

15



Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik

Stephanie Schuler

Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen

Eine Untersuchung am Beispiel
von Spielen zum Erwerb
des Zahlbegriffs

WAXMANN

Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik

herausgegeben von

Götz Krummheuer
und Aiso Heinze

Band 15

Wissenschaftlicher Beirat

Tommy Dreyfus (Tel Aviv University, Israel)
Uwe Gellert (Freie Universität Berlin)
Gabriele Kaiser (Universität Hamburg)
Christine Knipping (Universität Bremen)
Konrad Krainer (Universität Klagenfurt, Österreich)
Kristina Reiss (Technische Universität München)
Kurt Reusser (Universität Zürich, Schweiz)
Heinz Steinbring (Universität Duisburg-Essen)

Editorial

Der Mathematikunterricht steht vor großen Herausforderungen: Neuere empirische Untersuchungen legen (erneut) Defizite und Unzulänglichkeiten offen, deren Analyse und Behebung einer umfassenden empirischen Erforschung bedürfen. Der Erfolg derartiger Bemühungen hängt in umfassender Weise davon ab, inwieweit hierbei auch mathematikdidaktische Theoriebildung stattfindet. In der Reihe „Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik“ werden dazu empirische Forschungsarbeiten veröffentlicht, die sich durch hohe Standards und internationale Anschlussfähigkeit auszeichnen. Das Spektrum umfasst sowohl grundlagen-theoretische Arbeiten, in denen empirisch begründete, theoretische Ansätze zum besseren Verstehen mathematischer Unterrichtsprozesse vorgestellt werden, als auch eher implementative Studien, in denen innovative Ideen zur Gestaltung mathematischer Lehr-Lern-Prozesse erforscht und deren theoretischen Grundlagen dargelegt werden. Alle Manuskripte müssen vor Aufnahme in die Reihe ein Begutachtungsverfahren positiv durchlaufen. Diese konsequente Begutachtung sichert den hohen Qualitätsstandard der Reihe.

Stephanie Schuler

Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen

Eine Untersuchung am Beispiel von
Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs



Waxmann 2013

Münster / New York / München / Berlin

Bibliografische Informationen der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dissertation an der Fakultät für Mathematik, Naturwissenschaften
und Technik der Pädagogischen Hochschule Freiburg, 2012

Gutachter/-in

Prof. Dr. Gerald Wittmann

Prof. Dr. Ursula Carle

Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Band 15

ISSN 1868-1441

ISBN 978-3-8309-7835-0

© Waxmann Verlag GmbH, Münster 2013

www.waxmann.com

info@waxmann.com

Umschlaggestaltung: Christian Aeverbeck, Münster

Titelbild: © Stephanie Schuler

Druck: Hubert und Co., Göttingen

Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier, säurefrei gemäß ISO 9706



Printed in Germany

Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck, auch auszugsweise, verboten.
Kein Teil dieses Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages
in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung elektronischer
Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Danke

Allen Kindern, Erzieherinnen und den Leitungen aus Kita 1 und 2

Anna Hölle

Arbeitskreis Interpretationswerkstatt der Pädagogischen Hochschule Freiburg

Birgit Gysin

Charlotte Rechtsteiner-Merz

Christian Beck

Elisabeth Rathgeb-Schnierer

Forschungskolloquium des Instituts für Mathematische Bildung Freiburg (IMBF)

Gerald Wittmann

Hochschulübergreifendes Doktorandenkolloquium (Ludwigsburg, Weingarten, Freiburg)

Ilona Wiedenhöfer

Ira Deininger

Maren Vent-Schmidt

Meiner (Groß-)Familie

Nicole Rieg

Stefanie Spörer

Sybille Schütte

Sylvia Wessolowski

Ulrich Plessner

Ursula Carle

Inhalt

0	Forschungsanliegen	11
0.1	Einführung in die Thematik.....	11
0.2	Erkenntnisinteresse und Forschungsprozess.....	17
0.3	Leitende Fragestellungen.....	19
1	Mathematische Bildungsziele im Kindergarten	23
1.1	Fachdidaktische Begründungslinie.....	23
1.2	Psychologische Begründungslinie.....	27
1.3	Vorläuferfähigkeiten, Vorläuferfertigkeiten, Basiskompetenzen.....	29
1.4	Gemeinsamer Rahmen und Bildungspläne der Länder.....	31
1.5	Erwerb und Aufbau des Zahlbegriffs im Kindesalter.....	36
1.5.1	Psychologische Ansätze.....	36
1.5.1.1	Erwerb des Zahlbegriffs nach Piaget.....	37
1.5.1.2	Neuere psychologische Ansätze.....	37
1.5.1.3	Neurowissenschaftliche Ansätze – die Repräsentation von Zahlen.....	41
1.5.2	Fachdidaktische Ergänzungen.....	42
1.5.2.1	Anzahlerfassung.....	42
1.5.2.2	Der Zahlbegriff und seine Aspekte.....	43
1.5.2.3	Zwei komplementäre Wege zu einem tragfähigen Zahlverständnis.....	45
1.6	Ergebnisse: Leitlinien und Ziele mathematischer Bildung im Kindergarten.....	46
2	Lernen und Spielen im Kindergarten	50
2.1	Lernen.....	50
2.1.1	Lerntheoretische Überlegungen.....	50
2.1.2	Lernen und Bildung.....	54
2.1.3	Lernformen im frühen Kindesalter.....	54
2.2	Spielen.....	57
2.2.1	Begriffsklärung.....	57
2.2.2	Funktionen.....	59
2.3	Spielen und Lernen.....	60
2.3.1	Theoretische Überlegungen zum Verhältnis von Spielen und Lernen.....	61
2.3.2	Ergebnisse empirischer Studien.....	63
2.4	Lernbegleitung.....	65
2.4.1	Lehrtheoretische Überlegungen.....	67
2.4.2	Die Rolle der Erzieherin im frühkindlichen Lernprozess.....	68
2.4.3	Die Qualität der pädagogischen Praxis.....	70
2.4.3.1	Prozessqualität.....	70
2.4.3.2	Qualität verbaler Interaktionen.....	72
2.5	Ergebnisse: Lernen und Lernbegleitung im Spiel.....	75
3	Materialien analysieren und bewerten	78
3.1	Aktuelle Ansätze zur frühen mathematischen Bildung.....	79
3.1.1	Lehrgänge und (Förder-)Programme.....	79
3.1.2	Integrative Ansätze.....	83

3.1.3	Punktuell einsetzbare Materialien.....	84
3.2	Kriterien zur Analyse und Bewertung von Materialien.....	87
3.2.1	Bezug des Materials zu bestimmten Arbeits- und Organisationsformen ...	88
3.2.2	Mathematisches Potenzial des Materials	88
3.2.3	Aufforderungscharakter des Materials.....	89
3.2.4	Engagiertheit in der Auseinandersetzung mit dem Material	90
3.2.5	Bezug zu anderen Bildungsbereichen.....	92
3.3	Materialanalyse am Beispiel von Spielen.....	92
3.3.1	Familienspiele	93
3.3.2	Stechen.....	96
3.3.2.1	Spielmaterial und Spielregeln	96
3.3.2.2	Analyse.....	97
3.3.3	Quips und Bohnenspiel.....	100
3.3.3.1	Spielmaterial und Spielregeln	100
3.3.3.2	Analyse.....	102
3.3.4	Max Mümmelmann.....	104
3.3.4.1	Spielmaterial und Spielregeln	104
3.3.4.2	Analyse.....	105
3.4	Ergebnisse: Kriterienkatalog zur Analyse und Bewertung von Materialien und Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs	107
4	Spielsituationen im Kindergarten erforschen	110
4.1	Grundlegende methodologische Überlegungen.....	111
4.1.1	Die induktive Forschungslogik.....	111
4.1.2	Die deduktive Forschungslogik	112
4.1.3	Die abduktive Forschungslogik	113
4.2	Die Grounded-Theory-Methodologie	114
4.3	Datenerhebung	118
4.3.1	Videobeobachtung	118
4.3.2	Datenerhebung im Überblick.....	120
4.3.2.1	Hintergrundinformation zu den Kindertagesstätten	122
4.3.2.2	Erhebungsphase 1 in Kindertagesstätte 1.....	122
4.3.2.3	Erhebungsphase 2 in Kindertagesstätte 1.....	123
4.3.2.4	Erhebungsphase 3 in Kindertagesstätte 2.....	124
4.4	Datenaufbereitung.....	124
4.4.1	Notwendigkeit der Datenaufbereitung.....	125
4.4.2	Formen der Datenaufbereitung	126
4.4.3	Datenaufbereitung in der vorliegenden Studie	129
4.4.4	Datenauswahl.....	134
4.5	Datenanalyse	135
4.5.1	Theoretisches Kodieren	136
4.5.2	Segmentieren.....	138
4.6	Ergebnisse: Methode zur Erforschung von Spielsituationen mit jungen Kindern	140
5	Spielsituationen im Kindergarten analysieren und gestalten	142
5.1	Analysefokus <i>Mathematische Aktivitäten</i>	143
5.1.1	Zahlbezogene mathematische Aktivitäten	143
5.1.2	Allgemeine mathematische Aktivitäten.....	154
5.1.3	Ergebnisse: Hypothesen zu mathematischen Aktivitäten.....	162

