden Förderansätze bessere Wirkungen bei den Kindern erzielt und ob sich im Kontext von Familie und Kindertagesstätte differenzielle Wirkungen zeigen.

Neben dem Förderkonzept an sich kommt auch den pädagogischen Fachkräften eine zentrale Bedeutung für eine gelingende Förderung zu. Diese sind neben den Familien wichtige Bezugspersonen der Kinder und haben die Aufgabe, die Bildungspläne umzusetzen und die Förderung in den Kindertagesstätten durchzuführen. Es zeigen sich jedoch Hinweise darauf, dass die pädagogischen Fachkräfte nur begrenzte Vorstellungen vom Bildungsbereich Mathematik, der Entwicklung mathematischer Kompetenzen sowie der differenzierten Förderung haben (Benz, 2012; Bruns, 2014; Hildenbrand, 2009). Daraus ergibt sich die Anforderung an die Fort- und Weiterbildung, entsprechende Angebote zur Qualifizierung und Ausbildung pädagogischer Handlungskompetenzen von Erzieherinnen[1] bereitzustellen. Dabei existiert jedoch vergleichsweise wenig empirische Evidenz zu den Fragen, wie pädagogische Fachkräfte durch Fortbildungen auf die Aufgabe die mathematischen Kompetenzen von Kindern gezielt und systematisch zu fördern vorbereitet werden können und wie die Implementation der Förderung in die Praxis unterstützt werden kann.

An diesem Punkt setzt die vorliegende Arbeit an, in der untersucht wurde, wie die Förderung mathematischer Kompetenzen durch Fortbildungen pädagogischer Fachkräfte vorbereitet werden kann und inwiefern sich die Wirkungen hinsichtlich der Kompetenzentwicklung der geförderten Kinder durch den Einsatz verschiedener Förderansätze unterscheiden. Dazu wurde eine Interventionsstudie durchgeführt, in der

1 In der vorliegenden Arbeit wird aus Gründen der Lesbarkeit statt der Verwendung männlicher und weiblicher Sprachformen durchgängig die weibliche Bezeichnung verwendet. Dabei sind in die Personenbezeichnungen jeweils beide Geschlechter eingeschlossen.

Erzieherinnen Hamburger Kindertagesstätten eine Fortbildung zur Förderung mathematischer Kompetenzen nach einem spezifischen Trainingsprogramm beziehungsweise zur Umsetzung einer alltagsintegrierten mathematischen Förderung absolvierten. Parallel zu den Fortbildungsveranstaltungen sollten die Erzieherinnen die Förderung in ihren Kindertagesstätten umsetzen. Neben dem Ausmaß der Implementation der Förderung wurde die Wirksamkeit der beiden Förderansätze sowie je nach individuellen, familiären oder institutionellen Kontextmerkmalen differentielle Wirkungen untersucht.

Den Ausgangspunkt für die im Rahmen der vorliegenden Promotionsarbeit durchgeführte Interventionsstudie bilden theoretische Hintergründe und empirische Erkenntnisse, die im ersten Teil der Arbeit dargestellt werden. So widmet sich das nachfolgende Kapitel 2 zunächst der Entwicklung mathematischer Kompetenzen und Konzepten vom Säuglingsalter bis etwa zum Schuleintritt. Dabei werden theoretisch und empirisch abgesicherte Entwicklungsaspekte hinsichtlich der frühen und zunächst nonverbalen Mengenerfassung, des Zahlbegriffs, der Zahlwortreihe, des Zählens sowie erster Rechenoperationen betrachtet. Darauf folgt die Darstellung zweier aktueller Entwicklungsmodelle, in denen die frühen mengen- und zahlenbezogenen Kompetenzen sowie die tragenden arithmetischen Konzepte systematisiert werden.

Das Wissen um die Entwicklung mathematischer Kompetenzen stellt die Grundlage für eine adäquate Förderung dar, auf die in Kapitel 3 eingegangen wird. Nach der Darstellung der normativen Grundlage und des Stellenwerts der frühen mathematischen Förderung im Elementarbereich werden die wesentlichen Inhalte einer vorschulischen mathematischen Förderung skizziert. Zur Beantwortung der Frage nach der Gestaltung einer kindgerechten mathematischen Förderung werden Kriterien für eine vorschulische Förderung ausgearbeitet. Darauf folgend werden die beiden gängigsten Formen der Förderung – Trainingsprogramme und alltagsintegrierte Förderung – beschrieben und jeweils durch im deutschsprachigen Raum eingesetzte und empirisch erprobte Ansätze konkretisiert.

Nachdem die Entwicklung und Möglichkeiten zur Förderung mathematischer Kompetenzen betrachtet wurden, wird in Kapitel 4 schließlich der Blick auf die pädagogischen Fachkräfte in Kindertagesstätten gerichtet. Diese benötigen zur Durchführung einer angemessenen frühen mathematischen Förderung neben dem Wissen um die entwicklungspsychologischen Hintergründe auch umfassende professionelle Handlungskompetenzen. In der Regel sind diese jedoch bei den pädagogischen Fachkräften nicht per se vorhanden, sondern ihre Aneignung sollte neben der grundständigen Ausbildung auch in der beruflichen Weiterbildung unterstützt werden. Dabei sollten in der Gestaltung von Fortbildungen verschiedene – in Kapitel 4 skizzierte – Aspekte berücksichtigt werden, um die Implementation der Fortbildungsinhalte und die Umsetzung der Förderung bestmöglich zu gewährleisten.

Ab Kapitel 5 beginnt mit der Formulierung der Forschungsfragen die Darstellung des empirischen Teils der vorliegenden Arbeit. Aufbauend auf den Erkenntnissen der theoretischen Grundlagen wurden die Wirkungen von zwei Fortbildungsmaßnamen und der parallel erfolgenden Förderung mathematischer Kompetenzen nach zwei unterschiedlichen konzeptionellen Ansätzen untersucht.

Die durchgeführte Interventionsstudie wird in Kapitel 6 ausführlich dargestellt. Dabei werden ausgehend vom Design und Ablauf der Untersuchung auch die eingesetzten Instrumente, die Stichprobe sowie die durchgeführten Interventionsmaßnahmen beschrieben. Darüber hinaus wird detailliert auf das methodische Vorgehen eigegangen, sowohl hinsichtlich der Erhebungs- als auch Analysemethoden.

Die Darstellung der Ergebnisse in Kapitel 7 gliedert sich schließlich in drei Schwerpunkte. Zunächst werden das Ausmaß und die Genauigkeit der Umsetzung der Fortbildungsinhalte sowie Rahmenbedingungen der Implementation beschrieben. Darauf folgend werden die allgemeine Wirksamkeit der Interventionen sowie spezifische Unterschiede zwischen den beiden Interventionsmaßnahmen durch einen Vergleich der Treatment- und Kontrollgruppenkinder untersucht. Abschließend wird in Abhängigkeit des Treatments der Einfluss verschiedener Kontextfaktoren auf die mathematischen Kompetenzen analysiert.

Die Dissertation schließt in Kapitel 8 mit einer Diskussion der Methoden und Ergebnisse sowie mit einem Ausblick für zukünftige Interventionsforschungen zur frühen Förderung mathematischer Kompetenzen.

2 Entwicklung mathematischer Kompetenzen im vorschulischen Bereich

Mittlerweile gilt es als allgemein anerkannt, dass auch im mathematischen Bereich der Schulanfang nicht den Lernanfang darstellt (Fritz & Ricken, 2008, S. 2 f.; Schneider, Küspert & Krajewski, 2013, S. 14; Selter, 1995). Kinder lernen von Geburt an und in allen Lebensbereichen, sowohl im familiären als auch institutionellen Umfeld. Die Entwicklung mathematischer Konzepte und Kompetenzen stellt dabei nur einen Teilbereich der insgesamt zu erwerbenden Fähigkeiten und Fertigkeiten dar, der jedoch als elementare Kulturtechnik (Tenorth & Tippelt, 2007, S. 435) von großer Bedeutung für die gesellschaftliche Teilhabe und die Bewältigung des beruflichen und privaten Alltags ist.

