Progress in Mathematics
286

Ahmed Abbes

Éléments de Géométrie Rigide

Volume I.
Construction et Étude Géométrique des Espaces Rigides

Birkhäuser

Birkhäuser

Progress in Mathematics

Volume 286

Ahmed Abbes

Éléments de Géométrie Rigide

Volume I
Construction et Étude Géométrique des Espaces Rigides

Birkhäuser

Ahmed Abbes
Université de Rennes
IRMAR
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex
France
ahmed.abbes@univ-rennes1.fr

ISBN 978-3-0348-0011-2 e-ISBN 978-3-0348-0012-9
DOI 10.1007/978-3-0348-0012-9

Mathematics Subject Classification (2010): 14G22

Cover design: deblik, Berlin

Printed on acid-free paper

Springer Basel AG is part of Springer Science+Business Media

www.birkhauser-science.com

A MES PARENTS

Je ne publie qu'un volume, Du côté de chez Swann, *d'un roman qui aura pour titre général* À la recherche du temps perdu. *J'aurais voulu publier le tout ensemble ; mais on n'édite plus d'ouvrage en plusieurs volumes. Je suis comme quelqu'un qui a une tapisserie trop grande pour les appartements actuels et qui a été obligé de la couper.*

De jeunes écrivains, avec qui je suis d'ailleurs en sympathie, préconisent au contraire une action brève avec peu de personnages. Ce n'est pas ma conception du roman. Comment vous dire cela ? Vous savez qu'il y a une géométrie plane et une géométrie dans l'espace. Eh bien, pour moi, le roman ce n'est pas seulement de la psychologie plane, mais de la psychologie dans le temps. Cette substance invisible du temps, j'ai tâché de l'isoler, mais pour cela il fallait que l'expérience pût durer. J'espère qu'à la fin de mon livre, tel petit fait social sans importance, tel mariage entre deux personnes qui dans le premier volume appartiennent à des mondes bien différents, indiquera que du temps a passé et prendra cette beauté de certains plombs patinés de Versailles, que le temps a engainés dans un fourreau d'émeraude.

Marcel Proust
Le Temps du 12 novembre 1913

Table des matières

Préface par Michel Raynaud

En 1961, John Tate pose les bases d'une géométrie analytique globale sur un corps valué non archimédien. Par opposition à la géométrie analytique "molle" (wobbly spaces), il va l'appeler *géométrie analytique rigide.*

Tate se place sur un corps valué K, corps des fractions d'un anneau de valuation complet R, de hauteur 1. Soient Γ le groupe de la valuation de K et k le corps résiduel de R. On note $K\langle \underline{T} \rangle$ l'algèbre de Banach noethérienne des séries entières convergentes sur un polydisque unité fermé. Les pièces élémentaires, qui vont constituer ces espaces rigides, sont les affinoïdes. Ils sont définis par leur algèbre A de fonctions holomorphes, algèbre de Banach quotient de l'algèbre $K\langle \underline{T} \rangle$ et par leur ensemble de points qui est le spectre maximal de A. La nouveauté consiste à introduire certains recouvrements ouverts *admissibles* de ces affinoïdes qui se chevauchent suffisamment pour que leurs espaces de fonctions holomorphes se recollent. Le prototype de tels recouvrements consiste à prendre une fonction holomorphe f sur un affinoïde X, un élément γ de Γ et à recouvrir X par les deux ouverts affinoïdes où f prend des valuations $\geq \gamma$ et $\leq \gamma$. Plus généralement, Tate étudie les recouvrements d'un affinoïde par des ouverts affinoïdes spéciaux et montre qu'ils sont acycliques. Il faut toute l'autorité de Serre et la complicité de l'IHÉS pour que le texte de Tate soit disponible dès 1962. Plus tard (en 1971), viendra une publication en bonne et due forme dans Inventiones [43].

La théorie de Tate est reprise et complétée par R. Kiehl en 1967 dans [34, 35]. Kiehl présente les recouvrements qui donnent lieu à recollement dans le cadre d'une topologie de Grothendieck (comme celui-ci l'avait d'ailleurs suggéré à Tate), obtient les énoncés de recollement et de nullité de la cohomologie pour les faisceaux cohérents sur les affinoïdes, introduit les espaces rigides propres et prouve les énoncés de finitude de la cohomologie afférents.

Les premières applications de la géométrie rigide mettent en jeu des revêtements analytiques de degré infini. C'est d'abord la réalisation de la courbe elliptique dite de Tate, comme quotient du groupe multiplicatif par un réseau, qui a été une profonde motivation pour le fondement de la théorie. Ce résultat est étendu par Mumford en genre supérieur : une courbe propre et lisse sur K, qui admet sur R une réduction semi-stable ayant une fibre spéciale à composantes irréductibles rationnelles, possède une uniformisation « à la Schottky » : elle est le quotient par un groupe libre de type fini, d'un ouvert rigide de la droite projective sur K.

A partir des années 70, la géométrie analytique rigide va s'égailler, de façon un peu anarchique, dans des directions variées que nous allons rapidement évoquer.

Géométrie rigide et géométrie formelle. A un R-schéma formel $\mathfrak{X}$ localement de présentation finie, on associe un K-espace rigide X, sa "fibre générique" : un ouvert affine formel de $\mathfrak{X}$ de R-algèbre $\mathscr{A}$ correspond à l'ouvert affinoïde de X, de K-algèbre $A = \mathscr{A} \otimes_R K$. Pour X, le schéma formel $\mathfrak{X}$ joue alors le rôle d'un modèle R-entier et on dispose d'une spécialisation de X vers la fibre résiduelle $\underline{\mathfrak{X}}$ de $\mathfrak{X}$. Réciproquement, si l'on part d'un K-espace rigide X, séparé de type fini, il est la fibre générique d'un R-schéma formel de présentation finie $\mathfrak{X}$. De plus, deux modèles entiers de X sont comparables par éclatement formel *permis*, c'est-à-dire de centre dans la fibre fermée. Vue ainsi, la géométrie rigide apparaît comme étroitement liée à la géométrie formelle et il existe souvent des modèles entiers naturels, comme dans la théorie de Mumford-Schottky. Ce point de vue est esquissé en 74 dans [41]. Un rôle clé est joué par une technique de platification par éclatement dont la version algébrique est présentée dans [42]. La version formelle paraît quelques années plus tard (Mehlmann [39], Bosch, Lütkebohmert [9]). Partant d'un morphisme $u\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ entre R-schémas formels de type fini, qui est plat sur les fibres génériques, on peut modifier les modèles entiers par éclatement permis de façon à obtenir un morphisme plat entre modèles formels $u'\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{X}'$.

Le point de vue de Berkovich. Celui-ci considère pour tout n-uple de nombres réels > 0 $r = (r_1, \dots, r_n)$, l'algèbre de Banach noethérienne $K\langle r^{-1}\underline{T}\rangle$ des séries convergentes dans le polydisque fermé $|T_i| \leq r_i$ et les affinoïdes ont encore pour algèbre de fonctions holomorphes les algèbres de Banach A, quotient de $K\langle r^{-1}\underline{T}\rangle$. Mais, au lieu de se limiter aux points à valeurs dans les extensions finies de K, Berkovich évalue les éléments de A dans des corps valués L, complets pour une valeur absolue réelle arbitraire qui prolonge celle de K. La topologie des réels retrouve sa place : l'espace des points d'un affinoïde, muni de la topologie produit, est compact et localement connexe par arcs. Durant les années 90, Berkovich développe la cohomologie étale des espaces rigides et celle des cycles évanescents sur les schémas formels, pour des coefficients ℓ-adiques, où ℓ est un nombre premier distinct de la caractéristique de k [2, 3, 4].