5.2	Analysefokus <i>Setting</i>	165
5.2.1	Angebot außerhalb des Freispiels	165
5.2.1.1	Angebot mit Materialauswahl	166
5.2.1.2	Angebot mit Spielauswahl	171
5.2.2	Angebot im Freispiel.....	177
5.2.3	Ergebnisse: Hypothesen zum Setting	184
5.3	Analysefokus <i>Spielprozess</i>	186
5.3.1	Spielaufnahme.....	186
5.3.1.1	Materialbezogener Aufforderungscharakter	188
5.3.1.2	Sozialer Aufforderungscharakter	195
5.3.2	Spielaufrechterhaltung	197
5.3.2.1	Positive emotionale Involviertheit	198
5.3.2.2	Verbale Involviertheit	203
5.3.3	Ergebnisse: Hypothesen zum Spielprozess.....	208
5.4	Analysefokus <i>Verbale Interaktion</i>	210
5.4.1	Anleitung.....	210
5.4.1.1	Anleitung durch die Erzieherin	211
5.4.1.2	Anleitung durch Kinder.....	219
5.4.2	Begleitung	221
5.4.2.1	Begleitung durch die Erzieherin.....	221
5.4.2.2	Begleitung durch Kinder	228
5.4.3	Ergebnisse: Hypothesen zur verbalen Interaktion	233
5.5	Zusammenfassung der Ergebnisse	234
5.5.1	Bedingungen für die Entstehung mathematischer Lerngelegenheiten in formal offenen Situationen	236
5.5.2	Gestaltungsmöglichkeiten der Erzieherin	239
6	Diskussion und Ausblick	243
	Literatur	253
	Anhang: Verzeichnis der Spiele	273

0 Forschungsanliegen

In diesem Eingangskapitel wird das Forschungsanliegen, die Frage nach der Gestaltung mathematischer Bildung im Kindergarten, präzisiert. Nach einer Einführung in die Thematik (Kapitel 0.1) werden das Erkenntnisinteresse und der Forschungsprozess erläutert (Kapitel 0.2). Die leitenden Fragestellungen gliedern und strukturieren die vorliegende Arbeit (Kapitel 0.3).

0.1 Einführung in die Thematik

Bildung im frühen Kindesalter hat in den letzten zehn Jahren in der Öffentlichkeit, in den Kindergärten vor Ort, bei den Trägern, den verantwortlichen politischen Institutionen und in der Forschung eine zunehmende Aufmerksamkeit erfahren. Es stellt heute einen gesellschaftlichen Konsens dar, dass die frühe Kindheit für die Entwicklung und das Lernen von großer Bedeutung ist. Entscheidende Weichen für Bildungsbiographien werden in der frühen Kindheit gestellt:

„Auf den Anfang kommt es an.“ (Fthenakis u.a. 2007, 3)

Angestoßen wurde diese Diskussion zu Beginn des neuen Jahrtausends – nach einer längeren Periode der Bildungsferne in (west-)deutschen Kindergärten seit Mitte der 1970er Jahre – durch die PISA-Studien (vgl. Baumert u.a. 2001, Prenzel u.a. 2003) und den OECD-Bericht zur „Politik der frühkindlichen Betreuung, Bildung und Erziehung in der Bundesrepublik Deutschland“ (vgl. für Deutschland OECD 2004, für einen vergleichenden Bericht von 20 Ländern OECD 2006).

Obwohl die PISA-Studien keine direkten Bezüge zur frühkindlichen Bildung herstellen, wurde bald öffentlich diskutiert, dass nicht erst die Schule ihren Bildungsauftrag nicht angemessen erfüllt. Insbesondere bei der Kompensation fehlender häuslicher Anregungen richtet sich das Augenmerk heutzutage bereits auf den Kindergarten. Bei der Suche nach möglichen Erklärungen für das schlechte Abschneiden der deutschen 15-Jährigen wurde auch auf den schon länger bekannten Befund eines positiven Zusammenhangs zwischen dem Besuch einer vorschulischen Einrichtung und der späteren Schulleistung verwiesen (vgl. Büchel u.a. 1997, Tietze 1998, Bos u.a. 2003, 128ff.; für eine internationale Zusammenschau vgl. Biedinger & Becker 2006). Der OECD-Bericht für Deutschland von 2004 weist auf einen Reformbedarf in deutschen Kindergärten im Hinblick auf die finanzielle Ausstattung, die Qualität von Erziehung, Bildung und Betreuung und die Ausbildung der Fachkräfte hin.

Vor diesem Hintergrund rückt die frühe Bildung zu Beginn des neuen Jahrtausends erneut in den Fokus erziehungswissenschaftlicher, psychologischer und fachdidaktischer Forschung, und es werden zahlreiche Reformmaßnahmen diskutiert (vgl. Roßbach 2004, 10). Sie reichen von einer Stärkung des Bildungsauftrags, der Verbesserung der Rahmenbedingungen (z.B. Gruppengröße, Personalschlüssel) über die Reform und Aufwertung der Aus- und Weiterbildung von Erzieher(inne)n

bis hin zur Verbesserung der Förderbedingungen von Kindern aus sozial benachteiligten Familien und Familien mit Migrationshintergrund.

„Nach der Veröffentlichung der PISA-Studie scheint sich die bildungspolitische Entdeckung des Kindergartens zu wiederholen.“ (Rauschenbach u.a. 2004, 85)

Die Diskussion über die Stärkung des Bildungsgedankens in Kindertagesstätten ist in ihrem Grundsatz nicht neu. Vielmehr fand sie in den 1960er und 1970er Jahren in der damaligen Bundesrepublik Deutschland – ausgelöst durch den Sputnik-Schock – in ähnlicher Weise statt. In der Folge wurden verschiedene Bildungsansätze für den Kindergarten entwickelt, die sich in *funktionsorientierte Ansätze* einerseits und *wissenschaftsorientierte Ansätze* andererseits untergliedern lassen (vgl. Roßbach 2004, 11ff.). Kritik entzündete sich an der Form (isolierte Trainingsprogramme), dem schulvorbereitenden Charakter sowie der Lebensweltferne (Orientierung an der jeweiligen Struktur der zugrunde liegenden Wissenschaftsdisziplin). Viele dieser Programme scheiterten im Alltag der Kindergärten. Wissenschaftsorientierte Ansätze wie beispielsweise die *Neue Mathematik* (vgl. Neunzig 1972) konnten sich nicht durchsetzen.

In Deutschland dominierten in der Folge *situationsorientierte Ansätze*, die die Kinder zur Bewältigung aktueller und damit auch künftiger Lebenssituationen befähigen sollten. Innerhalb dieser Ansätze wurden keine inhaltlichen Bildungsziele formuliert. Ihre Vertreter sahen sich – in Bezug auf die Auswahl relevanter Lebenssituationen – der Kritik der Beliebigkeit ausgesetzt. Erst in jüngerer Zeit werden *bildungsorientierte Ansätze* entwickelt, die Ziele für einzelne Bildungsbereiche konkretisieren.

Im Jahre zwölf nach PISA ist die frühe Kindheit nicht mehr nur mit Erziehung und Betreuung assoziiert, sondern der Bildungsgedanke ist in Kindertagesstätten – auch über Rahmenpläne – fest verankert (vgl. JMK & KMK 2004). Kindertagesstätten sind heutzutage neben Schulen und Hochschulen sowie beruflicher und berufsbegleitender Weiterbildung fester Bestandteil einer lebenslangen Bildungskette (vgl. Heinze & Grüßing 2009). Dass Kindergärten selbstverständlich als Bildungsorte bezeichnet und angesehen werden, ist ein wesentliches Ergebnis einer mit der Jahrtausendwende einsetzenden Diskussion.

Bildungsorte müssen gestaltet werden. Es stellt sich daher die grundlegende Frage, *wie* Bildung im *Kindergarten* gelingen kann. Die Herausforderung der neuen alten Bildungsdiskussion besteht nach wie vor darin, die Möglichkeiten (fachbezogener) Bildungsangebote innerhalb bestehender organisatorischer Strukturen und unter Berücksichtigung des Prinzips der ganzheitlichen Bildung auszuloten. Es gilt, den frühkindlichen Bildungsauftrag zu präzisieren und vom schulischen Auftrag abzugrenzen. Die Jugendministerkonferenz

„hält es daher nicht für sinnvoll, Bildungsvorstellungen der Schule unmittelbar auf den Kindergarten zu übertragen oder den Bildungsauftrag des Kindergartens auf eine reine Vorbereitung auf die Schule zu reduzieren.“ (JMK 2002, 3)

Kindergarten und Grundschule sind Bildungseinrichtungen. Sie verstehen sich als Orte des Lernens, die bewusst und gezielt gestaltet werden (müssen). Sie unter-

scheiden sich jedoch hinsichtlich ihrer pädagogischen Ordnung. Wohl wissend, dass die Lern- und Bildungssituation in deutschen Kindergärten sehr heterogen ist, kann im Kindergarten im Unterschied zur schulischen Lernsituation von einer größeren *formalen Offenheit* auf verschiedenen Ebenen gesprochen werden:

- In Bildungsplänen für den Kindergarten sind Ziele und nicht Standards formuliert.
- Der Kindergartenalltag ist von freiem und angeleitetem Spiel in altersheterogenen Gruppen geprägt. Er wird durch das Freispiel und Angebote in verschiedenen Bildungsbereichen und nicht durch einen Unterricht in Fächern strukturiert.
- In offenen Räumen werden Materialien und nicht Aufgaben angeboten.