Die Säuglingsforschung konnte aufzeigen, dass die Entwicklung schon ab der frühesten Kindheit beginnt, und bestimmte Basiskompetenzen bereits von Geburt an in Grundzügen angelegt sind (Antell & Keating, 1983; Butterworth, 2005; Dehaene, 1999, S. 76 ff.; Landerl & Kaufman, 2013, S. 55 ff.). Dazu zählt beispielsweise die Fähigkeit, Mengen zu vergleichen und zu unterscheiden sowie ein grundlegendes Verständnis für Vermehren und Vermindern (Dehaene, 1999, S. 76 ff.). Andere Kompetenzen wie der Erwerb des Zahlbegriffs, der Zahlwortreihe sowie arithmetischer Kompetenzen bauen auf dieser Basis auf und werden erst im Laufe der Kindheit erworben.

Nachstehend wird zunächst der Begriff der Kompetenz (Kapitel 2.1) bestimmt. Darauf folgt die Beschreibung der Entwicklungsprozesse mathematischer Konzepte und Kompetenzen, wobei hauptsächlich auf entwicklungspsychologische Ansätze zurückgegriffen wird. Zunächst werden pränumerische Kompetenzen von Kindern beschrieben (Kapitel 2.2), worauf eine Darstellung der Entwicklung des Zahlbegriffs (Kapitel 2.3), des Erwerbs der Zahlwortreihe und des Zählens (Kapitel 2.4) sowie erster Rechenkompetenzen (Kapitel 2.5) folgt. Schließlich werden zwei Entwicklungsmodelle vorgestellt (Kapitel 2.6), in denen versucht wird, die komplexe Entwicklung vorschulischer mathematischer Kompetenzen vollständig zu integrieren und darzustellen. In Kapitel 2.7 wird die Ausarbeitung zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen im vorschulischen Bereich noch einmal kurz zusammengefasst.

2.1 Begriffsklärung: Kompetenz

Der Begriff der Kompetenz ist ein weit verbreiteter und in sehr unterschiedlichen Zusammenhängen genutzter Ausdruck, der jedoch im wissenschaftlichen Sprachgebrauch nicht einheitlich definiert ist (Jude & Klieme, 2008, S. 9; Klieme & Hartig, 2007, S. 12 ff.; Tenorth & Tippelt, 2007, S. 413). Dies ist allerdings laut Erpenbeck und von Rosenstiel (2007, S. XVII ff.) auch nicht erstrebenswert, da die Phänomene, auf die sich der Kompetenzbegriff bezieht, sehr komplex und vielfältig sind und sich in den verschiedenen Wissenschaftsdisziplinen durchaus unterscheiden. Erpenbeck und von Rosenstiel (2007) bezeichnen den Kompetenzbegriff infolgedessen als theorierelativ, womit gemeint ist, dass er „nur innerhalb der spezifischen Konstruktion einer Theorie von Kompetenz eine definierte Bedeutung" (S. XX) hat. Er muss also jeweils im Rahmen einer spezifischen Theorie bestimmt werden.

In den Sozial- und Erziehungswissenschaften wurde der Kompetenzbegriff maßgeblich von dem Psychologen Franz Emanuel Weinert geprägt. Weinert (2001) bezeichnet Kompetenzen als „die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können" (S. 27 f.). Der Begriff der Kompetenz bezieht sich nach dieser Auffassung also sowohl auf die vorhandenen als auch erlernbaren kognitiven Dispositionen, die ein Individuum befähigen, unterschiedliche Aufgaben beziehungsweise Lebenssituationen erfolgreich zu bewältigen. Dazu gehört neben kognitiven Fähigkeiten auch funktionales Wissen (Klieme & Hartig, 2007, S. 21). Darüber hinaus sind in dem Kompetenzbegriff nach Weinert auch die Motivation und willentliche Umsetzung in bestimmten Anforderungssituationen als Voraussetzungen oder Moderatorvariablen der Kompetenz inbegriffen (Wirtz, 2013, S. 854 f.).

In der empirischen Bildungsforschung, deren zentrale Aufgabe es ist, zu untersuchen, inwieweit Bildungseinrichtungen ihre Ziele erreichen und messbare Kriterien dazu zu entwickeln, wird der Kompetenzbegriff meist auf die kognitiven Leistungsdispositionen beschränkt (Jude & Klieme, 2008). So definieren Klieme und Leutner (2006) im DFG Schwerpunktprogramm „Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen"[2] Kompetenzen als „*kontextspezifische kognitive Leistungsdispositionen*, die sich funktional auf Situationen und Anforderungen in bestimmten *Domänen* beziehen" (S. 879; Hervorhebungen im Original). Kontext meint dabei den Bereich von Situationen und Anforderungen, auf den sich eine Kompetenz bezieht. Dieser Bereich sollte hinreichend konkret sein, um eine Beschreibung und Operationalisierung zu ermöglichen, darf aber nicht zu eng gefasst werden, da sonst Sachwissen oder einzelne Fertigkeiten als Kompetenzen bezeichnet wären (Hartig, 2008, S. 21). So fällt beispielsweise die Messung sozialer Kompetenzen schwer, da der Bereich relevanter Situationen sehr breit gefasst ist. Ein Beispiel für eine zu enge

2 Das Schwerpunktprogramm „Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen" der Deutschen Forschungsgesellschaft (DFG) befasst sich mit erziehungswissenschaftlichen, fachdidaktischen und kognitionspsychologischen Grundlagen der Kompetenzmodellierung sowie mit psychometrischen Modellen und konkreten Technologien zur Messung von Kompetenzen (http://www.dfg.de/foerderung/info_wissenschaft/archiv/2010/info_wissenschaft_10_50/index.html).

Definition relevanter Kontexte stellt das Vokabelwissen in einer Fremdsprache dar, für welches die Bezeichnung Wortschatzkompetenz als wenig geeignet und zweckmäßig erscheint (Hartig, 2008, S. 19 ff.). Insgesamt wird in der Bildungswissenschaft davon ausgegangen, dass Kompetenzen durch Erfahrungen und Lernen erworben werden können und demzufolge auch durch äußere Interventionen beeinflussbar sind (Klieme & Leutner, 2006, S. 880; Wirtz, 2013, S. 854 ff.). Dabei können Kompetenzen nicht unmittelbar gemessen werden, sondern sind nur durch die Performanz, also das beobachtbare Verhalten, erschließbar und werden zumeist leistungsbezogen erfasst (Stern, 1998, S. 17). Um eine Aussage über individuelle Kompetenzausprägungen treffen zu können, reicht jedoch eine einzelne Beobachtung nicht aus, sondern es sind Beobachtungen in variierenden Situationen und mithilfe unterschiedlicher Aufgaben notwendig (Klieme & Hartig, 2007, S. 24). In der vorliegenden Arbeit folgt die Verwendung des Begriffs Kompetenz der Definition von Klieme und Leutner.

In Abgrenzung zum Kompetenzbegriff werden Fertigkeiten in der vorliegenden Arbeit als „durch Übung automatisierte Komponenten von Tätigkeiten“ (Erpenbeck & von Rosenstiel, 2007, S. XXXV) verstanden. Fertigkeiten sind also relativ eng umgrenzte, routiniert abrufbare Handlungen, die durch Übung und Training erworben werden können. Sie werden häufig unter geringer Bewusstseinskontrolle ausgeführt wie beispielsweise das Aufsagen der Zahlwortreihe (Gnahs, 2010, S. 24).