L'approche de Fujiwara. On part du point de vue des R-schémas formels, à éclatements permis près. Considérons un K-espace rigide de type fini, séparé X. Ses modèles entiers $\mathfrak{X}$ forment un système projectif filtrant de R-schémas formels qui, par passage à la limite, donnent un espace annelé quasi-compact. Cette construction, qui rappelle celle de la voûte étoilée (Riemann space) introduite en géométrie algébrique par Zariski, conduit à des "modèles entiers limites" lointains mais canoniques. La platitude, après éclatement permis, devient une platitude au niveau des modèles limites. Cette présentation est esquissée dans [20] et devrait être développée dans un ouvrage à venir.

Ainsi, depuis sa naissance, la géométrie rigide a oscillé entre le point de vue des K-séries convergentes qui l'apparente à la géométrie analytique complexe et celui des R-modèles entiers formels qui la relie à la géométrie algébrique sur k.

Le but de ce livre est de présenter les fondements d'une géométrie rigide-formelle relative. Le point de vue adopté est celui des schémas formels à éclatements permis près, mais est abordé dans une situation relative. Les tentatives faites jusqu'à présent (confer [8]) devaient distinguer deux cas : la base $\mathscr{S}$ était soit un schéma formel noethérien, soit un R-schéma formel localement de présentation finie. Trouver une approche uniforme qui englobe ces deux cas particuliers, requiert de dégager une classe d'anneaux topologiques, qui satisfont à certaines propriétés de cohérence et ont un bon comportement vis-à-vis de la platitude, par complétion.

Michel Raynaud
mars 2009

Avant-propos

Il n'est guère possible d'aborder la lecture de ce traité sans avoir une bonne connaissance des oeuvres suivantes d'A. Grothendieck :

a) Éléments de Géométrie Algébrique [28, 29, 30, 31] ;
b) Séminaires de Géométrie Algébrique 1 et 4 [26, 1].

Le lecteur prendra garde que nos références à EGA I [28] se rapportent à la seconde édition (Springer-Verlag, 1971).

Nous suivons d'une manière générale la terminologie introduite par Grothendieck dans les traités mentionnés ci-dessus. Nous nous en écartons à de rares exceptions près, bien mentionnées dans le texte, afin de mettre l'accent sur les concepts fondamentaux pour ce traité. Ainsi, nous renforçons la définition d'anneau *adique* et les notions géométriques qui en découlent.

Suivant les conventions de ([1] VI), nous utilisons l'adjectif *cohérent* comme synonyme de quasi-compact et quasi-séparé.

Introduction

1. La géométrie rigide est devenue, au fil des ans, un outil indispensable dans un grand nombre de questions en géométrie arithmétique. Depuis ses premières fondations, posées par J. Tate en 1961, la théorie s'est développée dans des directions variées. Il est hors de notre propos de présenter ici ces diverses approches. Ce traité se concentrera donc sur celle de M. Raynaud, esquissée en 1974 dans [41], que nous exposerons dans une situation relative et d'une façon systématique. Il y a plusieurs raisons à ce choix. D'une part, plusieurs applications importantes de la géométrie rigide passent par les schémas formels et utilisent, si ce n'est explicitement, du moins implicitement, l'approche de M. Raynaud. D'autre part, de par son essence même, cette approche est particulièrement bien adaptée aux questions de nature algébrique et semble tout à fait incontournable pour les problèmes de platitude.

2. Ce traité sera constitué de deux volumes. Ce premier volume est consacré à la construction des espaces rigides et à l'étude de leurs propriétés géométriques. On trouvera plus loin un résumé détaillé de son contenu. Plusieurs aspects de la théorie de Raynaud ont été développés par Mehlmann dans sa thèse [39] et dans une série d'articles par Lütkebohmert [38], Bosch et Lütkebohmert [8, 9] et Bosch, Lütkebohmert et Raynaud [10, 11]. Mais le besoin de consolider et compléter les fondations s'est fait sentir en particulier pour développer la théorie associée de la cohomologie étale, qui fera l'objet du second volume. Le plan prévu pour ce dernier est le suivant. Nous établirons d'abord des énoncés de comparaison du type GAGA entre la topologie algébrique-étale et la topologie rigide-étale, dont le plus important est du à Gabber et Fujiwara [19]. Celui-ci nous permettra de ramener certaines propriétés du topos rigide-étale à leurs analogues algébriques. Nous démontrerons ensuite les principales propriétés de la cohomologie rigide-étale suivant le plan général de SGA 4 [1] (faisceaux constructibles, théorème de changement de base propre, théorème de changement de base lisse, dimension cohomologique, cohomologie à support compact, dualité de Poincaré...). Nous donnerons enfin quelques applications à la cohomologie étale des schémas comme le théorème d'acyclicité locale des morphismes réguliers ([1] XIX 4.1).

3. Dans la théorie de Raynaud, les espaces rigides sont les "fibres génériques" des schémas formels. Avant de préciser cette notion, il nous faut fixer ses limites, c'est à dire les conditions de finitude requises sur les schémas formels. Initialement, la théorie présentait à ce niveau une dichotomie : on pouvait considérer soit des schémas formels de présentation finie sur un anneau de valuation complet de hauteur 1, soit des schémas formels noethériens. Si le premier cas permet de retrouver la théorie originelle de Tate, le second introduit de nouveaux espaces rigides et donne à cette approche l'un de ses points forts. Nous unifions ces deux cas en introduisant une nouvelle classe d'anneaux topologiques que nous qualifions d'*idylliques*. La première propriété importante de ces anneaux, à la base de beaucoup d'autres, est la propriété d'*Artin-Rees* (1.8.25). Nous la déduisons dans le cas non noethérien d'un résultat de Raynaud-Gruson (1.9.18). La seconde propriété importante est due à Gabber et n'était pas connue en général dans [8, 9, 39] : si A est un anneau idyllique et B est une A-algèbre de type fini, le séparé complété de B pour la topologie déduite de celle de A est B-plat (1.12.17). On dit qu'un schéma formel affine est *globalement idyllique* s'il est de la forme $\mathrm{Spf}(A)$, où A est un anneau idyllique, et qu'un schéma formel est *idyllique* s'il est adique[1] et si tout point admet un voisinage ouvert formel affine globalement idyllique. Nous étendons à ces objets certains résultats de Grothendieck initialement établis pour les schémas formels noethériens [28, 30], entre autres ceux qui portent sur les faisceaux cohérents (2.7.2 et 2.8.5) et leurs cohomologies (théorème de finitude (2.11.5), comparaison de la théorie "algébrique" à la théorie "formelle" (2.12.2)...).