Im Alltag des Kindergartens zeigt sich formale Offenheit in einer Wahlfreiheit der Räume, der Materialien, der Spielpartner und der Verweildauer.¹

Aufgrund dieser Unterschiede müssen Bildungsangebote im Kindergarten anders gestaltet werden als in der Schule, und dafür bedarf es einer eigenständigen didaktischen Forschung für den vorschulischen Bereich. Denn aus der schlichten Tatsache, dass der Kindergarten eine Bildungsinstitution ist, können noch keine didaktischen Schlüsse gezogen werden.

Die *Mathematikdidaktik* befasst sich seit der Jahrtausendwende wieder zunehmend intensiver mit der frühkindlichen Bildung. In diesem recht jungen Forschungsgebiet, das über längere Zeit weitgehend brach lag, lohnt es sich, eine Systematisierung bisheriger Forschungen vorzunehmen. Einerseits können so bereits an dieser Stelle Forschungsdesiderate aufgezeigt werden, andererseits geht es um die Verortung der eigenen Arbeit in einer noch eher wenig ausdifferenzierten Forschungslandschaft.

Innerhalb der frühen mathematischen Bildung kann man *verschiedene Forschungsfelder* ausmachen (vgl. auch Schuler & Wittmann 2009):

- Kompetenzerhebung bei Schulanfängern
- Diagnose und Förderung im Kindergarten
- Entwicklungsforschung für die frühe mathematische Bildung und deren Evaluation
- Erforschung von Alltagspraxen im Kindergarten

Untersuchungen zur *Kompetenzerhebung* zeigen die arithmetischen und geometrischen Kompetenzen von Schulanfängern, aber auch eine große Heterogenität diesbezüglich auf (vgl. zur Arithmetik z.B. Schmidt 1982, Schmidt & Weiser 1982, Spiegel 1992, Grassmann u.a.1995, Selter 1995, Hengartner & Röthlisberger 1995, Senfleben 1996, Caluori 2004; vgl. zur Geometrie Grassmann 1996, Höglinger & Senfleben 1997, Eichler 2004). Wesentliche Erkenntnisse dieser Studien können folgendermaßen zusammengefasst werden (vgl. Schipper 1998):

1 Die Beschreibung der formalen Offenheit ist hier idealtypisch zu verstehen. In Kindergärten und Kindertagesstätten vor Ort liegen sowohl grundsätzlich als auch im Tagesverlauf, insbesondere hinsichtlich der Wahlfreiheit der Räume, unterschiedliche Grade an Offenheit vor.

- Es gibt keine „Stunde Null“ (Selter 1995): Schulanfänger verfügen über höhere Zählfähigkeiten (und informelle Rechenstrategien) als gemeinhin angenommen.
- Der „Mythos“ (Schipper 1998) von der hohen mathematischen Kompetenz von Schulanfängern: Die informellen Fähigkeiten werden von Lehrerinnen systematisch unterschätzt, formelle Fähigkeiten hingegen überschätzt.
- Leistungsheterogenität: Die mathematischen Fähigkeiten von Schulanfängern weisen eine große Spannweite auf.

Während die frühen Studien in den 1980er Jahren insbesondere Fähigkeiten im Umgang mit Zahlen, wie das verbale und quantifizierende Zählen, sowie Ziffernerkenntnisse erheben, um für die Abschaffung der ausgedehnten pränumerischen Phase im Anfangsunterricht zu argumentieren (vgl. Schipper 1998, 122f.), werden in den 1990er Jahren die Rechenfähigkeiten der Schulanfänger in den Blick genommen. In Interviews mit sogenannten „Schachtelaufgaben“ werden die individuellen Lösungswege der Kinder bei einfachen Additions- und Subtraktionsaufgaben untersucht (vgl. Spiegel 1992). In weiteren Studien werden den Kindern kontextbezogene Bildsachaufgaben als Gruppentests vorgelegt (Grassmann u.a. 1995, Selter 1995), die ursprünglich von van den Heuvel-Panhuizen (1995) in den Niederlanden entwickelt worden sind. Die Fähigkeiten von Schulanfängern werden erhoben, um die Notwendigkeit aufzuzeigen, schulisch daran anzuknüpfen. All diese Studien zielen folglich nicht auf die frühe Bildung, sondern sollen in erster Linie Argumente für eine Weiterentwicklung des Anfangsunterrichts liefern und empirisch stützen (vgl. Schipper 1998).

In den letzten zehn Jahren hat sich das Forschungsinteresse leicht verschoben. Heutzutage geht es um „Kompetenzdiagnostik als Ansatzpunkt für die Weiterentwicklung mathematischer Fähigkeiten“ (Gasteiger 2010, 106), also um die *Diagnose und Förderung im Kindergarten*. Im Bereich der Diagnostik wurden in den letzten zehn Jahren zahlreiche Instrumente entwickelt bzw. aus anderen europäischen Ländern adaptiert. Grundsätzlich lassen sich standardisierte Instrumente von eher informellen Instrumenten unterscheiden. Beispiele für die erste Gruppe sind:

- der Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (OTZ, van Luit u.a. 2001);
- die Neuropsychologische Testbatterie für Zahlenverarbeitung und Rechnen bei Kindern, Kindergartenversion (ZAREKI-K, von Aster u.a. 2009);
- und der Test zur Erfassung numerisch-rechnerischer Fertigkeiten vom Kindergarten bis zur 3. Klasse (TEDI-MATH, Kaufmann u.a. 2009).

Als Vertreter für die informellen Instrumente ist insbesondere das Elementarmathematische Basisinterview (EMBI) zu erwähnen, das für Kinder im Alter von 5 bis 8 Jahren konzipiert ist:

- EMBI – Zahlen und Operationen (vgl. Peter-Koop u.a. 2007)
- EMBI – Größen und Messen, Raum und Form (vgl. Wollring u.a. 2011)

Beide Formen diagnostischer Instrumente können zu statistischen Erhebungen auch in größeren Populationen und mit mehreren Messzeitpunkten herangezogen werden. Sie eignen sich aber auch für individualdiagnostische Zwecke. Grundlage dieser Instrumente sind Analysen von Vorläuferfähigkeiten bzw. Basiskompetenzen zum Zahlbegriffserwerb.

Darüber hinaus wurden auch Instrumente zur kontinuierlichen Beobachtung und Dokumentation entwickelt. So gibt die ‚Lerndokumentation Mathematik‘ den Erzieherinnen ein fachspezifisches Beobachtungsraster zu verschiedenen mathematischen Bereichen an die Hand (vgl. Steinweg 2006). Mit diesem Instrument können das mathematische Lernen von Anfang an begleitet, individuelle Entwicklungen dokumentiert und Anregungen für weitere Lernangebote gewonnen werden.

Die Verschiebung des Forschungsinteresses auf die Diagnose und Förderung im Kindergarten belegt eindrücklich die Veränderung in der Bildungslandschaft. Während es vor der Jahrtausendwende und vor PISA um das Aufgreifen der Heterogenität *in der Schule* ging, geht es heute auch um die Diagnose sowie die gezielte Prävention und Förderung *vor der Schule*. Vor einer Euphorie bei der Frühförderung wird allerdings gewarnt (vgl. Stern 2004, 43f., Schmidt-Denter 2008, 719f., 733f.). So plädiert Hasselhorn (2010, 174) angesichts der Forschungslage für „einen gedämpften Optimismus“, da zwar „Befunde der kognitiven Trainingsforschung [zeigen], dass individuelle kognitive Leistungspotenziale trotz massiver biologischer Restriktionen durchaus veränderbar sind“. Allerdings sind kompensatorische Effekte in der Regel nicht zu beobachten, d.h. „die leistungsstärkeren [...] Kinder profitieren von den kompensatorisch gedachten Maßnahmen oft mehr als die schwächeren“ (Hasselhorn 2010, 175).

Im Rahmen der *Entwicklungsforschung* ist in den letzten Jahren eine rege Forschungstätigkeit zu beobachten. Es wurden verschiedene Arten von Materialien, Lernangeboten sowie Lehrgängen und Förderprogrammen für den Kindergarten entwickelt. Sowohl die theoretische als auch die praktische Anbindung gestaltet sich dabei recht unterschiedlich. Verbunden mit der Entwicklung ist oftmals der Nachweis kurzfristiger und langfristiger Effekte von Förderprogrammen, Trainings und Lehrgängen einerseits (vgl. Krajewski 2008, Quaiser-Pohl 2008) sowie von Curricula, Förderkonzepten und der Dokumentation von Lernprozessen andererseits (vgl. Clements & Sarama 2007a, Clarke u.a. 2008, Steinweg & Gasteiger 2008, Gasteiger 2010). In der methodischen Orientierung handelt es sich dabei fast durchgängig um quantitative Studien, die einem klassischen vergleichenden Design mit Vor- und Nachtest sowie zum Teil auch einem Follow-up-Test folgen. Das Ziel ist der Nachweis von Lerneffekten eines inhaltlichen oder eines methodischen Konzepts, gelegentlich auch der Vergleich zweier Konzepte. Bei der Evaluation der Materialien, Lehrgänge und Förderprogramme kommen wiederum diagnostische Instrumente zum Einsatz (vgl. z.B. Peter-Koop u.a. 2007, Clarke u.a. 2008).