Schwieriger stellt sich die Abgrenzung des Begriffs der Fähigkeiten dar, welcher häufig auch synonym verwendet wird. Es handelt sich dabei um ein Konstrukt zur Bezeichnung der Gesamtheit der individuellen psychischen und physischen Bedingungen als Voraussetzung zur Erbringung einer körperlichen oder geistigen Leistung (Böhm, 2005, S. 199 ff.; Tenorth & Tippelt, 2007, S. 236). Fähigkeiten gelten als handlungszentriert und können auf genetische Anlagen oder äußere Umstände wie Erziehung zurückzuführen sein und durch Übung verbessert werden (Erpenbeck & von Rosenstiel, 2007, S. XXV f.). Gnahs (2010) verdeutlicht den Unterschied zwischen Fähigkeiten und Kompetenzen am Beispiel Lesen: „Das Ausmaß der Vorlesekompetenz dürfte bei Personen mit gleicher Lesefähigkeit […] durchaus variieren in Abhängigkeit zum Beispiel vom Grad der Extraversion und vom Grad des Neurotizismus, aber auch von der Motivlage“ (S. 26). Während Fähigkeiten vorranging Kenntnisse und Fertigkeiten vereinen, beziehen Kompetenzen auch die Motivation und den Willen eines Individuums ein. In der vorliegenden Arbeit wird in Anlehnung an Gnahs (2010) der Fähigkeitsbegriff als das Zusammenspiel von Wissens- und Fertigkeitskomponenten verstanden.

2.2 Mengenerfassung

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen beginnt bereits im Säuglingsalter und auch wenn es häufig nicht direkt beobachtbar ist, ist ein erstes mathematisches

Verständnis sehr früh vorhanden. Dabei ist dieses nicht zwingend an die Sprache gebunden, sondern bereits Säuglinge können Mengenanzahlen wahrnehmen und unterscheiden (Antell & Keating, 1983; Izard, Sann, Spelke & Streri, 2009; Lipton & Spelke, 2003, 2004; Starkey & Cooper, 1980; Wynn, 1996; Xu & Arriga, 2007; Xu & Spelke, 2000; Xu, Spelke & Goddard, 2005). Um dies zu untersuchen wurden zahlreiche Säuglings- und Kleinkindstudien durchgeführt, die mit der Methode der Habituierungsexperimente die Tatsache nutzten, dass kleine Kinder ihre Aufmerksamkeit bevorzugt neuen Dingen oder Ereignissen zuwenden. Man geht davon aus, dass mit der Gewöhnung an einen Reiz (Habituation) das Interesse der Kinder abnimmt und erst dann wieder zunimmt, wenn sie mit einem neuen Reiz konfrontiert werden (Dishabituation). Als Gradmesser für das Interesse wird die Fixierungsdauer des Blickes verwendet, welche durch Beobachter beziehungsweise durch eine auf die Augen des Kindes gerichtete Kamera festgehalten wird. Säuglingen wird also ein bestimmter Reiz so lange dargeboten, bis sie das Interesse daran verlieren. Je vertrauter den Säuglingen der Reiz ist, desto kürzer sehen sie hin. Wird ein neuer Reiz präsentiert, der eine Veränderung darstellt, erhöht sich das Interesse und damit auch die Blickdauer wieder (vgl. Fritz & Ricken, 2008, S. 30).

Starkey und Cooper (1980) wendeten diese Methode bei durchschnittlich knapp sechs Monate alten Säuglingen an und präsentierten ihnen Bilder mit in einer Reihe geordneten Punkten. Sobald sich die Kinder an diesen Reiz gewöhnt hatten, wurden ihnen Bilder mit einer anderen Anzahl an Punkten aber in der gleichen Länge oder Dichte der Reihe dargeboten (2 vs. 3 und 3 vs. 2). Sie stellten fest, dass die Babys auf den neuen Reiz mit einer höheren Blickdauer reagierten. Angesichts der gleichbleibenden Gesamtlänge der Reihe sowie der Dichte der dargebotenen Punkte deuteten Starkey und Cooper dieses Ergebnis als Beleg dafür, dass die Säuglinge bereits in der Lage sind, kleine Anzahlen zu unterscheiden. Bei einer größeren Anzahl Punkten (4 vs. 6 und 6 vs. 4) gelang die Unterscheidung der Mengen jedoch nicht, woraus Starkey und Cooper schlossen, dass die Säuglinge Veränderungen von Mengen mit mehr als drei Elementen noch nicht wahrnehmen können (Starkey & Cooper, 1980, S. 1034). Antell und Keating (1983) wiederholten Starkeys und Coopers Versuche mit nur wenigen Tage alten Säuglingen. Sie stellten fest, dass sogar Neugeborene Anzahlen gegenüber sensitiv sind und schlossen daraus, dass sie zwischen kleinen Anzahlen (2 vs. 3) unterscheiden können. Das Ergebnis, dass Säuglinge zwischen kleinen Mengen unterscheiden können, an der Differenzierung größerer Mengen jedoch noch scheitern, wurde in mehreren Untersuchungen repliziert. Strauss und Curtis (1981) präsentierten beispielsweise zwölf Monate alten Kindern Bilder von alltäglichen Gegenständen und Wynn (1996) führte sechs Monate alten Säuglingen Ereignisse wie Sprünge einer Puppe vor. Die Testpersonen reagierten jeweils mit einer höheren Fixationszeit auf die veränderte Anzahl an Objekten beziehungsweise Ereignissen.

Starkey, Spelke und Gelman (1983) erweiterten die Habituierungsstudien und kombinierten visuelle und akustische Reize. Sie zeigten Säuglingen zu einer Abfolge von zwei oder drei Trommelschlägen zwei Bildschirme, auf denen zwei beziehungsweise drei alltägliche Gegenstände in unterschiedlichen Anordnungen abgebildet waren. Die sechs bis acht Monate alten Säuglinge betrachteten denjenigen Bildschirm signifikant länger, dessen bildlich präsentierte Menge mit der dargebotenen Anzahl der Trommelschläge übereinstimmte. Die Babys schienen also die Anzahl der Töne zu erkennen und verglichen sie mit der Quantität der Gegenstände. Stimmte die Quantität der Gegenstände auf dem einen Bildschirm nicht mit der Anzahl der Töne überein, wendeten sie den Blick ab und betrachteten den anderen Bildschirm. Säuglinge sind demnach also in der Lage, eine numerische Korrespondenz zwischen visuell und auditiv dargebotenen Stimuli herzustellen und verfügen über ein abstraktes, von der Art und Weise der Darbietung unabhängiges Konzept der Anzahl (Dehaene, 1999, S. 64 f.). Auch in neueren Studien, die natürlichere Stimuli wie Gesichter und Stimmen oder ein zum visuell präsentierten Reiz passendes Geräusch nutzten, konnte die These unterstützt werden, dass sechs bis sieben Monate alte Säuglinge numerische Korrespondenz zwischen 2 bis 3 Items unterschiedlicher Modalität erkennen können (Jordan & Brannon, 2005; Kobayashi, Hiraki & Hasegawa, 2005).

Untersuchungen in jüngerer Zeit (Izard et al., 2009; Lipton & Spelke, 2003, 2004; Xu & Arriga, 2007; Xu & Spelke, 2000; Xu et al., 2005) ergaben im Weiteren, dass sechs Monate alte Säuglinge auch größere Mengen, mit mehr als drei Elementen, unterscheiden können. Dazu muss jedoch die verhältnismäßige Differenz der beiden Quantitäten groß genug sein. In den durchgeführten Experimenten wurden dabei jeweils verschiedene Faktoren wie beispielsweise der durch die Objekte insgesamt ausgefüllte Bereich, die Helligkeit des dargebotenen Bildes, Größe, Umfang und Dichte der Objekte bei visuellen Stimuli oder die Dauer der einzelnen Klänge sowie der Gesamtsequenzen bei akustischen Reizen kontrolliert. Dadurch sollte sichergestellt werden, dass der einzige Unterschied zwischen den zur Habituierung und zur Dishabituierung angebotenen Reizen in der Anzahl der Elemente lag.