4. Pour définir la "fibre générique" d'un schéma formel idyllique, nous avons besoin de sortir du cadre des schémas formels (et même des espaces annelés). Le sens que nous donnons à cette notion est celui des catégories quotients. Il est naturel d'inverser dans la catégorie des schémas formels idylliques les *éclatements admissibles*, c'est à dire de centre un idéal ouvert de type fini (appelés aussi éclatements permis dans la préface). Raynaud [41] a montré que cette opération suffit pour retrouver la théorie de Tate au-dessus d'un anneau de valuation complet de hauteur 1. Nous l'utiliserons donc comme définition générale. Mais avant d'introduire la bonne catégorie quotient, nous étudions certains objets et propriétés *rigides* relatifs aux schémas formels idylliques, c'est à dire des objets et propriétés stables par éclatements admissibles. Nous donnons ici deux exemples :

(i) On appelle *ordre* 1-*valuatif* un anneau idyllique, local, intègre, de dimension 1 et dont la topologie n'est pas discrète. Un *point rigide* (resp. un *point rigide fermé*) d'un schéma formel idyllique est un sous-schéma (resp. un sous-schéma fermé) affine dont l'anneau est un ordre 1-valuatif. L'ensemble des points rigides d'un schéma formel idyllique $\mathfrak{X}$ est noté $\langle\mathfrak{X}\rangle$. Si A est un anneau idyllique et J est un idéal de définition de A, alors l'ensemble des points rigides fermés de $\mathrm{Spf}(A)$ est en bijection avec l'ensemble des points fermés de $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$ (3.3.2). Tout morphisme localement de type fini de schémas formels idylliques $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ induit une application que l'on note encore

---

[1] On prendra garde que notre notion de schéma formel adique est plus forte que celle de [28].

$f\colon \langle\mathfrak{X}\rangle \to \langle\mathfrak{Y}\rangle$. Nous montrons que si $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est un éclatement admissible, alors l'application $f\colon \langle\mathfrak{X}\rangle \to \langle\mathfrak{Y}\rangle$ est bijective (3.3.8).

(ii) Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. On appelle *clôture rigide* de $\mathscr{F}$, et l'on note $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ (cf. [31] 5.9), le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) = \varinjlim_{n} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F}).$$

Cette définition ne dépend pas de l'idéal de définition $\mathscr{J}$. Si $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ est un morphisme adique de schémas formels idylliques, on a un morphisme canonique fonctoriel

$$\beta_f(\mathscr{F})\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \to f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*\mathscr{F})).$$

Nous montrons que si $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ est un éclatement admissible de présentation finie et $\mathscr{F}$ est cohérent, alors $\beta_f(\mathscr{F})$ est un isomorphisme (3.5.5). C'est une version formelle du théorème d'*acyclicité de Tate* (cf. 3.5.7 et 4.7.9).

5. On désigne par **S** la catégorie dont les objets sont les schémas formels idylliques quasi-compacts et les morphismes sont les morphismes localement de présentation finie, et par **B** l'ensemble des éclatements admissibles de **S**. On définit la catégorie des *espaces rigides cohérents*, baptisée catégorie de Raynaud et notée **R**, comme la catégorie localisée de **S** par rapport à **B**. On note $\mathbf{S} \to \mathbf{R}$, $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ le foncteur de localisation. Nous illustrons cette construction par des exemples classiques de disques et couronnes fermés relatifs (cf. 4.1.9 et 4.3.11). On appelle *point rigide* de **R** l'image canonique du spectre formel d'un ordre 1-valuatif. Cette notion correspond aux points de la théorie de Tate. Certaines propriétés des morphismes de **S** passent au quotient. Ainsi, on dit qu'un morphisme de **R** est une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée, resp. fini, resp. propre) s'il admet un modèle formel vérifiant la propriété analogue dans **S**.

6. La nouveauté par rapport à [8, 9] consiste à développer l'aspect topologique des espaces rigides cohérents. Pour ce faire, nous généralisons la notion de *recouvrement admissible* de Tate : une famille $(X_i \to X)_{i\in I}$ d'immersions ouvertes de **R** est un recouvrement admissible si elle admet une sous famille *finie* couvrante pour les points rigides, c'est à dire, s'il existe une partie finie J de I telle que tout point rigide P au-dessus de X majore un point rigide P_j au-dessus de l'un des X_j, $j \in J$ (*i.e.*, $\mathrm{Hom}_X(P_j, P) \neq \emptyset$). La topologie de **R** engendrée par les recouvrements admissibles est appelée topologie admissible. Elle donne naissance au *gros topos admissible*, noté $\widetilde{\mathbf{R}}$, que nous utiliserons pour définir les espaces rigides quasi-séparés (mais pas nécessairement quasi-compacts). Il est commode d'associer à tout espace rigide cohérent X la sous-catégorie $\mathbf{Ad}_{/X}$ de $\mathbf{R}_{/X}$ formée des immersions ouvertes $U \to X$. Nous la munirons de la topologie induite par la topologie admissible de **R**, appelée encore topologie admissible de X. Le topos

X_{ad} des faisceaux d'ensembles sur $\mathbf{Ad}_{/X}$ est le *topos admissible* de X. Tout morphisme $f\colon X \to Y$ de $\mathbf{R}$ induit par changement de base un morphisme de topos admissibles que l'on note encore $f\colon X_{\mathrm{ad}} \to Y_{\mathrm{ad}}$.

7. Soit $\mathfrak{X}$ un objet de $\mathbf{S}$. Notons $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{S}_{/\mathfrak{X}}$ formée des éclatements admissibles ; c'est une catégorie cofiltrante. Nous démontrons dans 4.5.12 que le topos $\mathfrak{X}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rig}}$ est canoniquement équivalent à la limite projective du topos fibré

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}_{\mathfrak{X}},$$

obtenu en associant à tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ le topos de Zariski $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ et à tout morphisme $f\colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ le foncteur $f^*\colon \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{X}''_{\mathrm{zar}}$ image inverse par le morphisme de topos déduit de f (cf. [1] VI 8.1.1). Ce théorème ramène l'étude du topos $\mathfrak{X}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rig}}$ à celle des topos bien connus $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$, $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$. Grâce aux résultats généraux de ([1] VI §8), nous en déduisons quelques corollaires importants :

(a) Le topos $\mathfrak{X}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rig}}$ a mêmes points que la voûte étoilée de $\mathfrak{X}$ (ou l'espace de Zariski-Riemann), c'est à dire, la limite projective d'espaces topologiques

$$\varprojlim_{(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}} |\mathfrak{X}'|,$$

où $|\mathfrak{X}'|$ désigne l'espace topologique sous-jacent au schéma formel $\mathfrak{X}'$ (4.5.15). Tout point rigide de $\mathfrak{X}$ définit un point de la voûte étoilée, mais cette application est loin d'être surjective en général.

(b) La catégorie $\mathfrak{X}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rig}}$ est canoniquement équivalente à la catégorie des sections cartésiennes de la catégorie fibrée

$$\mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}^{\circ},$$

obtenue en associant à tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ le topos de Zariski $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ et à tout morphisme $f\colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ le foncteur $f_*\colon \mathfrak{X}''_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ image directe par le morphisme de topos déduit de f (4.5.22). La donnée d'une section de $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}^{\circ}$ équivaut à la donnée pour tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ d'un faisceau F_φ de $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ et pour tout morphisme $f\colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ d'un morphisme $\gamma_f(F)\colon F_\varphi \to f_*(F_\psi)$, ces morphismes étant soumis à des relations de compatibilité. Une telle section est notée $\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto F_\varphi\}$. Les sections cartésiennes sont caractérisées par la propriété que les morphismes $\gamma_f(F)$ sont des isomorphismes.

(c) Nous associons fonctoriellement à tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$ une section $\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})\}$ de $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}^{\circ}$. Le théorème d'acyclicité de Tate implique que cette section est cartésienne lorsque $\mathscr{F}$ est cohérent. Elle définit donc un faisceau $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ de $\mathfrak{X}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rig}}$, appelé *fibre rigide* de $\mathscr{F}$. En fait, nous définirons le faisceau $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$ (pas nécessairement cohérent) (cf. 4.7.4). Le faisceau $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})^{\mathrm{rig}}$ est un anneau ; on le note aussi $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$. La correspondance $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ est un foncteur de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules dans celle des

$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-modules. Nous étudions les principales propriétés de ce foncteur sur la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents. Nous associons à tout morphisme adique $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ entre objets de $\mathbf{S}$ (en particulier, à tout morphisme de $\mathbf{S}$) un morphisme de topos annelés $\underline{f}\colon (\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \to (\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}})$ (cf. 4.7.20). Si f est un morphisme de $\mathbf{S}$, le morphisme de topos sous-jacent à $\underline{f}$ est le morphisme f^{rig}.