Hinsichtlich der Inhaltsbereiche ist – sowohl im Bereich der Diagnostik als auch im Bereich der Materialentwicklung – ein Schwerpunkt auf der Arithmetik oder der Leitidee Zahlen und Operationen festzustellen (vgl. Müller & Wittmann 2002, 2004, Friedrich & de Galgoczy 2004, Preiß 2004, 2005, Dolenc u.a. 2005, Dreyer & Schillert 2007, Krajewski u.a. 2007, Royar 2007a). Diese Schwerpunktsetzung hat sicherlich mehrere Ursachen, wie beispielsweise die faktische Konzentration schulischer Bildung auf diesen Bereich, aber auch die umfangreiche Forschungslage zum Zahlbegriffserwerb sowie neuere Studien zur Prävention von Rechenschwäche, die das Zahl- und Mengenwissen am Ende der Kindergartenzeit als eine wesentliche Voraussetzung für den Schulerfolg im Mathematikunterricht der Grundschule herausstellen (vgl. z.B. Dornheim 2008, Krajewski 2003). Von Seiten der Mathematikdidaktik gibt es in den letzten Jahren vermehrt auch inhaltlich weiter gefasste Konzepte (Hoenisch & Niggemeyer 2004, Peter-Koop & Grüßing 2007, Fthenakis 2009, Benz 2010, Bönig u.a. 2010, Kaufmann 2010, Lee 2010, Royar & Streit 2010; zur theoretischen Grundlegung vgl. Steinweg 2008).

Ziel der im Feld *Erforschung von Alltagspraxen* verorteten Forschungsarbeiten ist zunächst die Erfassung des Status quo in den Kindergärten, eine Beschreibung des Alltags, aber auch günstiger Praxen. Elementare Forschungsfragen sind dabei etwa folgende:

- Mit welchen Materialien und in welchen Situationen sind mathematische Aktivitäten im Kindergartenalltag zu beobachten? (vgl. Ginsburg u.a. 2004)
- Welche Kontextfaktoren und Bedingungen für derartige mathematische Aktivitäten lassen sich ausmachen? (vgl. Ginsburg u.a. 2004)
- Welche Art der Instruktion, Anleitung und Unterstützung wird praktiziert, welche wirkt sich förderlich auf mathematische Aktivitäten aus? (vgl. van Oers 1996 u. 2004, Brandt & Tiedemann 2009, Carlsen u.a. 2009, Tirosh u.a. 2009)

Methodologisch sind diese Studien dem qualitativen Paradigma zuzuordnen. Methodisch wird Videotechnik zur Aufzeichnung von Alltagssituationen, aber auch von gezielt arrangierten Gesprächssituationen und Interviews, eingesetzt. Die Datenauswertung erfolgt häufig mittels verschiedener qualitativer Verfahren wie der qualitativen Inhaltsanalyse oder der Interaktionsanalyse.

Während die Erforschung von Alltagspraxen im Bereich der mathematischen Bildung noch weiter ausgebaut und vertieft werden muss, gibt es hierzu in der *Frühpädagogik* bereits erste Ergebnisse. In einer großen Studie zur Qualität von Erziehung und Bildung in Kindergarten, Grundschule und Familie wird sowohl mit querschnittlichen als auch längsschnittlichen Analysen die Prozessqualität, also die Qualität der Interaktion und der Instruktion in der Kindertagesstätte als ein zentrales Qualitätskriterium herausgestellt (vgl. Tietze 1998, Tietze u.a. 2005). Eine große Längsschnittstudie in England identifiziert insbesondere die Qualität der verbalen Interaktion als Kriterium guter Kindergartenpraxis (vgl. Sylva u.a. 2003, Siraj-Blatchford u.a. 2005). Im nationalen Bildungsbericht zur Qualität von Bildung in Kindertagesstätten in Deutschland wird damit übereinstimmend und daran anknüpfend folgendes Forschungsziel formuliert:

„Es käme darauf an zu untersuchen, welche Gelegenheitsstrukturen und welche Art von Impulsen Kinder am besten in ihren Bildungswegen unterstützen, so dass sie zu einer hohen Qualität von Bildung gelangen.“ (Rauschenbach, 2004, 178)

König (2009), die sich der Untersuchung von „Interaktionsprozessen zwischen Erzieherinnen und Kindern“ widmet, zeigt in einer Studie im deutschsprachigen Raum auf, dass im Hinblick auf die Qualität der verbalen Interaktion in Kindertagesstätten noch deutlicher Entwicklungsbedarf besteht.

Die Frage nach der Auswahl und Beurteilung von Materialien und der Gestaltung von Lernumgebungen sowie nach der Lernbegleitung ist nicht nur für die Frühpädagogik im Allgemeinen wesentlich, sondern auch für die Mathematikdidaktik im Besonderen. Hier setzt die vorliegende Arbeit an.

0.2 Erkenntnisinteresse und Forschungsprozess

Das Anliegen der Arbeit ist es, die mathematische Bildung im Kindergarten im bestehenden Kontext der formalen Offenheit und unter Berücksichtigung frühkindlicher Formen des Lernens auf eine didaktisch begründete Basis zu stellen. Hinter dem Forschungsvorhaben steht die *grundlegende Frage*, in welcher Form und unter welchen Voraussetzungen und Bedingungen mathematische Bildung in *alltäglichen Zusammenhängen* im Zuge einer *ganzheitlichen frühen Bildung* in *altersgemischten Kindergartengruppen* realisiert werden kann.

Im Kindergartenalltag treten mathematische Aktivitäten selten spontan auf, und wenn sie auftreten, werden sie von Erzieherinnen meist nicht mathematisch gedeutet und aufgegriffen (vgl. Stöckli & Stebler 2011, 81). Daher wurde im Rahmen der Arbeit zunächst ein didaktisches Setting entwickelt, um mathematische Aktivitäten überhaupt systematisch beobachten zu können. Dies stellt innerhalb der mathematikdidaktischen Forschung eine gängige Vorgehensweise dar (vgl. z.B. Selter 1994, Rathgeb-Schnierer 2006, Götze 2007). Sie umfasst auch, dass die Forscherin oder der Forscher das didaktische Setting (teilweise) aktiv mitgestaltet.

Die Entwicklung des Settings erfolgte in zwei Schritten (vgl. Abb. 0.1):

- Erster Schritt: Analyse von Materialien
- Zweiter Schritt: Analyse von Spielsituationen mit diesen Materialien

Bei der Entwicklung des Settings greifen die Analyse von Materialien und die Analyse von Spielsituationen mit diesen Materialien, welche die beiden zentralen Schritte des Forschungsprozesses darstellen, ineinander. Beim mehrmaligen Durchlaufen der Analyseschritte aufgrund verschiedener Erhebungsphasen und durch die kontinuierliche Auswertung der Daten werden jedoch nicht nur ein didaktisches Setting, sondern auch Kriterien zur Materialbewertung entwickelt. Dieser Kriterienkatalog konnte durch die empirische Bewährung zunehmend ausgeschärft und erweitert werden. Dabei sind materialinhärente von situationsabhängigen Kriterien zu unterscheiden. Der Kriterienkatalog ermöglicht eine differenzierte Materialana-

lyse, die im Forschungsprozess auch die Auswahl von Materialien für weitere Spielsituationen leitet.

Weiterhin steht hinter dem zweischrittigen Forschungsdesign die Hypothese, dass für die Entstehung mathematischer Lerngelegenheiten nicht nur die verwendeten Materialien, sondern auch die Gestaltung der Spielsituation mit diesen Materialien ausschlaggebend sind. Die Materialanalyse und die Analyse von Spielsituationen haben folglich das Ziel, Bedingungen für die Entstehung mathematischer Lerngelegenheiten in Spielsituationen zu gewinnen. Bedingungen, im Sinne von Kontext- und Rahmenbedingungen aber auch der Interaktion im Spielprozess, sind empirisch begründete Konzepte, die vor dem Hintergrund bestehender theoretischer Aussagen und Konzepte, etwa aus der Grundschulmathematikdidaktik, entwickelt und zueinander in Beziehung gesetzt werden.

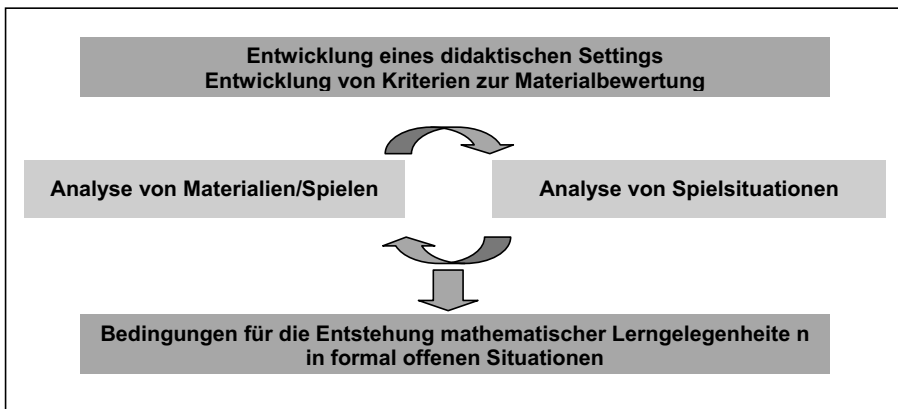


Abb. 0.1: Zirkulärer Prozess der Erforschung mathematischer Lerngelegenheiten/
Forschungsdesign

Die Zirkularität des Forschungsprozesses hat zwei Konsequenzen:

- Sie leitet die forschungsmethodologische Einordnung.
- Sie bringt Herausforderungen für die (lineare) Darstellung des Forschungsprozesses mit sich.