Izard et al. (2009) führten Habituierungsstudien mit durchschnittlich 49 Stunden alten Neugeborenen durch. Sie konnten Belege dafür finden, dass die Neugeborenen Anzahlen in einem Verhältnis von 1:3 (z.B. 4 vs. 12) unterscheiden konnten, jedoch nicht in einem kleinerem Verhältnis von 1:2 (z.B. 4 vs. 8). Die Autoren schließen daraus, dass Grundlagen mathematischen Wissens und numerischer Repräsentation angeboren sind und sich im Laufe der Lebenszeit weiter entwickelt und ausdifferenziert (Izard et al., 2009, S. 10384).

Xu und Spelke (2000), Lipton und Spelke (2003, 2004) sowie Xu et al. (2005) stellten in ihren Untersuchungen fest, dass durchschnittlich sechs Monate alte Kinder größere Anzahlen differenzieren, die sich in einem Verhältnis von 1:2 unterscheiden (z.B. 4 vs. 8, 8 vs. 16 oder 16 vs. 32). Sie sind aber noch nicht in der Lage Unterschiede im Verhältnis 2:3 zu erkennen (z.B. 4 vs. 6, 8 vs. 12 oder 16 vs. 24).

Im Alter von neun bis zehn Monaten wird die Unterscheidung von Mengen im Verhältnis 2:3 von den Kindern bewältigt, sie scheitern jedoch am Verhältnis 4:5 (z.B. 4 vs. 5 oder 8 vs. 10) (Lipton & Spelke, 2003, 2004; Xu & Arriga, 2007).

Die berichteten Ergebnisse deuten darauf hin, dass sich die Fähigkeit, Mengen zu unterscheiden, im Verlauf des ersten Lebensjahrs weiter entwickelt und die Kinder mit zunehmender Genauigkeit auch größere Mengen unterscheiden können. „These conclusions are consistent with the thesis that a common mechanism underlies numerical discrimination in infants and adults, and that the precision of the mechanism gradually increases over infancy, long before children learn verbal counting or symbolic arithmetic“ (Lipton & Spelke, 2003, S. 400). Dabei scheint es keine Rolle zu spielen, ob die Stimuli visuell-räumlich oder auditiv-zeitlich präsentiert werden.

Auf der Basis verschiedener Untersuchungen kommen jedoch immer wieder Zweifel an den frühen numerischen Fähigkeiten von Säuglingen auf. So konnten die Ergebnisse zur Erfassung numerischer Korrespondenz zwischen visuell und auditiv dargebotenen Reizen nicht in allen Experimenten repliziert werden (Mix, Levine & Huttenlocher, 1997; Moore, Benenson, Reznick, Peterson & Kagan, 1987).

Auch die Ergebnisse von Clearfield und Mix (1999) deuten auf eine Einschränkung der numerischen Kompetenzen von Säuglingen hin. Sie modifizierten in ihren Untersuchungen die Methode der visuellen Habituierung dahingehend, dass sie einzelne Faktoren nicht nur kontrollierten, sondern systematisch variierten. Sechs bis neun Monate alten Kindern wurden Bilder präsentiert, auf denen zwei beziehungsweise drei Quadrate zu sehen waren. Sobald die Kinder an diese Bilder habituiert waren und ihre Blickdauer nachließ, wurden ihnen neue Bilder präsentiert. Auf diesen waren wiederum Quadrate zu sehen, die sich jedoch entweder in der Anzahl (ein Quadrat mehr beziehungsweise weniger) oder der Konturenlänge (die Summe der einzelnen Umfänge) von den vorherigen unterschieden. Clearfield und Mix fanden heraus, dass die Säuglinge die dargebotenen neuen Bilder dann signifikant länger betrachteten, wenn sich die Größe der Quadrate veränderte. Eine Erklärung der Autoren zur Einordnung der Ergebnisse in vorherige Forschungsbefunde ist, dass Kinder zwar grundsätzlich in der Lage sind, zwischen Anzahlen zu unterscheiden, ihre Aufmerksamkeit jedoch – wenn möglich – bevorzugt auf die Ausdehnung kontinuierlicher Mengen, also die Konturenlänge richten (Clearfield & Mix, 1999, S. 410).

In Kontrast zu dieser These konnten Cordes und Brannon (2008) in ihrer Studie jedoch Belege dafür finden, dass Säuglinge im Alter von sechs Monaten Anzahlen leichter unterscheiden können als Ausdehnungen. Für die Unterscheidung von Anzahlen muss nach ihren Ergebnissen die zweite Quantität doppelt oder dreimal so groß sein (Izard et al., 2009; Lipton & Spelke, 2003, 2004; Xu & Spelke, 2000; Xu et al., 2005), wohingegen zur Unterscheidung der Ausdehnung eine Vervierfachung nötig ist, damit die Kinder die Unterschiede bemerken (Cordes & Brannon, 2008, S. 489).

Obgleich das Vorhandensein eines abstrakten Zahlkonzepts immer wieder in Frage gestellt wird, kann insgesamt aufgezeigt werden, dass Kinder schon sehr früh, noch bevor sie sich sprachlich ausdrücken können, über ein kognitives Schema des Vergleichens von Mengen verfügen (Krajewski, 2003, S. 56 f.). Resnick (1989) benennt die Konzepte, die dem Erwerb von Mengenkonzepten zugrundeliegen, als *protoquantitative Schemata*. Der Begriff protoquantitativ bezieht sich auf den Umstand, dass die Vorstellungen der Kinder noch keinen numerisch präzisen Anzahlbezug aufweisen. Stehen den Kindern sprachliche Mittel zur Verfügung, sind sie jedoch in der Lage, Objekte als „groß“, „klein“, „viel“ oder „wenig“ zu beschreiben. Resnick (1989) identifiziert drei protoquantiative Schemata, das *Schema des Vergleichens*, das *Schema des Vermehrens und Verminderns* sowie das *Teil-Ganzes-Schema*, auf die im Folgenden näher eingegangen wird.

Schema des Vergleichens. Die im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Fähigkeit, Quantitäten wahrnehmungsgebunden miteinander zu vergleichen und zu beurteilen, wird von Resnick (1989, S. 163) als *protoquantiatives Schema des Vergleichens* bezeichnet. Dabei wird eine Unterscheidung von Mengen vorgenommen, ohne die genaue Anzahl zu bestimmen. Aus den beschriebenen Studien können Hinweise darauf entnommen werden, dass Kinder kleine und größere Anzahlen in unterschiedlicher Weise differenzieren und somit zwischen den zwei Darstellungssystemen der Simultanerfassung und des Schätzens unterschieden werden kann (Carey, 1998; Feigenson, Carey & Hauser, 2002; Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004; Langhorst, Ehlert & Fritz, 2012, S. 236; Ricken, Fritz & Balzer, 2013, S. 9; Sodian, 2012, S. 402 f.; Xu, 2003, S. B23; Xu et al., 2005, S. 99).

Bei kleinen Mengen von bis zu drei oder vier Gegenständen und ihrer Veränderung kommt eine exakte Darstellung zur Anwendung, bei der die Elemente auf einen Blick erfasst werden. Dieser Prozess wird *Simultanerfassung* oder *Subitizing* genannt. Clements (1999, S. 401) unterscheidet dabei zwei Formen der Simultanerfassung. *Perceptual Subitizing* meint das wahrnehmungsgebundene Simultanerfassen kleiner Anzahlen von bis zu drei Objekten. Diese Fähigkeit wird teilweise zur Erklärung der Ergebnisse der zuvor geschilderten Säuglingsexperimente herangezogen (Starkey & Cooper, 1980; Wynn, 1992, S. 749) und bedeutet, dass Kinder beispielsweise „drei“ Objekte auf einen Blick erkennen, ohne dabei erlerntes mathematisches Wissen oder andere mathematische Prozesse zu nutzen. Das *Conceptual Subitizing* hingegen ermöglicht es, die Anzahl einer Menge zu erkennen, indem ein vertrautes Muster wie beispielsweise die räumliche Anordnung von Punkten auf Würfeln oder Dominosteinen wiedererkannt wird. Andere Muster können rhythmischer oder kinästhetischer Art sein, wie zum Beispiel ein begleitendes Klopfen beim Zählen oder das Nutzen von Fingerbildern. Radatz, Schipper, Ebeling und Dröge (1996, S. 38) sprechen bei diesem Vorgang von quasi-simultaner Erfassung, da die eigentliche Simultanerfassung nur mit Anzahlen von bis zu drei oder vier Objekten möglich ist.