(d) Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme propre de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Pour tout $q \geq 0$, le $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module $\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F}$ est cohérent, et on a un morphisme fonctoriel

$$\kappa^q\colon (\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \to \mathrm{R}^q \underline{f}_*(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}).$$

Nous montrons que κ^0 est un isomorphisme ; si de plus, $\mathfrak{Y}$ admet localement un idéal de définition monogène, alors κ^q est un isomorphisme pour tout $q \geq 0$ (4.7.36). On notera que la condition supplémentaire pour $q \geq 1$ est suffisante pour les applications rigides puisqu'il est loisible d'éclater un idéal de définition cohérent.

8. Nous associons à tout objet X de $\mathbf{R}$ un anneau $\mathscr{O}_X$ de X_{ad} et à tout morphisme $f\colon X \to Y$ de $\mathbf{R}$ un homomorphisme $\theta_f\colon \mathscr{O}_Y \to f_*(\mathscr{O}_X)$ vérifiant des relations de compatibilité, tels que pour tout objet $\mathfrak{X}$ de $\mathbf{S}$, $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ soit l'anneau défini dans la section précédente et pour tout morphisme $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de $\mathbf{S}$, $\theta_{f^{\mathrm{rig}}}$ soit l'homomorphisme déduit de $\underline{f}$. On note encore $f\colon (X_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_X) \to (Y_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_Y)$ le morphisme de topos annelés déduit de f et θ_f. Nous montrons les résultats suivants :

(i) Si X est un espace rigide cohérent, alors le topos $(X_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_X)$ est localement annelé (4.8.6). De plus, les fibres de $\mathscr{O}_X$ en les points rigides de X sont des anneaux locaux noethériens (4.8.10). Cette dernière propriété nous permet de définir la dimension d'un $\mathscr{O}_X$-module de type fini.

(ii) Soit $\mathfrak{X}$ un objet de $\mathbf{S}$. Pour qu'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-module soit cohérent, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ pour un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$ (4.8.18). En particulier, pour tout espace rigide cohérent X, l'anneau $\mathscr{O}_X$ est cohérent.

(iii) Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme propre d'espaces rigides cohérents, F un $\mathscr{O}_X$-module cohérent. Alors pour tout entier $q \geq 0$, $\mathrm{R}^q f_*F$ est un $\mathscr{O}_Y$-module cohérent (4.8.22).

(iv) On appelle *affinoïde* un espace rigide cohérent qui admet un modèle formel affine globalement idyllique et ayant localement un idéal de définition monogène. Nous montrons que si X est un affinoïde et F est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent, alors F est engendré par ses sections globales et $\mathrm{H}^q(X_{\mathrm{ad}}, F) = 0$ pour tout $q \geq 1$ (4.8.26).

9. Nous présentons des versions formelles idylliques de certains résultats de platitude de Raynaud-Gruson, initialement établis dans le cadre algébrique [42]. La plupart de ces énoncés sont parus dans [9] dans le cas général[2] et dans [39] pour

---

[2] On prendra garde cependant que le traitement de [9] est légèrement incomplet.

les schémas formels de présentation finie au-dessus d'un anneau de valuation de hauteur 1.

Nous étudions en premier lieu les modules cohérents plats sur les schémas formels idylliques. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $x \in \mathfrak{X}$, $s = f(x)$. Nous introduisons la notion de $\mathscr{S}$-dévissage de $\mathscr{F}$ en x, qui permet de raisonner par récurrence sur la dimension relative $\dim_x(\mathscr{F}/\mathscr{S})$. Quitte à remplacer $(\mathfrak{X}, x)$ et $(\mathscr{S}, s)$ par des voisinages étales élémentaires, on peut toujours construire de tels dévissages. Nous donnons un critère important pour que $\mathscr{F}$ soit $\mathscr{S}$-plat en x en termes de dévissages relatifs (5.3.6). Nous en déduisons de nombreux corollaires, entre autres le fait que l'ensemble des points x de $\mathfrak{X}$ tels que $\mathscr{F}$ soit $\mathscr{S}$-plat en x est ouvert (5.3.10).

Il y a deux façons d'introduire les modules plats sur les espaces rigides cohérents. La façon la plus directe mais la moins explicite est la définition générale de la platitude pour les topos annelés. Nous présentons aussi une autre notion plus *ad hoc*, celle des modules cohérents rig-plats sur les schémas formels idylliques. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de type fini entre schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{P}$ un point rigide de $\mathfrak{X}$. Supposons d'abord que $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ et $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$ soient formels affines globalement idylliques, que $\mathscr{P}$ soit fermé dans $\mathfrak{X}$ et que $f(\mathscr{P})$ soit fermé dans $\mathscr{S}$. Soit K un idéal de définition de B. On a $\mathscr{F} = M^{\Delta}$, où M est un B-module cohérent, et $\mathscr{P}$ correspond à un point fermé $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(K)$. On dit que $\mathscr{F}$ est *rig-f-plat* en $\mathscr{P}$ si $M_{\mathfrak{p}}$ est A-plat. Cette notion se localise bien (c'est pour cela que l'on suppose $f(\mathscr{P})$ fermé dans $\mathscr{S}$). Par suite, on peut la globaliser. On dit que $\mathscr{F}$ est *rig-f-plat* s'il est rig-f-plat en tout point rigide de $\mathfrak{X}$. Nous montrons que si f est un morphisme de $\mathbf{S}$, pour que $\mathscr{F}$ soit rig-f-plat, il faut et il suffit que $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ soit f^{rig}-plat dans le sens des topos annelés (5.5.8).

Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent rig-$f$-plat. Nous montrons qu'il existe un éclatement admissible de présentation finie $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ tel que le transformé strict de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ soit $\mathscr{S}'$-plat (5.8.1). Comme corollaire, nous en déduisons que la platitude pour les modules cohérents sur les espaces rigides cohérents est stable par changement de base (5.8.9).

Nous étudions aussi les modules cohérents fidèlement plats sur les espaces rigides cohérents. Nous établissons des énoncés de descente fidèlement plate pour les modules cohérents sur les espaces rigides cohérents (5.11.11) et pour les morphismes d'espaces rigides cohérents (5.12.4), dus essentiellement à Gabber, Bosch et Görtz [6].

10. Nous développons les propriétés différentielles des espaces rigides cohérents. Nous introduisons d'abord les invariants normaux d'une immersion et les invariants différentiels fondamentaux d'un morphisme. Nous définissons ensuite les morphismes lisses, non ramifiés et étales par les critères infinitésimaux, et nous étudions leurs principales propriétés. Nous donnons enfin quelques critères de lissité, entre autres le *critère jacobien* (6.4.21).

11. La dernière partie de ce volume est consacrée aux espaces rigides quasi-séparés (mais pas nécessairement quasi-compacts). La notion de recouvrement admissible s'étend naturellement aux préfaisceaux sur $\mathbf{R}$. On appelle *espace rigide quasi-séparé* un faisceau du gros topos admissible $\widetilde{\mathbf{R}}$ qui admet un recouvrement admissible par des objets de $\mathbf{R}$. Nous donnons une caractérisation simple de ces espaces (7.1.12) qui permet de retrouver des exemples classiques, comme le disque unité ouvert relatif (7.1.20). Nous étudions ensuite leurs propriétés géométriques, puis leurs structures héritées des espaces rigides cohérents (site et topos admissibles, structure annelée...).