Der zirkuläre Forschungsprozess legt eine Einordnung in die Methodologie der Grounded Theory nahe, eine Form theoriegenerierender Forschung (vgl. Abb. 0.2). Sie stellt den methodologischen Rahmen des Forschungsvorhabens dar, wie neue wissenschaftliche Erkenntnis gewonnen werden kann und leitet zugleich die methodische Vorgehensweise. Vor dem Hintergrund des (eigenen) theoretischen Vorwissens wird auf der Grundlage kontinuierlicher Datenerhebung sowie paralleler Datenauswertung, aber auch Literaturarbeit fortlaufend Wissen in Form von Beschreibung und Theorie generiert. Die Theorie wird in Form von Hypothesen dargestellt, die durch den permanenten Vergleich mit weiteren Daten erweitert, modifiziert oder auch verworfen werden (vgl. Flick 1996, 61, Willmann & Hüper 2004, 114). Ergebnis dieses Prozesses ist eine in den Daten begründete Theorie –

eine Grounded Theory. Eine solche Theorie zeichnet sich nach Strauss und Corbin (1990/96) durch Gegenstandsangemessenheit aus, da sie die Phänomene im Untersuchungsfeld besser erklären und prognostizieren kann als formale Theorien (vgl. Kelle 1994, 287) – sie hat also empirischen Gehalt.

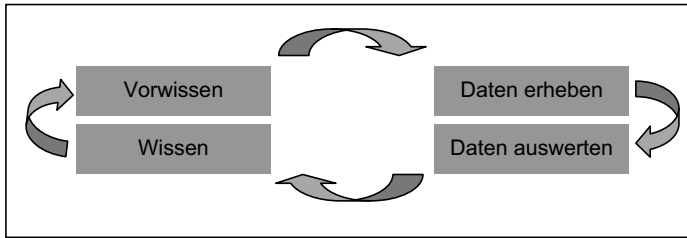


Abb. 0.2: Zirkulärer Forschungsprozess der Grounded-Theory-Methodologie (vgl. z.B. Krotz 2005, 125ff., 165ff., Strübing 2008, 15)

Das theoretische Vorwissen gründet sich einerseits auf die Kenntnis der Fachliteratur, andererseits wird es durch die kontinuierliche Auseinandersetzung mit den Daten angereichert. Beides erhöht die theoretische Sensibilität. (vgl. Strauss & Corbin 1996, 25ff.)

Theoretical sensitivity is the ability to recognize what is important in data and to give it meaning. (Strauss & Corbin 1990, 46)

Die Literaturrecherche fand gemäß der gewählten Methode zu einem überwiegenden Teil während der Forschungsarbeit statt und ging dieser nur teilweise voraus (vgl. Strauss & Corbin 1996, 38). Dies liegt darin begründet, dass bei explorativen Studien theoretische Bezugspunkte nicht umfänglich zu antizipieren sind. In der Darstellung wird das Ergebnis der Literaturrecherche der empirischen Studie vorangestellt, obwohl sie Teil des zirkulären Forschungsprozesses ist (vgl. insbesondere Kapitel 1 bis 3). Gleichzeitig wird dort nicht nur der Stand der Forschung dargestellt. Diese Kapitel enthalten darüber hinaus eigene Systematisierungen, die Herausarbeitung von Forschungslinien und Anwendungen auf den eigenen Forschungsgegenstand.

0.3 Leitende Fragestellungen

Die eingangs gestellte grundlegende Frage steckt den Untersuchungsbereich der vorliegenden Arbeit nur grob ab (Kapitel 0.2). Sie bedarf der weiteren Ausdifferenzierung und Präzisierung.

„Am Anfang steht nicht eine Theorie, die anschließend bewiesen werden soll. Am Anfang steht vielmehr ein Untersuchungsbereich – was in diesem Bereich relevant ist, wird sich erst im Forschungsprozess herausstellen.“ (Strauss & Corbin 1996, 8)

Die Ausdifferenzierung und Präzisierung der grundlegenden Fragestellung ist Ergebnis und Teil der fortschreitenden Erschließung des Untersuchungsbereichs im

zirkulären Forschungsprozess. Gleichzeitig ist es jedoch notwendig, dieses Ergebnis an den Anfang der Arbeit zu stellen, um den Leser durch die Arbeit zu führen. Der Aufbau der Arbeit orientiert sich eng an den diesen leitenden Fragestellungen. Sie werden im Folgenden an die entsprechenden Kapitel der Arbeit angebunden. Da sich jedes Kapitel mit einer Fragestellung befasst, tragen alle Teile der Arbeit, wenn auch in unterschiedlichem Umfang zu den Ergebnissen bei. Um diese kenntlich zu machen, werden sie in den entsprechenden Kapiteln als Ergebnisse ausgewiesen.

Folgende *leitende Fragestellungen* gliedern die vorliegende Arbeit:

1. Welche mathematischen Bildungsziele können für die Bildungsinstitution Kindergarten formuliert werden und welche mathematischen Erfahrungen sollen Kinder im Kindergarten aufgrund dieser Überlegungen machen?

In *Kapitel 1* wird der Frage nach den mathematischen Bildungszielen im Kindergarten nachgegangen. Während es für den schulischen Kontext mit den KMK-Beschlüssen (vgl. KMK 2005) und den Bildungsplänen der Länder einen breiten Konsens über Bildungsziele innerhalb der fachdidaktischen Gemeinschaft gibt, trifft dies für den Elementarbereich nicht zu. Hier herrscht eine große Heterogenität zwischen den Plänen der einzelnen Länder (vgl. Bildungspläne der Bundesländer für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen). Der Gemeinsame Rahmen der Länder für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen (vgl. JMK & KMK 2004) stellt lediglich einen Minimalkonsens dar, der nachträglich erzielt wurde. Er übernimmt damit nicht die inhaltlich konsensuelle Funktion der KMK-Standards im schulischen Bereich. Es gilt daher für die frühe mathematische Bildung als einem jungen Forschungsfeld, Begründungslinien mathematischer Bildungsziele aufzuzeigen, zu systematisieren und zu Leitlinien mathematischer Bildung zu verdichten.

2. In welcher Weise können Kinder im Spiel bzw. beim Spielen Mathematik lernen?

Kapitel 2 setzt sich mit der Frage auseinander, wie Kinder im frühen Kindesalter lernen. Hier wird insbesondere das Verhältnis von Spielen und (Mathematik) Lernen auf der Basis empirischer Forschungsergebnisse sowie eines theoretischen Modells geklärt und begrifflich gefasst (vgl. dazu auch Schuler 2011). Darüber hinaus wird der Frage nach der Lernbegleitung durch die Erzieherin und der Qualität pädagogischer Praxis nachgegangen. Abschließend werden diese Erkenntnisse auf die Lernbegleitung im Spiel bezogen. Die Ausführungen zum Lernen und zur Lernbegleitung im Spiel stützen einerseits die Auswahl von Spielen für die eigene empirische Videostudie und andererseits die Ausweitung des eigenen Forschungsinteresses auf die Gestaltung von Spielsituationen.

3. Welche Ansätze und Materialien gibt es, um diese Bildungsziele mit Kindern im Kindergartenalter zu verfolgen und nach welchen Kriterien können sie analysiert und bewertet werden? Welches mathematische Potenzial haben sie?

In *Kapitel 3* werden die zahlreichen Produkte der Entwicklungsforschung wie Materialien, Lernangebote, Lehrgänge und Förderprogramme konzeptionell eingeordnet und die im Forschungsprozess entwickelten Kriterien zur Auswahl und Bewertung von Materialien – insbesondere zum Erwerb des Zahlbegriffs als einer zentralen Kompetenz – zusammenfassend dargestellt. Die konzeptionelle Unterscheidung von Ansätzen zur frühen mathematischen Bildung und die Entwicklung von Kriterien zur Bewertung sind ein Forschungsdesiderat der Entwicklungsforschung und stellen folglich zentrale Ergebnisse der vorliegenden Arbeit dar (vgl. dazu auch Schuler 2008). Die Entwicklung der Kriterien stützt sich einerseits auf die Ausführungen in Kapitel 1 und 2 (Was und wie soll im Kindergarten gelernt werden?) und andererseits auf die in der empirischen Studie gewonnenen Erkenntnisse (vgl. Kapitel 5). Sie gliedern sich in materialinhärente und situative Kriterien zur Analyse und Bewertung von Materialien. Damit greift dieses Kapitel bereits auf Ergebnisse aus den Analysen von Spielsituationen vor.

4. Wie können Spielsituationen im Kindergarten erforscht werden? Welche Formen der Datenerhebung, der Datenaufbereitung und der Datenanalyse sind für die Untersuchung von Spielsituationen mit jungen Kindern angemessen?

In *Kapitel 4* werden die methodologischen und methodischen Fragen der eigenen empirischen Videostudie zur Erforschung von Spielsituationen im Kindergarten geklärt. Auf der Grundlage der Grounded Theory und der Videographie werden die methodischen Entscheidungen der Datenerhebung, der Datenaufbereitung und der Datenanalyse begründet und exemplarisch dargestellt. Insbesondere die Aufbereitung von Videodaten wird hier ausführlich diskutiert und begründet (vgl. dazu auch Schuler 2013, i.Vorb.).

5. Unter welchen Bedingungen können potentiell geeignete Spiele ihr mathematisches Potenzial entfalten bzw. unter welchen Bedingungen können in Spielsituationen mit ausgewählten Spielen mathematische Lerngelegenheiten entstehen?

Kapitel 5 befasst sich auf der Grundlage der empirischen Videostudie mit der Frage, unter welchen Bedingungen und Voraussetzungen mathematische Lerngelegenheiten in Spielsituation in der bestehenden Ordnung der formalen Offenheit im Kindergarten – wie dem Freispiel – entstehen können. Die Analyse der Daten, bei der die mathematischen Aktivitäten in verschiedenen Settings, in verschiedenen Phasen des Spielprozesses und in verschiedenen Formen und Strukturen der Interaktion untersucht werden, wird exemplarisch dokumentiert. Die Ergebnisse werden in der Form von Hypothesen zur Gestaltung mathematischer Bildung im Kindergarten formuliert.