Zur Erklärung der Simultanerfassung werden in der Psychologie sogenannte *object-tracking* oder auch *object file models* herangezogen (Carey, 1998; Elsner & Pauen, 2012, S. 176; Xu, 2003, S. B16; Xu et al., 2005, S. 99). Dabei wird davon ausgegangen, dass für jedes wahrgenommene Element kurzzeitig ein *object file*, also ein mentaler Repräsentant abgespeichert wird. Wird nun die erste Menge verdeckt und eine andere Menge dargeboten, kann über einen Eins-zu-Eins-Vergleich der gespeicherten Repräsentanten mit den Elementen der neu dargebotenen Menge festgestellt werden, ob sich die Anzahl der Elemente verändert hat.

Das zweite Darstellungssystem bezieht sich auf größere Mengen, die annäherungsweise und durch Schätzung unterschieden werden. Der Vorgang des annäherungsweisen Schätzens ohne genaue Anzahlen wird als *approximate number system* oder *analog magnitude representation* bezeichnet (Halberda & Feigenson, 2008; Halberda, Mazzocco & Feigenson, 2008; Piazza, 2010). Dabei wird eine Anzahl als kontinuierlich wachsende Quantität, ähnlich einem Zahlenstrahl, repräsentiert und Unterscheidungen werden in gleicher Weise wie bei Längen, Volumen, Zeit oder anderen kontinuierlichen Größen vorgenommen.

Ob Unterschiede zwischen Mengen erkannt werden, hängt dabei nicht von der absoluten Anzahl, sondern von dem Verhältnis der beiden Mengen zueinander ab und unterliegt dem Weber-Fechnerschen Gesetz[3] (Elsner & Pauen, 2012, S. 176; Piazza, 2010; Xu, 2003, S. B23; Xu et al., 2005, S. 99). Die Fähigkeit, größere Mengen zu unterscheiden, entwickelt sich im Laufe der Kindheit und Jugend (Halberda & Feigenson, 2008, S. 1463). Während – wie bereits beschrieben – Neugeborene Quantitäten im Verhältnis 1:3 unterscheiden können, sind etwa sechs Monate alte Säuglinge in der Lage, Mengen im Verhältnis von 1:2 zu unterscheiden, neun bis zehn Monate alte Kinder können Mengen im Verhältnis 2:3 unterscheiden und etwa dreijährige Kinder können Mengen im Verhältnis von 3:4 unterscheiden. Vierjährigen Kindern gelingt die Unterscheidung von Mengen bis zu einem Verhältnis von 4:5, fünf- und sechsjährigen Kindern bis zu einem Verhältnis von 5:6 und Erwachsenen schließlich bis zu einem Verhältnis von 10:11 (Halberda & Feigenson, 2008). Mit zunehmender Quantität der Mengen wird der Prozess der Erfassung immer schwieriger sowie ungenauer und langsamer (Dehaene, 1999, S. 81 ff.; Weißhaupt & Peucker, 2009, S. 55). Ist die Differenz zwischen zwei Quantitäten im Verhältnis zu ihrer Gesamtmenge zu gering, können sie schließlich nicht mehr unterschieden werden.

3 Das Weber-Fechnersche Gesetz besagt, dass zwischen der messbaren und der empfundenen Reizstärke kein linearer Zusammenhang besteht, sondern die Wahrnehmbarkeit des Unterschieds zweier Reize proportional zum absoluten Niveau dieser Reize ist. Dies bedeutet, je höher der bereits vorherrschende Reiz ist, desto größer muss die Differenz zwischen den einzelnen Reizen sein, damit sie wahrgenommen werden kann. Das Gesetz ist nicht allgemeingültig (vgl. Wirtz, 2013, S. 542).

Schema des Vermehrens und Verminderns. Mit dem *protoquantitativen Schema des Vermehrens und Verminderns* (Resnick, 1989, S. 163) zeigen Kinder ein Verständnis dafür, dass eine Menge mehr wird, wenn Elemente hinzugefügt werden, weniger wird, wenn Elemente weggenommen werden und dass sie gleich bleibt, wenn weder etwas hinzugefügt noch weggenommen wird. Resnick (1989, S. 163) geht davon aus, dass Kinder im Alter von drei bis vier Jahren über dieses Schema verfügen, wobei sie sich nach Gerlach (2007, S. 44) vermutlich vorwiegend auf die entsprechenden Kompetenzen auf verbaler Ebene bezieht und das zugrundeliegende Schema bereits deutlich früher vorhanden ist.

Wynn (1992) hat sich in ihren Habituierungsstudien ausführlich mit dem Verständnis von Kleinkindern für Vermehren und Vermindern und ihren frühen arithmetischen Kompetenzen beschäftigt. Dabei ist sie davon ausgegangen, dass Kinder nicht nur neuen, sondern auch unerwarteten Objekten oder Ereignissen längere Aufmerksamkeit zuwenden. Sie präsentierte etwa fünf Monate alten Säuglingen einfache Additions- und Subtraktionshandlungen, die entweder ein mögliches richtiges Ergebnis oder ein unmögliches falsches Ergebnis hatten. Die Säuglinge beobachteten, auf dem Schoß eines Elternteils sitzend, wie auf eine kleine Bühne eine Puppe gestellt wurde. Danach wurde eine Sichtblende hochgeklappt, die einen Teil der Bühne verdeckte, wodurch die Puppe nicht mehr zu sehen war. Nun wurde von der Versuchsleiterin eine weitere Puppe hinter der Sichtblende platziert: Die Säuglinge konnten sehen, wie die Hand der Versuchsleiterin mit der Puppe hinter der Sichtblende verschwand und leer zurückgezogen wurde. Nachdem die Sichtblende im Anschluss daran wieder heruntergeklappt wurde, waren alternativ entweder ein, zwei oder drei Puppen auf der Bühne zu sehen. Einer zweiten Gruppe Kinder wurden Subtraktionsaufgaben dargeboten, bei denen zunächst zwei Puppen auf der Bühne zu sehen waren, von denen – nachdem die Sichtblende hochgeklappt war – eine weggenommen wurde. Als Ergebnis erschienen ebenfalls ein, zwei oder drei Puppen. Wynn stellte fest, dass die Kinder die unmöglichen (falschen) Ergebnisse der Additions- und Subtraktionsaufgaben signifikant länger betrachteten als das richtige Ergebnis. Sie schloss daraus, dass die unmöglichen Ergebnisse etwas Unerwartetes darstellen und die Säuglinge dementsprechend schon in der Lage sind, die exakten Ergebnisse einfacher mathematischer Operationen vorherzusagen (Wynn, 1992, S. 750). Repliziert wurden diese Ergebnisse von Koechlin, Dehaene und Mehler (1997) sowie Simon, Hespos und Rochat (1995), die den Versuchsaufbau von Wynn jeweils leicht variierten. In beiden Studien sollte untersucht werden, ob die Kinder das unmögliche Ergebnis nur deshalb länger betrachteten, weil sie sich die Lage oder Identität der Objekte gemerkt hatten und diese mentale Repräsentation mit den neu dargebotenen Reizen verglichen. Die genannten Autoren konnten in ihren Untersuchungen jedoch aufzeigen, dass die Reaktion der Säuglinge unabhängig von der Lage (Koechlin et al., 1997, S. 96 ff.) oder gar der Erscheinungsform der Gegenstände (Simon et al., 1995, S. 262 ff.) war, sondern sich auf die Anzahl bezog und damit auf numerischem Wissen und elementaren arithmetischen Fähigkeiten beruhte. Berger, Tzur und Posner (2006) konnten Wynns Ergebnisse ebenfalls replizieren und fanden darüber hinaus durch Analysen des Elektroenzephalogramms (EEG)[4] Hinweise in den Gehirnaktivitäten der sechs bis neun Monate alten Versuchspersonen, dass diese die „Fehler“ in den präsentierten Additions- und Subtraktionshandlungen (z.B. 1 + 1 = 2 bzw. 1) entdeckten. Die Muster der gemessenen Gehirnaktivitäten glichen dabei denen, die bei Erwachsenen beobachtet werden können, während ihnen korrekte oder inkorrekte arithmetische Gleichungen präsentiert werden.