12. Soient S un schéma cohérent, T un sous-schéma fermé, U l'ouvert $S - T$ de S. Supposons la paire (S, T) idyllique (*i.e.*, soit S est noethérien, soit S est localement de présentation fini au-dessus d'un anneau idyllique A et l'idéal de T dans S est l'image réciproque d'un idéal de définition de type fini de A). Notons $\mathscr{S} = S_{/T}$ le schéma formel complété de S le long de T, qui est alors un objet de $\mathbf{S}$, et posons $\Theta = \mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$. Nous associons fonctoriellement à tout U-schéma de type fini V un préfaisceau $\mathfrak{A}(V)$ sur la catégorie $\mathbf{R}_{/\Theta}$. Nous montrons que si V est séparé de type fini sur U, alors $\mathfrak{A}(V)$ est un Θ-espace rigide quasi-séparé (7.4.11) ; on le note V^{an}. Le foncteur $V \mapsto V^{\mathrm{an}}$ ainsi défini est appelé *foncteur GAGA* relatif à (S, T). Nous l'étudions et montrons qu'il préserve certaines propriétés des morphismes (*e.g.*, être propre, fini, lisse, étale, une immersion, une immersion ouverte, une immersion fermée).

Soit V un U-schéma séparé de type fini. Le foncteur GAGA induit un morphisme de topos annelés

$$\Phi_V \colon (V^{\mathrm{an}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{V^{\mathrm{an}}}) \to (V_{\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_V).$$

Nous montrons qu'il est plat (7.6.8). Si F est un $\mathscr{O}_V$-module, on pose $F^{\mathrm{an}} = \Phi_V^*(F)$ (l'image réciproque étant prise au sens des modules). Soient $f \colon V' \to V$ un morphisme séparé de type fini, F' un $\mathscr{O}_{V'}$-module. On a pour tout $q \geq 0$, un morphisme de changement de base (ou de comparaison)

$$\mathsf{c}^q \colon (\mathrm{R}^q f_* F')^{\mathrm{an}} \to \mathrm{R}^q f^{\mathrm{an}}_* (F'^{\mathrm{an}}).$$

Nous montrons que si f est propre et F' est cohérent, alors c^q est un isomorphisme pour tout $q \geq 0$ (7.6.11).

Remerciements. Voila des années que j'ai été séduit par l'approche de la géométrie rigide proposée par Michel Raynaud. Ce livre, qu'il me fait l'honneur de préfacer, en est l'illustration. Je l'ai conçu comme un témoignage de reconnaissance et d'admiration. Ce travail a germé durant ma longue collaboration avec Takeshi Saito sur la théorie de la ramification. Il n'aurait peut-être pas vu le jour sans son soutien et ses encouragements. Je suis heureux de lui exprimer ici ma reconnaissance et ma sincère amitié. L'influence de Siegfried Bosch, Ofer Gabber et Werner Lütkebohmert sur ce traité est évidente. Je leurs exprime mes vifs remerciements. Je remercie également Pierre Berthelot, Jean-François Dat, Michel Gros, Luc Illusie et Farid Mokrane pour leurs conseils et encouragements. Ce projet a bénéficié de l'hospitalité de l'Université de Tokyo durant de nombreux séjours entre 2004 et 2008 et de l'Université de Bielefeld ainsi que de l'Université de Padoue en 2006. Je remercie les auditeurs d'un cours que j'ai donné sur ce sujet à l'Université de Tokyo durant le printemps 2008 et dont les questions et remarques ont été précieuses pour mettre au point ce travail.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre contient des rappels et compléments d'algèbre commutative, de géométrie algébrique et de topologie. Nous introduisons les anneaux *idylliques* et nous établissons leurs principales propriétés. Certains compléments de géométrie algébrique ne serviront qu'au second volume. C'est le cas du théorème 1.13.21, dû à Gabber, qui donne un complément au résultat de platification par éclatement admissible de Raynaud-Gruson ([42] 5.2.2), et de la section 1.16 qui généralise au cadre idyllique des résultats d'algébrisation d'Elkik [17].

> *Tous les anneaux considérés dans ce traité possèdent un élément unité; les homomorphismes d'anneaux sont toujours supposés transformer l'élément unité en l'élément unité; un sous-anneau d'un anneau A est supposé contenir l'élément unité de A. Nous considérons surtout des anneaux commutatifs, et lorsque nous parlons d'anneau sans préciser, il est sous-entendu qu'il s'agit d'un anneau commutatif; en particulier, il est sous-entendu, lorsque nous parlons d'un topos annelé (E, A) sans préciser, que A est commutatif.*

1.1 Des catégories et des topos

1.1.1. Pour une catégorie $\mathscr{C}$, nous notons $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ l'ensemble de ses objets, $\mathscr{C}^{\circ}$ la catégorie opposée, et pour $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ (ou $\mathrm{Hom}(X, Y)$ lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté) l'ensemble des morphismes de X dans Y.

Si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux catégories, nous désignons par $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ l'ensemble des foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$, et par $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ la catégorie des foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$.

Soient $\mathscr{E}$ une catégorie, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux catégories sur $\mathscr{E}$ ([26] VI 2). Nous notons $\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ l'ensemble des $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cart}/\mathscr{E}}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ l'ensemble des foncteurs cartésiens ([26] VI 5.2). Nous désignons par $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ la catégorie des $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ et par $\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/\mathscr{E}}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ la sous-catégorie pleine formée des foncteurs cartésiens.

A. Abbes, *Éléments de Géométrie Rigide*, Progress in Mathematics 286,
DOI 10.1007/978-3-0348-0012-9_1,

1.1.2. Soient $\mathbb{U}$ un univers, **Cat** la catégorie des catégories qui se trouvent dans $\mathbb{U}$, $\mathscr{C} \to \mathscr{E}$ un morphisme de **Cat** (*i.e.*, un foncteur). Si $\mathscr{C}$ est *clivée normalisée* sur $\mathscr{E}$ ([26] VI 7.1), elle donne naissance aux objets suivants :

($\mathtt{C}_1$) une application $S \mapsto \mathscr{C}_S$ de $\mathrm{Ob}(\mathscr{E})$ dans **Cat** ;

($\mathtt{C}_2$) une application $f \mapsto f^*$ associant à toute flèche $f\colon T \to S$ de $\mathscr{E}$ un foncteur $f^*\colon \mathscr{C}_S \to \mathscr{C}_T$;

($\mathtt{C}_3$) une application $(f,g) \mapsto c_{g,f}$, associant à tout couple de flèches composables (f,g) de $\mathscr{E}$, un homomorphisme fonctoriel $c_{g,f}\colon g^*f^* \to (fg)^*$.