6. Welche Möglichkeiten und Grenzen lassen sich für die Arbeit mit Spielen im Kontext der mathematischen Bildung formulieren?

In *Kapitel 6* werden die Ergebnisse abschließend zusammengefasst und vor dem Hintergrund der gesamten Arbeit diskutiert. Es werden die Möglichkeiten und Grenzen der Gestaltung mathematischer Bildung mit Spielen und sich daraus ergebende Konsequenzen aufgezeigt.

1 Mathematische Bildungsziele im Kindergarten

Welche mathematischen Lerngelegenheiten Kindern im Kindergarten eröffnet werden sollen, ist in Deutschland immer noch Gegenstand der Diskussion. Im Unterschied zur Schule legen Bildungspläne für den Kindergarten nicht verbindlich fest, was Kinder am Ende der Kindergartenzeit können sollen. In der Literatur lassen sich zwei Begründungslinien ausmachen, die unterschiedliche Ansprüche hinsichtlich ihrer Reichweite für die mathematische Bildung im Kindergarten und unterschiedliche Schwerpunktsetzungen haben: Grundsätzlich kann eine *fachdidaktische Linie* von einer *psychologischen Linie* unterschieden werden. Die fachdidaktische Linie bezieht sich in ihren Argumentationen auf fundamentale Ideen und Arbeitsweisen des Faches (Kapitel 1.1), die psychologische Linie befasst sich mit Prädiktoren, die den späteren Schulerfolg vorhersagen sollen (Kapitel 1.2). Unterschiedliche Bezeichnungen der beiden Forschungslinien – Vorläuferfähigkeiten, Vorläuferfertigkeiten, Basiskompetenzen – werden in Kapitel 1.3 geklärt. Diese beiden Linien werden dann auf die Aussagen im *Gemeinsamen Rahmen der Länder* und in den *Bildungsplänen der Länder* bezogen (Kapitel 1.4). Anschließend wird ein unter allen drei Perspektiven wesentlicher Aspekt, der Erwerb und der Aufbau des Zahlbegriffs, näher beleuchtet (Kapitel 1.5). Als Ergebnis werden Leitlinien und Ziele für eine mathematische Bildung im Kindergarten formuliert (Kapitel 1.6).

1.1 Fachdidaktische Begründungslinie

Die fachdidaktische Begründungslinie knüpft an die Überlegungen zur schulischen mathematischen Bildung an. Daher ist es notwendig, zunächst über Mathematik in der Schule zu sprechen, bevor der Bezug zum Kindergarten hergestellt wird. Die neue Generation der Bildungspläne aller Schularten (vgl. z.B. Baden-Württemberg, Ministerium für Kultus, Jugend und Sport 2004, 54ff.) orientiert sich im Gefolge von PISA (Programme for International Student Assessment, Baumert u.a. 2001) nicht mehr an den traditionellen Sachgebieten der verschiedenen Schularten, sondern – vor dem Hintergrund einer lebenslangen Bildungskette – an durchgängigen fachlichen Leitideen und Arbeitsweisen. Durch verschiedene Beschlüsse der Kultusministerkonferenz (KMK) wurden diese Leitideen und Arbeitsweisen für die unterschiedlichen Schularten auch auf Bundesebene festgeschrieben (vgl. KMK 2003, 2004, 2005). Die KMK-Beschlüsse sind aber nicht nur als politischer Konsens zu verstehen. Vielmehr ist die Ausrichtung mathematischer Bildung an fundamentalen Ideen und Arbeitsweisen des Faches heute eine weit geteilte Auffassung innerhalb der fachdidaktischen Gemeinschaft. Dies zeigt sich beispielsweise an Publikationen zu den Bildungsstandards, an denen eine breite Autorenschaft aus der Mathematikdidaktik beteiligt ist (vgl. Blum u.a. 2006, Walther u.a. 2008).

Für die Grundschule werden folgende *inhaltlichen Leitideen* formuliert (vgl. KMK 2005, 8f.), die sich mit kleinen Veränderungen auch durch die weiterführenden Schulen ziehen:

- Zahlen und Operationen
- Raum und Form
- Muster und Strukturen
- Größen und Messen
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Grundlegende *allgemeine mathematische Arbeitsweisen* sind (vgl. KMK 2003, 7f., KMK 2005, 7f.):

- Probleme (mathematisch) lösen
- (Mathematisch) argumentieren
- Kommunizieren
- (Mathematisch) modellieren
- Mathematische Darstellungen verwenden

Sowohl die inhaltlichen Leitideen als auch die allgemeinen mathematischen Arbeitsweisen werden für die verschiedenen Schularten durch Standards konkretisiert. Konkret gliedern sich die Bildungsstandards aller Schularten in *allgemeine mathematische Kompetenzen* und *inhaltsbezogene Kompetenzen*. Allgemeine mathematische Kompetenzen, die auf typische fachliche Arbeitsweisen verweisen, konkretisieren und konzeptualisieren mathematisches Denken und Handeln.

Im Anschluss an die durchgängig einheitliche Konzeptualisierung schulischer mathematischer Bildung mehrten sich in der Mathematikdidaktik die Stimmen für eine Ausrichtung frühkindlicher mathematischer Bildung am Fach. So plädiert Wittmann (2009, 55) für eine „bewusst mathematische Fundierung und einen klaren Bezug zu den Bildungsstandards der Grundschule“. Kinder sollen der Mathematik als der Wissenschaft von den Mustern von Anfang an unverfälscht begegnen. Künstliche Verpackungen und Sekundärmotivationen werden abgelehnt, da sie „eine echte Begegnung mit Mathematik verhindern und kein nachhaltiges Interesse wecken“ (Wittmann 2006, 210). Mathematische Frühförderung ist integraler Bestandteil eines Gesamtkonzepts von Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Abitur und nicht ein vom schulischen Lernen sowie fachlichen Leitideen und Arbeitsweisen abgekoppelter eigenständiger Bereich. Ein durchgängiges fachliches Konzept soll einen „nahtlosen Übergang“ vom Kindergarten zur Grundschule ermöglichen (Wittmann 2006, 209). In der konkreten Umsetzung für den Kindergarten sprechen Müller und Wittmann (2002/04/06/07) sowie Wittmann (2009, 54) allerdings nicht von *Leitideen*, sondern von den *Inhaltsbereichen* Zahlen (Arithmetik) und Formen (Geometrie).

Kaufmann (2010, 60ff.) und Rathgeb-Schnierer (2012) schließen sich ebenfalls einer Orientierung am Fach und an den Bildungsstandards der KMK (2005) an. Auch sie sprechen von Inhaltsbereichen, verwenden zur Bezeichnung der Inhaltsbereiche aber die Leitideen aus dem KMK-Standards (2005, 8f.). Neben den Bereichen *Zahlen und Operationen*, *Raum und Form* sowie *Größen und Messen* fokussiert Rathgeb-Schnierer (2012) auf grundlegende mathematische Denk- und Arbeitsweisen: *Ordnen*, *Sortieren* und *Strukturieren*.

„Mit der nachfolgend vorgenommenen Differenzierung in mathematische Denk- und Handlungsweisen und mathematische Inhaltsbereiche wird dem Aspekt Rechnung getragen, dass grundlegende mathematische Denk- und Handlungsweisen, wie z. B. Klassifizieren und Strukturieren, nicht mit bestimmten Inhaltsbereichen verbunden sind, sondern sich durch alle Inhaltsbereiche ziehen.“ (Rathgeb-Schnierer 2012, 52)

Diese übergreifenden Arbeits- und Denkweisen werden teilweise auch als eigenständige Inhaltsbereiche geführt (vgl. Fthenakis 2009, 92) oder finden sich unter der Leitidee *Muster und Strukturen* wieder (vgl. z.B. Kaufmann 2010, 46).

Auch Steinweg (2008) lehnt die frühe mathematische Bildung an die Bildungsstandards der Grundschule an (vgl. Abb. 1.1). Sie unterscheidet vier inhaltliche Kompetenzbereiche, die eingebettet sind in die „Idee des mathematischen Denkens, das sich in Möglichkeiten des Argumentierens und Begründens, aber auch in Kreativität und Mustern zeigen kann“ (Steinweg 2008, 146).