Nach diesen Ergebnissen kann also davon ausgegangen werden, dass auch Säuglinge schon ein Verständnis dafür haben, dass Additions- und Subtraktionshandlungen eine Änderung der Anzahl einer Menge nach sich ziehen. Dieses Verständnis geht über die Beurteilung von gleich/ungleich und damit die Fähigkeit, Mengen zu unterscheiden, hinaus. „The existence of these arithmetical abilities so early in infancy suggests that humans innately possess the capacity to perform simple arithmetical calculations, which may provide the foundations for the development of further arithmetical knowledge“ (Wynn, 1992, S. 750).

Jedoch sind auch diese Ergebnisse und Schlussfolgerungen nicht unbestritten. So konnten Feigenson, Carey und Spelke (2002) in ihren Experimenten zu den arithmetischen Kompetenzen von etwa sechs Monate alten Kindern zunächst die gleichen Ergebnisse wie Wynn erzielen, stellten aber in einer Erweiterung von Wynns Versuchsaufbau fest, dass die Kinder ihre Aufmerksamkeit, analog zu den Ergebnissen von Clearfield und Mix (1999), eher auf die Ausdehnungsmerkmale von Objekten richteten. Die Versuchspersonen betrachteten diejenigen Ergebnisse länger, deren Oberflächenausdehnung inkorrekt und Anzahl korrekt war (z.B. 1 kleines Objekt + 1 kleines Objekt = 2 große Objekte), als diejenigen Ergebnisse, deren Oberflächenausdehnung korrekt und Anzahl inkorrekt war (z.B. 1 kleines Objekt + 1 kleines Objekt = 1 großes Objekt). Die Autoren schlossen daraus, dass die Kinder nur gegenüber der Veränderung kontinuierlicher Mengen wie der Oberfläche und nicht der Veränderung von Anzahlen sensitiv sind (Feigenson, Carey & Spelke, 2002, S. 62).

Teil-Ganzes-Schema. Das dritte von Resnick (1989, S. 163) benannte protoquantitative Schema ist das *Teil-Ganzes-Schema.* Demnach begreifen etwa vierjährige Kinder, dass sich eine Menge in unterschiedliche Teilmengen zerlegen lässt und diese wiederum zur

---

4 Die Elektroenzephalografie (EEG) ist ein Untersuchungsverfahren in der neurologischen Forschung, das zur Messung der elektrischen Aktivität des Gehirns genutzt wird. Dabei werden die elektrischen Spannungsschwankungen, die durch die Aktivität der Nervenzellen der äußersten Schicht des Gehirns erzeugt werden, an der Kopfoberfläche durch ein Netz von Elektroden aufgezeichnet. Berger, Tzur und Posner evozierten durch die Präsentation einfacher arithmetischer Gleichungen mit möglichen und unmöglichen Ergebnissen Gehirnaktivitäten, die mit dieser Methodik gemessen und aufgezeichnet wurden und deren ereigniskorrelierte Potentiale analysiert wurden (Berger, Tzur & Posner, 2006).

Gesamtmenge zusammengefügt werden können. Wird von einer Teilmenge etwas weggenommen und der anderen Teilmenge zugefügt ändert sich ebenfalls nichts an der Gesamtmenge. Wird jedoch einer Teilmenge etwas hinzugefügt oder weggenommen, verändert sich die Gesamtmenge entsprechend und wird ebenfalls mehr oder weniger. Die Kinder verstehen, dass die Gesamtmenge immer größer ist als eine Teilmenge davon. Das Verständnis für die additive Eigenschaft von Mengen ist dabei zunächst implizit, nichtsprachlich und numerisch unbestimmt. Das Teile-Ganzes-Schema ist grundlegend für ein Verständnis von Beziehungen zwischen Zahlen sowie für das Verständnis von Zahlzerlegungen und Rechenoperationen (Resnick, 1989).

Die drei vorgestellten protoquantitativen Schemata des Vergleichens, Vermehrens und Verminderns sowie Teile-Ganzes sind die Basis für das vorzahlige Mengenverständnis. Dieses differenziert sich mit dem Beginn der Sprache und der Verknüpfung mit Zählfertigen weiter aus und ermöglicht es den Kindern schließlich, Erkenntnisse über die Beziehungen zwischen Zahlen zu generieren. Sie stellen nach Resnick (1989) eine wichtige Grundlage für die spätere mathematische Entwicklung und Ausbildung des Zahlbegriffs dar.

2.3 Zahlbegriff

Der Erwerb eines tragfähigen und umfassenden Zahlbegriffs ist von zentraler Bedeutung für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen und wird als grundlegend für das Erlernen des Rechnens gesehen. Unter dem Zahlbegriff versteht man ein komplexes Gefüge, das sich aus verschiedenen Aspekten zusammensetzt. Es handelt sich dabei also eher um einen Sammelbegriff, der verschiedene Komponenten zusammenfasst (Gerlach, 2007, S. 8), die jeweils spezifische Bedeutungen und Anwendungskontexte haben und die sich gegenseitig ergänzen. Es kann dabei zwischen folgenden Aspekten unterschieden werden (Fritz & Ricken, 2008, S. 28 f.; Padberg & Benz, 2011, S. 13 ff.; Radatz & Schipper, 1983, S. 49; Rechsteiner-Merz, 2013, S. 47 ff.):

- Der *Kardinalszahlaspekt* beschreibt die Mächtigkeit, also die Anzahl der Elemente einer Menge (z.B. sechs Eier kaufen).
- Der *Ordinalzahlaspekt* bezeichnet zum einen als Zählzahl die Folge der natürlichen Zahlen, die beim Zählen benannt werden, und gibt zum anderen als Ordnungszahl die Position eines Elements in einer Reihe an (z.B. der zweite Wagon).
- Der *Maßzahlaspekt* gibt die Größe von Elementen in einer bestimmten (Maß-) Einheit an (z.B. ein Liter Wasser).
- Der *Operatoraspekt* wird zur Bezeichnung der Vervielfachung eines Vorgangs oder einer Handlung genutzt, beschreibt also die Quantität der Wiederholung (z.B. zweimal blühen).

- Der *Rechenzahlaspekt* bezieht sich auf verschriftlichte Zahlen, die als Symbole unter der Einhaltung bestimmter Regeln zum Rechnen genutzt werden (z.B. 3 + 3 = 6).
- Der *Codierungsaspekt* bezieht sich auf die Bezeichnung von Objekten durch Zahlen (z.B. PLZ oder ISBN).
- Neben diesen sechs Aspekten des Zahlbegriffs wird in anderen Quellen noch der *relationale Zahlaspekt* beschrieben (Krajewski & Schneider, 2006, S. 251; Stern, 1998, S. 75 ff.). Dieser bezeichnet die nicht unmittelbar wahrnehmbaren Beziehungen zwischen zwei Mengen oder Zahlen. Dabei handelt es sich um das grundlegende Denken in Beziehungen (Schuler, 2013, S. 44), welches sich auf verschiedene Zahlaspekte beziehen kann. Beispielsweise kann eine Relationszahl Bezug auf den kardinalen Aspekt (z.B. Arne hat 3 Äpfel weniger als Ada) oder den ordinalen Aspekt (z.B. 6 liegt zwischen 4 und 8) nehmen.