Ces données satisfont aux conditions suivantes :

($\mathtt{C}_4$) pour tout objet S de $\mathscr{E}$, $f = \mathrm{id}_S$ implique $f^* = \mathrm{id}_{\mathscr{C}_S}$;

($\mathtt{C}_5$) pour tout morphisme $f\colon T \to S$ de $\mathscr{E}$, on a $c_{\mathrm{id}_T,f} = \mathrm{id}_{f^*}$ et $c_{f,\mathrm{id}_S} = \mathrm{id}_{f^*}$;

($\mathtt{C}_6$) pour tout triplet $h\colon V \to U$, $g\colon U \to T$, $f\colon T \to S$ de morphismes de $\mathscr{E}$, on a

$$c_{gh,f} \circ (c_{h,g} * f^*) = c_{h,fg} \circ (h^* * c_{g,f}). \tag{1.1.2.1}$$

Suivant ([26] VI 8), nous appelons *pseudo-foncteur* de $\mathscr{E}^\circ$ dans **Cat** un ensemble de données ($\mathtt{C}_1$), ($\mathtt{C}_2$) et ($\mathtt{C}_3$) satisfaisant aux conditions ($\mathtt{C}_4$), ($\mathtt{C}_5$) et ($\mathtt{C}_6$). On renvoie à loc. cit. pour la construction inverse qui associe à un pseudo-foncteur de $\mathscr{E}^\circ$ dans **Cat** une catégorie clivée normalisée sur $\mathscr{E}$. Les catégories fibrées sur $\mathscr{E}$ sont caractérisées par la propriété que les homomorphismes $c_{g,f}$ sont des isomorphismes.

Un $\mathscr{E}$-foncteur $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ de catégories clivées normalisées sur $\mathscr{E}$ donne naissance aux données suivantes ([26] VI 12) :

($\mathtt{F}_1$) un foncteur $F_S\colon \mathscr{C}_S \to \mathscr{D}_S$ pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$;

($\mathtt{F}_2$) un homomorphisme fonctoriel $\varphi_f\colon F_T f^*_{\mathscr{C}} \to f^*_{\mathscr{D}} F_S$ pour tout morphisme $f\colon T \to S$ de $\mathscr{E}$.

Ces données satisfont aux conditions suivantes :

($\mathtt{F}_3$) $\varphi_{\mathrm{id}_S} = \mathrm{id}_{F_S}$ pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$;

($\mathtt{F}_4$) pour deux morphismes $g\colon U \to T$ et $f\colon T \to S$ de $\mathscr{E}$, on a

$$\varphi_{fg} \circ (F_U * c^{\mathscr{C}}_{g,f}) = (c^{\mathscr{D}}_{g,f} * F_S) \circ (g^*_{\mathscr{D}} * \varphi_f) \circ (\varphi_g * f^*_{\mathscr{C}}). \tag{1.1.2.2}$$

On obtient ainsi une correspondance biunivoque entre l'ensemble des $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{D}$, et l'ensemble des données ($\mathtt{F}_1$) et ($\mathtt{F}_2$) satisfaisant aux conditions ($\mathtt{F}_3$) et ($\mathtt{F}_4$). Les foncteurs cartésiens sont caractérisés par la propriété que les homomorphismes φ_f sont des isomorphismes.

1.1.3. Soient $\mathbb{U}$ un univers, $\mathscr{C}$ une catégorie. On note **$\mathbb{U}$-Ens**, et l'on appelle catégorie des $\mathbb{U}$-ensembles, la catégorie des ensembles qui se trouvent dans $\mathbb{U}$. On désigne par $\widehat{\mathscr{C}}_{\mathbb{U}}$ la catégorie des préfaisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathscr{C}$, c'est à dire la catégorie des foncteurs contravariants sur $\mathscr{C}$ à valeurs dans **$\mathbb{U}$-Ens** ([1] I 1.2). Si $\mathscr{C}$ est munie d'une topologie ([1] II 1.1), on désigne par $\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathbb{U}}$ le topos des faisceaux de

$\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathscr{C}$ ([1] II 2.1). Lorsqu'aucune ambiguïté n'en résultera, on omettra $\mathbb{U}$ des notations $\mathbb{U}$-**Ens**, $\widehat{\mathscr{C}}_{\mathbb{U}}$ et $\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathbb{U}}$.

On dit que $\mathscr{C}$ est une $\mathbb{U}$-catégorie si pour tout couple d'objets (X, Y) de $\mathscr{C}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(X, Y)$ est isomorphe à un élément de $\mathbb{U}$ ([1] I 1.1).

Supposons que $\mathscr{C}$ soit une $\mathbb{U}$-catégorie. On a un foncteur canonique ([26, I 1.3]) :

$$\mathrm{h}_{\mathscr{C}} \colon \mathscr{C} \to \widehat{\mathscr{C}}_{\mathbb{U}}. \tag{1.1.3.1}$$

Rappelons que pour un objet X de $\mathscr{C}$, le préfaisceau $\mathrm{h}_{\mathscr{C}}(X)$ est défini comme suit. Soit $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

(a) Si $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$ est un élément de $\mathbb{U}$, alors $\mathrm{h}_{\mathscr{C}}(X)(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$.
(b) Supposons que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$ ne soit pas un élément de $\mathbb{U}$ et soit $\mathrm{R}(Z, X, Y)$ la relation : *l'ensemble Z est but d'un isomorphisme* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X) \xrightarrow{\sim} Z$. On pose alors $\mathrm{h}_{\mathscr{C}}(X)(Y) = \tau_Z \mathrm{R}(Z, X, Y)$, où τ est le symbole de Bourbaki-Hilbert.

Le foncteur $\mathrm{h}_{\mathscr{C}}$ est pleinement fidèle ([1] I 1.4).

Pour F un objet de $\widehat{\mathscr{C}}_{\mathbb{U}}$, on note $\mathscr{C}_{/F}$ la catégorie suivante ([1] I 3.4.0). Les objets de $\mathscr{C}_{/F}$ sont les couples formés d'un objet X de $\mathscr{C}$ et d'un morphisme u de X dans F. Si (X, u) et (Y, v) sont deux objets, un morphisme de (X, u) vers (Y, v) est un morphisme $g \colon X \to Y$ tel que $u = v \circ g$.

1.1.4. Rappelons que la donnée d'une topologie sur une catégorie où les produits fibrés sont représentables est complètement déterminée par la donnée de ses familles couvrantes de morphismes ([1] II 1.3.1).

1.1.5. Soient $\mathbb{U}$ un univers, $\mathscr{C}$ un $\mathbb{U}$-site ([1] II 3.0.2), $\widetilde{\mathscr{C}}$ le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathscr{C}$, X un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$. On munit $\mathscr{C}_{/X}$ de la topologie induite par la topologie de $\mathscr{C}$ au moyen du foncteur "source" $j_X \colon \mathscr{C}_{/X} \to \mathscr{C}$ ([1] III 3.1). D'après ([1] III 5.2), j_X est un foncteur continu et cocontinu. Il définit donc une suite de trois foncteurs adjoints :

$$j_{X!} \colon (\mathscr{C}_{/X})^{\sim} \to \widetilde{\mathscr{C}}, \quad j_X^* \colon \widetilde{\mathscr{C}} \to (\mathscr{C}_{/X})^{\sim}, \quad j_{X*} \colon (\mathscr{C}_{/X})^{\sim} \to \widetilde{\mathscr{C}}, \tag{1.1.5.1}$$

dans le sens que pour deux foncteurs consécutifs de la suite, celui de droite est adjoint à droite de l'autre. Le foncteur $j_{X!}$ se factorise par la catégorie $\widetilde{\mathscr{C}}_{/X^{\mathrm{a}}}$, où X^{a} est le faisceau associé à X, et le foncteur induit $(\mathscr{C}_{/X})^{\sim} \to \widetilde{\mathscr{C}}_{/X^{\mathrm{a}}}$ est une équivalence de catégories ([1] III 5.4). Le couple de foncteurs (j_X^*, j_{X*}) définit un morphisme de topos $j_X : \widetilde{\mathscr{C}}_{/X^{\mathrm{a}}} \to \widetilde{\mathscr{C}}$.