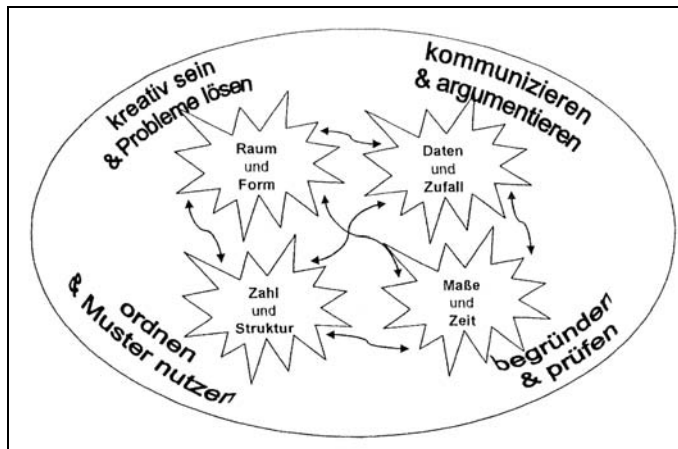


Abb. 1.1: Mathematische Kompetenzbereiche im Kindergarten (Steinweg 2008, 147)

Die Kompetenzbereiche sind wie die schulischen Leitideen nicht überschneidungsfrei, da Aktivitäten im Kindergarten zwar meist einen inhaltlichen Schwerpunkt haben, aber zu anderen Bereichen in Beziehung stehen. Im Hinblick auf die inhaltlichen Kompetenzbereiche werden keine Schwerpunkte gesetzt. Alle vier stehen gleichberechtigt nebeneinander. Darüber hinaus werden Basiskompetenzen formuliert, „die einen günstigen Schulstart ermöglichen. [...] Basiskompetenzen orientieren sich an dem, was Kinder können sollten“ (Steinweg 2008, 144, 155ff.). Durch die Formulierung konkreter Inhalts- und Prozesskompetenzen, rückt dieser Entwurf nicht nur auf der Ebene der Begrifflichkeiten, sondern auch in der Struktur in die Nähe der Bildungsstandards für die Grundschule (vgl. KMK 2005).

Die Diskussion um die Ausrichtung mathematischer Bildung an Leitideen des Faches weist Parallelen zu den USA auf, wo es eine durchgängige Konzeptualisierung mathematischer Bildung vom Kindergarten bis zum Ende der Schulzeit bereits gibt.

Durch den *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM 2000) werden Inhaltsbereiche (main content areas) und Prozessideen (process ideas) durch verbindliche nationale Standards für verschiedene Altersspannen, so auch für die Altersspanne von 2 bis 7 Jahren konkretisiert (PreK-grade2)². Der Schwerpunkt der mathematischen Bildung in der Altersspanne 2 bis 7 Jahre liegt nach diesen nationalen Empfehlungen auf den folgenden drei Inhaltsbereichen:

- Number and Operations
- Geometry
- Measurement

Unter diesen dreien wird wiederum der Bereich *Number and Operations* besonders hervorgehoben:

„For early childhood, number and operations is arguably the most important area of mathematics learning. In addition, learning of this area may be one of the best developed domains in mathematics research.“ (Clements & Sarama, 2007b, 466, vgl. auch Clements 2004, 16f.)

Das Ausmaß an Veränderung und Weiterentwicklung, das man im Vergleich zu den NCTM-Standards (2000) findet, ist national unterschiedlich. Während man in den deutschen KMK-Standards viele Übereinstimmungen zur Urquelle der NCTM-Standards findet, ist dies in der Schweiz nicht mehr ganz so offensichtlich. Dabei spielt auch der Zeitpunkt der Veröffentlichung eine Rolle. So werden im HarmoS-Konkordat³ der Schweiz (vgl. EDK 2011, 7) mathematisches Denken und Handeln zwar ähnlich aber differenzierter gefasst. Es werden insgesamt acht Stufen im Erwerb von Kompetenzen im Hinblick auf verschiedene Inhaltsbereiche unterschieden:

- Wissen, Erkennen und Beschreiben
- Operieren und Berechnen
- Instrumente und Werkzeuge verwenden
- Darstellen und Formulieren
- Mathematisieren und Modellieren
- Argumentieren und Begründen
- Interpretieren und Reflektieren der Resultate
- Erforschen und Explorieren

Diese Stufen gelten auch für die Vorschule bzw. die Eingangsstufe, die in der Schweiz Bestandteil des Schulwesens sind.

2 In den USA werden in dieser Altersspanne folgende Bezeichnungen verwendet: PreKindergarten (2–4 Jahre), Kindergarten (4–5 Jahre), 1. Klasse (5–6 Jahre), 2. Klasse (6–7 Jahre).

3 Die „Interkantonale Vereinbarung über die Harmonisierung der obligatorischen Schule“ (HarmoS-Konkordat) ist ein neues schweizerisches Konkordat. Das Konkordat harmonisiert erstmals national die Dauer und die wichtigsten Ziele der Bildungsstufen sowie deren Übergänge. (vgl. <http://www.edk.ch/dyn/11659.php>)

1.2 Psychologische Begründungslinie

Die psychologische Forschung befasst sich schon seit längerem mit Schwierigkeiten beim Lesen- und Schreibenlernen und seit einigen Jahren auch mit Schwierigkeiten beim Rechnen lernen (vgl. z.B. Schneider 1989, Krajewski 2003, Krajewski & Schneider 2006, Dornheim 2008). Als problematisch werden insbesondere die Entwicklungsunterschiede im mathematischen Leistungsniveau von Grundschulern angesehen, die eine Spanne von mehreren Jahren aufweisen können.

„So kann für das Erlernen der Mathematik kaum von gleichen Chancen gesprochen werden, wenn sie [die Kinder, d. Verf.] in die Schule eintreten. Sorgen machen sich breit, ob diese Unterschiede durch den Schulunterricht noch ausgeglichen werden können oder ob bereits zu diesem frühen Zeitpunkt oder gar im Kindergartenalter ‚Schicksale‘ von Rechenschwäche schon programmiert sind.“ (Krajewski 2005, 150)

Ziel dieser Forschung ist es, spezifische Vorläuferfertigkeiten für einzelne Lernbereiche zu benennen, um in der Folge eine drohende Lese-Rechtschreib-Schwäche bzw. Rechenschwäche frühzeitig, also bereits vor Schulbeginn, zu erkennen. Es wird vermutet, „dass der Beginn der Störung in der Entwicklungsphase liegt, in der vorschulisches mathematikrelevantes Wissen erworben wird“ (Fritz & Ricken 2005, 5). Durch eine Diagnose und eine anschließende gezielte Förderung dieser spezifischen Vorläuferfertigkeiten im Kindergartenalter soll einer möglichen Lernschwäche vorgebeugt werden (vgl. Krajewski u.a. 2008, 95ff.). Im Mittelpunkt stehen somit die frühe Diagnose von Defiziten und die präventive Förderung.

Spezifische Vorläuferfertigkeiten unterscheiden sich von unspezifischen dadurch, dass sie Vorhersagekraft für genau einen Lernbereich besitzen. Sie sind also entweder für die Vorhersage einer Lese-Rechtschreib-Schwäche oder für die Vorhersage einer Rechenschwäche geeignet. Unspezifische Vorläuferfertigkeiten hingegen lassen keine lernbereichsspezifische Vorhersage zu (vgl. Krajewski 2005, 151).

Die Vorgehensweise dieser Forschung soll exemplarisch an der Studie von Krajewski (2003) und Folgeveröffentlichungen (vgl. Krajewski & Schneider 2006, Krajewski u.a. 2008) dargestellt werden. Anknüpfend an entwicklungspsychologische Erkenntnisse zum Erwerb des mathematischen Verständnisses werden in einer Längsschnittstudie mögliche spezifische Prädiktoren (Mengenvorwissen, Zahlenvorwissen) und unspezifische Prädiktoren (Gedächtniskapazität, Zugriffsgeschwindigkeit auf das Langzeitgedächtnis, visuell-räumliches Vorstellungsvermögen, Sprachverständnis, Konzentrationsfähigkeit, Intelligenz, soziale Schicht) im Vorschulalter für den Schulerfolg im Mathematikunterricht der Grundschule ausgewählt. Kindern im Vorschulalter werden Aufgaben bzw. Tests vorgelegt, die diese Prädiktoren abbilden. Am Ende des ersten und am Ende des vierten Schuljahres werden die Mathematikleistungen mit dem Deutschen Mathematiktest (DEMAT 1+, Krajewski u.a. 2002, DEMAT 4, Gölitz u.a. 2006) und die Rechtschreibleistungen mit dem Weingartner Rechtschreibtest (WRT 1+, Birkel 1995) sowie dem Diagnostischen Rechtschreibetest (DRT 4, Grund u.a. 1994) erhoben.

Aufgrund korrelativer Vorbetrachtungen der möglichen Prädiktoren wird ein Strukturgleichungsmodell entwickelt, das die Einflüsse auf die mathematische Schulleistung modelliert (vgl. Krajewski & Schneider 2006, 256)⁴. Dabei werden die angenommenen spezifischen Prädiktoren (mengen- und zahlbezogenes Vorwissen) als solche bestätigt; d.h. dass sich Unterschiede von Kindergartenkindern beim Zählen (vorwärts, weiter, rückwärts, Vorgänger/Nachfolger, Zahlenvergleich), bei der Seriation von Mengen, beim Mengenvergleich und bei der Zahlinvarianz ein halbes Jahr vor Schulbeginn in den Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit widerspiegeln. Als unspezifische Prädiktoren mit hoher Vorhersagekraft für die Mathematikleistung (aber auch für die Rechtschreibleistung) stellen sich die Zugriffsgeschwindigkeit (Würfelbilder lesen), die Intelligenz und die soziale Schicht heraus. Für die anderen möglichen unspezifischen Prädiktoren lassen sich nur geringe Zusammenhänge zu den Schulleistungen nachweisen. Insgesamt entwickeln ungefähr 65% der Kinder mit Auffälligkeiten kurz vor Schulbeginn Schwierigkeiten in der ersten Klasse (vgl. Krajewski & Schneider 2006, 258ff.).

Dornheim (2008) kommt in einer ähnlich angelegten Studie zu weitgehend identischen Ergebnissen wie Krajewski (2003), was die Vorhersagekraft des Zahlenvorwissens und des numerischen Mengenwissens betrifft. Zählen, Abzählen, das Erfassen von Anzahlen und das Anwenden des Zahlenvorwissens sagen die Rechenleistung mit guten statistischen Werten voraus. Die räumliche Intelligenz hat in ihrer Studie aber einen indirekten, über das Zahlenvorwissen vermittelten Einfluss auf die Mathematikleistungen in der Schule.