Um zu einem umfänglichen Zahlverständnis zu kommen, müssen die Kinder im Laufe der Entwicklung und durch verschiedene Erfahrungen die aufgeführten Aspekte des Zahlbegriffs erwerben, sie aufeinander beziehen und schließlich zu einem einheitlichen Bedeutungssystem integrieren (Fuson, 1988, S. 5 ff.). „Erst im Laufe der Schulzeit werden die Wechselbeziehungen zwischen den verschiedenen Zahlaspekten deutlich und damit ein umfassender Zahlbegriff erarbeitet“ (Radatz & Schipper, 1983, S. 49). Entscheidend ist dabei die Fähigkeit, in verschiedenen Situationen und Aufgaben den passenden Aspekt zu fokussieren und je nach Anwendungskontext flexibel zwischen den Aspekten zu wechseln.

Hinsichtlich der Frage, wie ein umfassender Zahlbegriff erworben wird und unter welchen Voraussetzungen er sich entwickelt, lassen sich zwei Ansätze unterscheiden: Das *logical foundation model*, das auf Piaget zurückgeht, und die *skills integration models*, welche sich auf neuere entwicklungspsychologische und fachdidaktische Befunde beziehen (Kaufmann, 2010, S. 16).

Logical foundation model. Der Schweizer Entwicklungspsychologe Jean Piaget war einer der ersten, der sich intensiv mit dem Aufbau des Zahlbegriffs bei Kindern beschäftigte, dazu umfangreich experimentierte und die beobachteten Verhaltensstrukturen sowie die Entwicklungsabfolge differenziert beschrieb. Die von Piaget (Piaget & Szeminska, 1972) postulierten zentralen Operationen zum Erwerb des Zahlbegriffs sind nach drei Inhaltsbereichen gegliedert: *Erhaltung von Quantitäten und Mengeninvarianz*, *kardinale und ordinale Stück-für-Stück-Korrespondenz* sowie *additive und multiplikative Kompositionen*. Bei dem Verständnis für die *Mengeninvarianz* handelt es sich um die

Entdeckung, dass sich eine gegebene kontinuierliche oder diskontinuierliche Menge[5] nicht verändert, sondern konstant bleibt, auch wenn ihre Darbietungsform oder räumliche Ausdehnung verändert wird (Piaget & Szeminska, 1972, S. 15). Die Fähigkeit zur Herstellung einer *kardinalen Stück-für-Stück-Korrespondenz* zeigt sich, wenn Kinder den kardinalen Wert von Mengen miteinander vergleichen, indem sie ihre einzelnen Elemente einander Stück für Stück zuordnen (Piaget & Szeminska, 1972, S. 61 ff.). Demgegenüber bezieht sich die *ordinale Korrespondenz* auf die Fähigkeit zur Seriation, bei der Kinder in der Lage sind, aus den Elemente einer Menge eine Rangfolge zu bilden (beispielsweise nach der Größe sortiert) und dabei Korrespondenz zwischen zwei Reihen herzustellen (Piaget & Szeminska, 1972, S. 135 ff.). Unter der *additiven und multiplikativen Komposition* lassen sich vor allem die Fähigkeit zur Klasseninklusion sowie die Einsicht in arithmetische Beziehungen zwischen Mengen subsumieren (Piaget & Szeminska, 1972, S. 211 ff.). Der Begriff der Klasseninklusion bezeichnet das Verständnis dafür, dass in der Gesamtmenge immer die Teilmengen enthalten sind. Die Einsicht in arithmetische Beziehung zwischen Mengen zeigt sich bei Kindern, wenn sie in der Lage sind, die Gesamtmenge durch verschiedene reversible additive oder multiplikative Operationen herzustellen.

Piagets Theorie geht davon aus, dass die den genannten Inhaltsbereichen zugrundeliegenden Fähigkeiten und Fertigkeiten (vor allem das Invarianzverständnis, die Eins-zu-Eins-Zuordnung, Seriation und Klassifikation sowie das Teile-Ganzes-Verständnis) unabdingbare Voraussetzungen für den Zahlbegriff sind. Es handelt sich dabei um logisch-formale Operationen, die nicht nur auf Zahlen und Mengen angewendet werden können, sondern deren Entwicklung parallel zur allgemeinen kognitiven Entwicklung[6] verlaufen und als Kernprinzipien „Ausdruck einer verstandesmäßigen Tätigkeit" (Schuler, 2013, S. 37) sind. Die benannten logisch-formalen Operationen entwickeln sich zeitlich parallel in jeweils drei aufeinanderfolgenden Stadien, wobei das dritte Stadium von Kindern im durchschnittlichen Alter von ca. sechseinhalb bis siebeneinhalb Jahren erreicht wird (Piaget, 1958, 1973).

Obgleich Piagets Zahlbegriffstheorie nachhaltigen Einfluss auf die Diskussion um die Entwicklung der Zahlvorstellungen sowie auf die Konzeption von Unterricht, Diagnostik und Förderung hatte (Dehaene, 1999, S. 56 ff.; Hasemann, 2007, S. 9 ff.), ist sie heute nicht mehr uneingeschränkt gültig. Piagets beschriebene Experimente wurden seit den 60er Jahren vielfach repliziert, diskutiert und kritisiert. Vor allem Piagets Versuchsanordnungen und Aufgabenstellungen zur Mengeninvarianz wurden kritisch

5 Unter einer kontinuierlichen Menge versteht Piaget nicht zählbare Quantitäten wie Volumen, wohingegen sich eine diskontinuierliche Menge aus einzelnen, zählbaren Elementen zusammensetzt.

6 Die kognitive Entwicklung wurde von Piaget in die vier Hauptstadien der sensumotorischen Intelligenz, der präoperationalen Intelligenz, der konkret-operationalen Intelligenz sowie der formal-operationalen Intelligenz eingeteilt (vgl. Sodian, 2012, S. 386 f.).

diskutiert. Zum einen seien sie zu weit von der Lebenswelt der Kinder entfernt und könnten leicht zu sprachlichen Missverständnissen führen (Dehaene, 1999, S. 57 f.; Kaufmann, 2010, S. 17; Moser Opitz, 2008, S. 41 ff.; Sodian, 2012, S. 390 ff.). Es sei demnach nicht sichergestellt, dass die Kinder die an sie gerichteten Fragen des Versuchsleiters auch tatsächlich wie intendiert verstehen. Darüber hinaus sind Kinder, die Piagets Originalaufgaben zur Invarianz noch nicht richtig lösen können, durchaus in der Lage, leicht abgewandelte Aufgabenstellungen zur Mengeninvarianz zu lösen, die eher an die Lebenswelt der Kinder anknüpfen (McGarrigle & Donaldson, 1974; Mehler & Bever, 1967). Hinsichtlich des Invarianzverständnisses besteht mittlerweile weitestgehendes Einvernehmen darüber, dass Kinder schon viel früher fähig sind, die Invarianz zu erfassen und daher das Invarianzverständnis – entgegen Piagets Auffassung – keine notwendige Voraussetzung für den Erwerb des Zahlbegriffs darstellt (Dehaene, 1999, S. 57 ff.; Moser Opitz, 2008, S. 51).

Ein weiterer zentraler Kritikpunkt ist das von Piaget angegebene durchschnittliche Alter von sechs bis sieben Jahren, in dem die Kinder über numerische Fähigkeiten verfügen (Moser Opitz, 2008, S. 52 f.). In verschiedenen Experimenten (vgl. Kapitel 2.2) konnte gezeigt werden, dass selbst wenige Wochen alte Kinder Mengen beurteilen und Mengenveränderungen erkennen können sowie über Aspekte des Zahlbegriffs verfügen (Starkey & Cooper, 1980; Starkey, Spelke & Gelman, 1990; Wynn, 1992, 1995). Infrage gestellt wurde auch die von Piaget postulierte enge zeitliche Entwicklungsabfolge der kognitiven Voraussetzungen des Zahlbegriffs, die in neueren Untersuchungen nicht bestätigt werden konnte (zur Oeveste, 1987).