1.1.6. Soient $\mathscr{E}$ un topos, X un objet de $\mathscr{E}$. D'après 1.1.5, $\mathscr{E}_{/X}$ est un topos et on a un morphisme canonique

$$j_X \colon \mathscr{E}_{/X} \to \mathscr{E}, \tag{1.1.6.1}$$

dit *morphisme de localisation* ([1] IV 5.2). Pour tout objet F de $\mathscr{E}$, on pose $F|X = j_X^* F$.

Soient $u\colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ un morphisme de topos, $\psi\colon X' \to u^*(X)$ un morphisme de $\mathscr{E}'$. On peut alors considérer le morphisme de topos

$$u_\psi\colon \mathscr{E}'_{/X'} \quad \to \quad \mathscr{E}_{/X} \tag{1.1.6.2}$$

composé de

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}'_{/X'} \arrow[r] & \mathscr{E}'_{/u^*(X)} \arrow[r, "u_{/X}"] & \mathscr{E}_{/X}\ , \end{tikzcd}$$

où la première flèche est le morphisme de localisation associé à ψ ([1] IV 5.5) et la seconde flèche est le morphisme déduit de u par ([1] IV 5.10). Il résulte aussitôt que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}'_{/X'} \arrow[r, "u_\psi"] \arrow[d, "j_{X'}"'] & \mathscr{E}_{/X} \arrow[d, "j_X"] \\ \mathscr{E}' \arrow[r, "u"] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près.

1.1.7. Soit $\mathbb{U}$ un univers. Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ sont deux $\mathbb{U}$-topos ([1] IV 1.1), nous désignons par $\mathbf{Homtop}(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$ la catégorie des morphismes de topos de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}'$. On a alors un foncteur pleinement fidèle

$$\mathbf{Homtop}(\mathscr{E}, \mathscr{E}') \to \mathbf{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}'), \quad u \mapsto u_*.$$

Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ sont deux $\mathbb{U}$-topos fibrés sur une catégorie $\mathscr{C}$ ([1] VI 7.1), nous désignons par $\mathbf{Homtop}_{\mathscr{C}}(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$ la catégorie des morphismes de topos fibrés et par $\mathbf{Homtop}_{\mathrm{cart}/\mathscr{C}}(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$ la sous-catégorie pleine formée des morphismes m tels que m_* soit un foncteur cartésien ([1] VI 7.1.7).

1.1.8. Soient $\mathbb{U}$ un univers, $\mathscr{C}$ un $\mathbb{U}$-site, $\mathscr{E}$ le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathscr{C}$. On sait que la catégorie $\mathbb{U}$-**Ens** des $\mathbb{U}$-ensembles est un $\mathbb{U}$-topos ([1] IV 2.2). On désigne par $\mathbf{Pt}(\mathscr{E}) = \mathbf{Homtop}(\mathbb{U}\text{-}\mathbf{Ens}, \mathscr{E})$ la catégorie des points de $\mathscr{E}$ ([1] IV 6.1).

Soient p un point de $\mathscr{E}$, $\varphi_p\colon \mathscr{E} \to \mathbb{U}$-**Ens** le foncteur fibre correspondant ([1] IV 6.2). On rappelle qu'un voisinage du point p du topos $\mathscr{E}$ est un couple (X, ξ), où $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$ et $\xi \in X_p$ ([1] IV 6.8). D'après ([1] IV 6.7.2), on peut aussi interpréter ξ comme un relèvement de p en un point du topos $\mathscr{E}_{/X}$. Ces voisinages forment une catégorie cofiltrante que l'on note $\mathbf{V}(p)$ ([1] IV 6.8). On a un isomorphisme canonique fonctoriel ([1] IV 6.8.1)

$$\varphi_p(F) = F_p \simeq \varinjlim_{\mathbf{V}(p)^\circ} F(X). \tag{1.1.8.1}$$

On désigne encore, par abus de notations, par φ_p le composé $\varphi_p \circ \varepsilon$, où $\varepsilon\colon \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ est le foncteur canonique ([1] II 4.4.0). On rappelle qu'un voisinage du point p dans le site $\mathscr{C}$ est un couple (X, ξ), où $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $\xi \in \varphi_p(X)$. Ces voisinages forment encore une catégorie cofiltrante que l'on note $\mathbf{V}_{\mathscr{C}}(p)$ ([1] IV 6.8.2). On a un isomorphisme canonique fonctoriel ([1] IV 6.8.3)

$$F_p \simeq \varinjlim_{\mathbf{V}_{\mathscr{C}}(p)^\circ} F(X). \tag{1.1.8.2}$$

1.1.9. Soit $(\mathscr{E}, A)$ un topos annelé. Nous notons $\mathbf{Mod}(A)$ la catégorie des A-modules, $\mathbf{D}(A)$ sa catégorie dérivée, $\mathbf{D}^-(A)$, $\mathbf{D}^+(A)$ et $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(A)$ les sous-catégories pleines de $\mathbf{D}(A)$ formées des complexes à cohomologie bornée supérieurement, inférieurement et des deux côtés, respectivement.

1.1.10. Soit $(\mathscr{E}, A)$ un topos annelé, M un A-module. On rappelle que M est dit *plat* si le foncteur $N \mapsto N \otimes_A M$ est exact sur la catégorie des A-modules. On a alors les propositions suivantes ([1] V 1.6) :

1.1.10.1. Lorsque M est plat, pour tout point p de $\mathscr{E}$, le A_p-module M_p est plat.

1.1.10.2. Soit $(p_i)_{i \in I}$ une famille conservative de points de $\mathscr{E}$ telle que pour tout $i \in I$, M_{p_i} soit un A_{p_i}-module plat. Alors M est plat.

1.1.11. Étant donné un morphisme $u\colon (\mathscr{E}', A') \to (\mathscr{E}, A)$ de topos annelés, nous utilisons pour les modules la notation u^{-1} pour désigner l'image inverse au sens des faisceaux abéliens et nous réservons la notation u^* pour l'image inverse aux sens des modules.

1.1.12. Soient $u\colon (\mathscr{E}', A') \to (\mathscr{E}, A)$ un morphisme de topos annelés, M un A'-module.

1.1.12.1. On dit que M est *u-plat en un point p* de $\mathscr{E}'$ si M_p est un $(A_{u \circ p})$-module plat.

1.1.12.2. On dit que M est *u-plat* si le $u^{-1}(A)$-module M est plat. Il revient au même de demander que le foncteur $N \mapsto u^*(N) \otimes_{A'} M$ de la catégorie des A-modules dans la catégorie des A'-modules soit exact ([1] V 1.7).

1.1.12.3. On dit que u est *plat en un point p* de $\mathscr{E}'$ (resp. *plat*) si A' est u-plat en p (resp. u-plat).

1.1.12.4. Si M est u-plat, il est u-plat en tout point de $\mathscr{E}'$. Si $\mathscr{E}'$ a suffisamment de points, pour que M soit u-plat, il faut et il suffit qu'il soit u-plat en tout point de $\mathscr{E}'$.

1.1.12.5. Soient X un objet de $\mathscr{E}$, $\psi : X' \to u^*(X)$ un morphisme de $\mathscr{E}'$. D'après 1.1.6, on a un diagramme commutatif à isomorphisme canonique près de morphismes de topos annelés

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{E}'_{/X'}, A'|X') \arrow[r, "u_\psi"] \arrow[d, "j_{X'}"'] & (\mathscr{E}_{/X}, A|X) \arrow[d, "j_X"] \\
(\mathscr{E}', A') \arrow[r, "u"] & (\mathscr{E}, A)
\end{tikzcd}$$

où $u_\psi \colon \mathscr{E}'_{/X'} \to \mathscr{E}_{/X}$ est le morphisme de topos associé à (u, ψ) (1.1.6.2). Si M est u-plat, alors $M|X'$ est u_ψ-plat ([1] V 1.6.1).

1.2 Scholie sur le morphisme de changement de base

1.2.1. Si $f \colon (E, A) \to (F, B)$ est un morphisme de topos annelés, nous notons $\theta_f \colon B \to f_*(A)$ l'homomorphisme canonique. Suivant la convention (1.1.11), nous utilisons pour les modules la notation f^{-1} pour désigner l'image réciproque au sens des faisceaux abéliens en réservant la notation f^* pour l'image réciproque au sens des modules. Nous désignons par $\mathrm{R}^q f_*$, $q \in \mathbb{N}$, les foncteurs dérivés du foncteur $f_* \colon \mathbf{Mod}(A) \to \mathbf{Mod}(B)$ pour les modules.

1.2.2. Soit

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & E \arrow[d, "f"] \\
F' \arrow[r, "\beta"] & F
\end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de topos, commutatif à isomorphisme canonique près ; autrement dit, on a un isomorphisme

$$f_*\alpha_* \xrightarrow{\sim} \beta_* f'_*. \tag{1.2.2.1}$$

On définit un morphisme de foncteurs

$$\beta^* f_* \to f'_* \alpha^*, \tag{1.2.2.2}$$

appelé *morphisme de changement de base*, de la manière suivante : se donner un tel morphisme équivaut à se donner un morphisme

$$f_* \to \beta_* f'_* \alpha^*.$$

On prend pour ce morphisme le morphisme composé

$$f_* \to f_*\alpha_*\alpha^* \xrightarrow{\sim} \beta_* f'_* \alpha^*,$$

où le premier morphisme est induit par le morphisme d'adjonction $\mathrm{id} \to \alpha_*\alpha^*$ et le second par (1.2.2.1).

En restreignant (1.2.2.2) aux faisceaux abéliens (resp. de groupes), on déduit un morphisme pour tout $q \geq 0$ (resp. pour $q = 0, 1$)

$$\beta^*(\mathrm{R}^q f_*) \to (\mathrm{R}^q f'_*)\alpha^*. \tag{1.2.2.3}$$

En effet, cela revient à donner un morphisme

$$\mathrm{R}^q f_* \to \beta_*(\mathrm{R}^q f'_*)\alpha^*,$$

et on prend le morphisme composé

$$\mathrm{R}^q f_* \to (\mathrm{R}^q f_*)\alpha_*\alpha^* \to \mathrm{R}^q(f\alpha)_*\alpha^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^q(\beta f')_*\alpha^* \to \beta_*(\mathrm{R}^q f'_*)\alpha^*,$$

où le premier morphisme provient du morphisme d'adjonction id → $\alpha_*\alpha^*$, le deuxième et le dernier de la suite spectrale de Cartan-Leray ([1] V 5.4) et le troisième de (1.2.2.1).

1.2.3. Soit

$$\begin{tikzcd}
(E', A') \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & (E, A) \arrow[d, "f"] \\
(F', B') \arrow[r, "\beta"] & (F, B)
\end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de topos annelés, commutatif à isomorphisme canonique près ; autrement dit, on a un isomorphisme

$$f_*\alpha_* \xrightarrow{\sim} \beta_* f'_* \tag{1.2.3.1}$$

et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
f_*A \arrow[d, "f_*(\theta_\alpha)"'] & B \arrow[l, "\theta_f"'] \arrow[r, "\theta_\beta"] & \beta_*B' \arrow[d, "\beta_*(\theta_{f'})"] \\
f_*(\alpha_*A') \arrow[rr, "(1.2.3.1)", "\sim"'] & & \beta_*(f'_*A')
\end{tikzcd} \tag{1.2.3.2}$$

est commutatif. Si M est un A-module, on a, pour tout $q \geq 0$, un morphisme B'-linéaire canonique

$$\beta^*(\mathrm{R}^q f_*M) \to \mathrm{R}^q f'_*(\alpha^*M), \tag{1.2.3.3}$$

appelé *morphisme de changement de base.* En effet, cela revient à donner un morphisme

$$\mathrm{R}^q f_*M \to \beta_*(\mathrm{R}^q f'_*(\alpha^*M)),$$

et on prend le morphisme composé

$$\mathrm{R}^q f_*M \to \mathrm{R}^q f_*(\alpha_*\alpha^*M) \to \mathrm{R}^q(f\alpha)_*(\alpha^*M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^q(\beta f')_*(\alpha^*M) \to \beta_*(\mathrm{R}^q f'_*(\alpha^*M)),$$

où le premier morphisme provient du morphisme d'adjonction id → $\alpha_*\alpha^*$, le deuxième et le dernier de la suite spectrale de Cartan-Leray ([1] V 5.4) et le troisième de (1.2.3.1).

Proposition 1.2.4 ([1] XII 4.4).

(i) *Soit*

$$\begin{tikzcd}
E'' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f''"'] & E' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & E \arrow[d, "f"'] \\
F'' \arrow[r, "\beta'"] & F' \arrow[r, "\beta"] & F
\end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de topos tel que chaque carré soit commutatif à isomorphisme canonique près. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\beta\beta')^*f_* \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & f''_*(\alpha\alpha')^* \arrow[d, equal] \\
\beta'^*\beta^*f_* \arrow[r] & \beta'^*f'_*\alpha^* \arrow[r] & f''_*\alpha'^*\alpha^*
\end{tikzcd}$$

où les morphismes horizontaux proviennent des morphismes de changement de base est commutatif. De plus, le diagramme obtenu en remplaçant f_*, f'_*, f''_* *par* R^1f_*,$\mathrm{R}^1f'_*$,$\mathrm{R}^1f''_*$ *pour les faisceaux de groupes est aussi commutatif.*

(ii) *Soit*

$$\begin{tikzcd}
(E'', A'') \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f''"'] & (E', A') \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & (E, A) \arrow[d, "f"'] \\
(F'', B'') \arrow[r, "\beta'"] & (F', B') \arrow[r, "\beta"] & (F, B)
\end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de topos annelés tel que chaque carré soit commutatif à isomorphisme canonique près. Alors pour tout A-module M et tout entier $q \geq 0$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\beta\beta')^*(\mathrm{R}^qf_*M) \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & \mathrm{R}^qf''_*((\alpha\alpha')^*M) \arrow[d, equal] \\
\beta'^*(\beta^*(\mathrm{R}^qf_*M)) \arrow[r] & \beta'^*(\mathrm{R}^qf'_*(\alpha^*M)) \arrow[r] & \mathrm{R}^qf''_*(\alpha'^*(\alpha^*M))
\end{tikzcd}$$

où les morphismes horizontaux proviennent des morphismes de changement de base est commutatif.

(iii) *Soit*

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & E \arrow[d, "f"] \\
F' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g'"'] & F \arrow[d, "g"] \\
G' \arrow[r, "\gamma"] & G
\end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de topos tel que chaque carré soit commutatif à isomorphisme canonique près. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\gamma^*(gf)_* \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & (g'f')_*\alpha^* \arrow[d, equal] \\
\gamma^*g_*f_* \arrow[r] & g'_*\beta^*f_* \arrow[r] & g'_*f'_*\alpha^*
\end{tikzcd}$$