Skills integration models. Die aus der Kritik an Piagets Theorie resultierenden neueren Erkenntnisse und Ansätze der Zahlbegriffsentwicklung können unter dem Begriff *skills integration models* zusammengefasst werden (Clements, 1984, S. 766). So konnte die Säuglings- und Kleinkindforschung zeigen (vgl. Kapitel 2.2), dass Kinder schon sehr früh für den Zahlbegriff relevante mathematische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten erwerben. Die Vertreter der *skills integration models* (z.B. Fuson & Hall, 1983; Gelman & Gallistel, 1978; Resnick, 1983) gehen davon aus, dass die Entwicklung des Zahlbegriffs auf der Integration dieser verschiedener *number skills* basiert. Neben der Simultanerfassung (Subitizing) und dem Vergleichen von Mengen wird dabei vor allem die Bedeutung des Zählens im Entwicklungsverlauf herausgestellt. Dies steht im Gegensatz zu Piagets Theorie, der dem Zählen keine Bedeutung für die Entwicklung des Zahlbegriffs zuschrieb. Er war der Ansicht, dass es sich beim Zählen – solange das Kind noch nicht über einen vollständigen Zahlbegriff verfügt – um ein rein verbales Aufsagen der Zahlworte ohne operatorische Bedeutung handelt (Piaget & Szeminska, 1972, S. 47).

Widerlegt wurden Piagets Annahmen über die Relevanz des Zählens von Clements, der in einer Interventionsstudie untersuchte, ob das Training von logisch-formalen Operationen nach Piagets Vorlage oder Übung und Erfahrung im Zählen die Entwicklung des Zahlbegriffs besser unterstützen. Dazu wurden 45 durchschnittlich viereinhalb Jahre alte Kinder zufällig auf zwei Programmgruppen und eine Kontrollgruppe aufgeteilt. Die Kinder der ersten Programmgruppe erhielten ein Training der logisch-formalen Operationen, die Kinder der zweiten Programmgruppe erhielten ein Training der Zählkompetenz und die Kinder der Kontrollgruppe wurden im sprachlich literarischen Bereich trainiert. Clements (1984) konnte belegen, dass Vorschulkinder von einer Förderung der Zählkompetenz profitierten und dabei auch ein Transfer auf die logischen Operationen stattfand, diese also implizit mittrainiert wurden (Clements, 1984, S. 774). Diese Ergebnisse sprechen gegen Piagets Annahmen, dass Klassifikation und Seriation notwendige Voraussetzungen für die Entwicklung des Zählens sind. „Counting and other number skills may be important elements in a gradual process involving the integration of many skills and understandings, this integration constituting an essential creative activity in the child's learning and development“ (Clements, 1984, S. 775).

Im deutschsprachigen Raum war Kristin Krajewski (2003) eine der ersten, die in einer Längsschnittstudie den Einfluss des frühen mengen- und zahlenbezogenen Vorwissens auf spätere schulische Mathematikleistungen untersucht hat. Sie erhob zu vier Zeitpunkten, vom letzten Kindergartenjahr bis zum Ende der zweiten Klasse, die mathematischen Leistungen von 134 Kindern. Dabei wurden im Bereich des Zahlenvorwissens die Zählfertigkeiten, das arabische Zahlwissen sowie Rechenfertigkeiten erfasst. Sie stellte fest, dass sich insbesondere das vorschulische Zahlenvorwissen als guter Prädiktor für die schulischen Mathematikleistungen erwies und 24 % (erster Messzeitpunkt) beziehungsweise 26 % (zweiter Messzeitpunkt) der Varianz der Leistungen in der ersten Klasse und 15 % (erster Messzeitpunkt) beziehungsweise 23 % (zweiter Messzeitpunkt) der Varianz der Mathematikleistungen in der zweiten Klasse aufklärte (Krajewski, 2003, S. 171 ff.).

Heute wird der Kenntnis der Zahlwortreihe und der Zählkompetenz eine bedeutende Rolle in der Zahlbegriffsentwicklung und der Ausbildung mathematischer Kompetenzen beigemessen (Dehaene, 1999, S. 143), die in verschiedenen Untersuchungen belegt werden konnte (u.a. Aunola et al., 2004; Dornheim, 2008, S. 469 ff.; Jordan, Kaplan, Locuiak & Ramineni, 2007, S. 40 ff.; Krajewski, 2003, 2005; Weißhaupt, Peucker & Wirtz, 2006).

2.4 Zahlwortreihe und Zählen

Die Sprache ermöglicht es den Kindern, Mengen und Mengenrelationen begrifflich zu präzisieren und schließlich mit Zahlwörtern zu belegen. Während sie anfangs vor allem unpräzise Beschreibungen von Mengen nutzen wie beispielsweise „viel“ oder „wenig“, lernen sie nach und nach die Anzahl einer Menge exakt zu bestimmen, indem beispielsweise „wenig“ durch „zwei“ oder „drei“ spezifiziert wird (Resnick, 1989, S. 163). Wie schon angeführt wird dem Erlernen der Zahlwortfolge und der Entwicklung von Zählfertigkeiten eine große Bedeutung für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen zugeschrieben. Zählen ist neben der Simultanerfassung, dem Schätzen und der Eins-zu-Eins-Zuordnung eine Möglichkeit, um den kardinalen Wert einer Menge zu bestimmen oder zwei Mengen zu vergleichen und wird zumeist dann genutzt, wenn eine genaue Quantifizierung von Elementen vorgenommen werden soll. Eine Voraussetzung für das Zählen ist die Kenntnis der Zahlwortreihe und darüber hinaus das Beherrschen einiger grundlegender Anwendungsprinzipien.

Auch wenn es für Erwachsene einfach erscheint, stellt das Erlernen des Zählens doch einen komplexen Prozess dar, der sich über mehrere Jahre hinzieht (Butterworth, 2005, S. 7) und bei dem verschiedene Regeln verinnerlicht werden müssen. Breit diskutiert wird immer wieder die Frage, ob sich die Zählfertigkeiten auf der Grundlage von angeborenen Zählprinzipien entwickeln (*principles-before-Theorien*) oder ob sie erlernt sind, sich also durch Erfahrung im Handlungsrepertoire der Kinder verfestigen (*principles-after-Theorien*) (ausführliche Darstellung der Diskussion in Moser Opitz, 2008, S. 63 ff.).

Gelman und Gallistel (1978) haben fünf Zählprinzipien formuliert, die den *principles-before-Theorien* zugeordnet werden. Die Autoren gehen davon aus, dass diese Prinzipien nicht erst erlernt werden müssen, sondern als implizites Wissen von Geburt an zur Verfügung stehen und so den Erwerb des verbalen Zählens steuern und strukturieren (Gelman & Gallistel, 1978, S. 77, 208). „We come to the world of learning with a number-relevant mental structure that is comprised of skeletal principles for counting, for generating cardinal values, and for adding and subtracting the resulting cardinalities“ (Gelman, 2000, S. 27). Die ersten drei Prinzipien geben an, wie richtig gezählt wird (how-to-count principles) und zwei weitere beziehen sich darauf, was gezählt wird (permissions oder what-to-count principles).

- Das *one-one principle* (Eindeutigkeitsprinzip) beinhaltet, dass beim Zählen jedem Objekt genau ein Zahlwort zugeordnet wird und umgekehrt. Einzelne Gegenstände dürfen also nicht doppelt gezählt oder ausgelassen werden. Der Zählvorgang kann durch ein Berühren oder Verschieben der bereits gezählten Objekte unterstützt werden.
- Das *stable order principle* (Prinzip der stabilen Ordnung) zielt auf die festgelegte und jederzeit wiederholbare Reihenfolge der Zahlworte. Beim Zählen kommt jede Zahl genau einmal und immer in derselben festgelegten Reihenfolge vor. Um dieses Prinzip zu erfüllen, muss die Zahlwortreihe nicht zwingend der Konvention entsprechen (Gelman & Gallistel, 1978, S. 203 ff.).
- Mit dem *cardinal principle* (Kardinalprinzip) verstehen die Kinder, dass das in der Zahlwortreihe zuletzt genannte Zahlwort nicht nur das jeweilige Element bezeichnet, sondern auch die Anzahl der Menge angibt.