Fritz und Ricken (2005, 19) deuten die Tatsache, „dass eben auch Kinder mit Auffälligkeiten in den Vorkenntnissen keine Rechenstörungen entwickelt haben“, dahingehend, dass noch „zu wenig publizierte Daten aus prospektiven Längsschnittstudien vorliegen, um gesicherte Aussagen über Prädiktoren im Vorschulalter zu treffen“ (Fritz & Ricken 2005, 23). Dies gilt insbesondere für das als zentral angesehene Teil-Ganzes-Konzept und die Integration von Teilfertigkeiten, die in den bisherigen Untersuchungen der Prädiktionsforschung keine Rolle gespielt haben (vgl. Fritz & Ricken 2005, 5, 23, vgl. dazu auch Kapitel 1.5.1).

Psychologische Studien lenken das Augenmerk auf die Früherkennung von Schwierigkeiten beim Rechnen lernen. Wie die oben angeführte Studie zeigt, ist dies ein komplexes Unterfangen, da Schwierigkeiten beim Rechnen erst mit dem Rechnen, also mit Schuleintritt bzw. im Laufe der Schulzeit, virulent werden (vgl. Lorenz 2005, 30f.). Die Früherkennung und damit auch die Frühförderung erfolgt über spezifische Vorläuferfertigkeiten, deren Identifikation noch weitgehend am Anfang steht (vgl. Kapitel 1.3). Ausgehend von der Prämisse des Schulerfolgs und der kompensatorischen Förderung sind spezifische Vorläuferfertigkeiten, also zahl- und mengenbezogenes Wissen, in dieser Begründungslinie der zentrale Orientierungspunkt mathematischer Bildung im Kindergarten.

4 In Krajewski (2003) und (2005) finden sich abweichende Strukturmodelle. Hier wird auf das zeitlich letzte Modell von Krajewski & Schneider (2006, 256) Bezug genommen, das auch in Krajewski (2008, 281) erneut publiziert ist.

Die Unterscheidung in spezifische und unspezifische Vorläuferfertigkeiten ist folglich eine Unterscheidung der Forschung, die eine Diagnose gefährdeter Kinder und deren gezielte Förderung im Lernbereich Rechnen ermöglichen soll. Sie ist keine Unterscheidung der Praxis, die stets ein Interesse an einer breiten und umfassenden Förderung auch unspezifischer Vorläuferfertigkeiten hat, beispielsweise mit dem Ziel einer kombinierten Prävention von Lese-Rechtschreib-Schwierigkeiten und Rechenschwierigkeiten. Mit Blick auf die Praxis gibt es auch in der Psychologie dahingehende Ansätze:

„Deshalb ergänzen unspezifische Fertigkeiten (insbesondere visuell-räumliche Wahrnehmungsleistungen) wohl die Liste der Bedingungen, die die Entwicklung von Rechenfertigkeiten insgesamt unterstützen.“ (Fritz & Ricken 2005, 8)

1.3 Vorläuferfähigkeiten, Vorläuferfertigkeiten, Basiskompetenzen

„Deutlicher als 1970 ist inzwischen im Blick, dass sich die Kompetenzen der Heranwachsenden in Zeiträumen entfalten, die in der frühen Kindheit beginnen und weit über die Grundschule hinausreichen. [...] Paradebeispiel dafür sind die phonologische Bewusstheit [...] und die frühe Zahlbegriffsentwicklung. Während der Kindergartenzeit entwickeln sich die entscheidenden Vorläuferfähigkeiten für die schulischen Lernprozesse.“ (Faust-Siehl 2001, 74)

Was Kindergartenkinder in Bezug auf Mathematik lernen sollen, wird unterschiedlich bezeichnet. Die Verwendung der verschiedenen Bezeichnungen ist von der jeweiligen Forschungstradition geprägt. Findet die Bezeichnung *Vorläuferfähigkeiten* in verschiedenen Fachdidaktiken, der Grundschuldidaktik und in der Frühpädagogik Verwendung, so steht die Bezeichnung *Vorläuferfertigkeiten* in der psychologischen Forschungstradition. Inhaltlich werden sie aber weitgehend synonym verwendet, wohingegen die Bezeichnung *Basiskompetenzen* in der Mathematikdidaktik z.T. in deutlicher Abgrenzung verwendet wird.

Beide Bezeichnungen, *Vorläuferfähigkeiten* und *Vorläuferfertigkeiten*, werfen aber eine grundsätzliche Frage auf: Wofür sind sie Vorläufer? Faust-Siehl (2001) spricht von Vorläuferfähigkeiten für die schulischen Lernprozesse. Über den Zusatz *Vorläufer* wird die frühkindliche Bildung – zumindest auf der Ebene der Bezeichnung – auf die Schule ausgerichtet.

Der Begriff *Fertigkeiten* ist in der Mathematikdidaktik und der Psychologie fest umrissen. Fertigkeiten sind abrufbare Handlungen wie etwa das Zählen. Die Bezeichnung als Fertigkeiten betont die Automatisierung, die schnelle Abrufbarkeit und die Entlastung des Gedächtnisses als Voraussetzung für Verstehensprozesse (vgl. z.B. Stern 2006, 100f.). Der Terminus *Fähigkeiten* hingegen wird hauptsächlich in der Mathematikdidaktik verwendet. Er ist assoziiert mit operativem Üben, beweglichem Denken und Verständnis (vgl. Padberg 1992, 265), in jüngeren Diskussionen auch mit prozessbezogenen Kompetenzen wie Argumentieren, Begründen oder Kommunizieren (vgl. Steinweg 2008, 144). Innerhalb der Mathematikdidaktik besteht die Auffassung, dass Fertigkeiten sich aus Fähigkeiten entwickeln

sollten, um verständnisvolles Lernen zu gewährleisten. Doch nicht alle Fähigkeiten müssen automatisiert werden. Die Verwendung der Bezeichnung Fähigkeiten kann aus dieser fachdidaktischen Tradition heraus verstanden werden.

Darüber hinaus wird in der Mathematikdidaktik der Begriff *Vorläuferfähigkeiten* inhaltlich weiter gefasst als der Begriff Vorläuferfertigkeiten in der Psychologie. So werden mit dem diagnostischen Instrument ‚Elementarmathematisches Basisinterview‘ (EMBI, vgl. Peter-Koop u.a. 2007) folgende Fähigkeiten erhoben, die alle auch als Vorläuferfähigkeiten bezeichnet werden: Eins-zu-Eins-Zuordnen, Zählen, Abzählen, Vergleichen, Invarianz, mathematisches Sprachverständnis, Raum-Lage-Beziehungen, Muster Erkennen und Fortsetzen, Ordinalzahlen, Subitizing, Zuordnung Zahlsymbole – Mengenbilder, Reihenfolge Zahlsymbole, Teil-Ganzes-Beziehung, Vorgänger/Nachfolger, nach Reihenfolge Ordnen. Zwar liegt der Fokus hier ebenfalls auf dem Zahlbegriff, aber nicht nur auf Teilfertigkeiten mit statistischer Vorhersagekraft des Schulerfolgs. Es wird außerdem darauf verwiesen, dass in anderen Bereichen (z.B. Muster) empirische Studien zur Bedeutung von Vorläuferfähigkeiten noch fehlen. So werden in Diagnose und Förderung auch Vorläuferfähigkeiten berücksichtigt, die auf theoretischen Modellen oder Erfahrungen basieren (vgl. Lorenz 2005, Peter-Koop & Grüßing 2007, 161f., Peter-Koop u.a. 2007).

Sind die Bezeichnungen Vorläuferfähigkeiten und -fertigkeiten vorwiegend bzw. ausschließlich auf für den Schulerfolg relevante Teilfähigkeiten bzw. -fertigkeiten des Zahlbegriffs bezogen, so wird die Bezeichnung *Basiskompetenzen* bei Steinweg (2008) weiter gefasst, wohingegen Roßbach (2004, 13), Lorenz (2005, 31) und Stern (2006, 96) Basiskompetenzen im Sinne von Vorläuferfertigkeiten verwenden. Basiskompetenzen sind bei Steinweg (2008) bestimmt durch *inhaltsbezogene und prozessbezogene Kompetenzen*. Der Begriff *Kompetenzen* umfasst dabei Fertigkeiten, Fähigkeiten und Kenntnisse (Faktenwissen). Mathematische Bildung im Kindergarten orientiert sich damit weitgehend an denselben Leitideen wie die schulische Bildung (vgl. Heinze & Grüßing 2009). Gleichzeitig macht der Zusatz *Basis* deutlich, dass Kompetenzen institutionenspezifisch formuliert werden (vgl. Abb. 1.1). Mit dem Verzicht auf den Zusatz *Vorläufer* soll zudem gegen eine Trivialisierung mathematischer Bildung im Kindergarten Position bezogen werden:

„Eine Fehlvorstellung liegt in der Idee der Vorläuferfähigkeiten. Lernen geschieht nicht in linearer Abfolge nach wissenschaftlich gegebenen Plänen, sondern kumulativ und assoziativ sowie in Sprüngen. [...] Jede Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten ist per se Mathematik und keine Vorform.“ (Steinweg 2008, 144)

Aber nicht nur in der Mathematikdidaktik, sondern auch in der Deutschdidaktik entzündet sich Kritik an einer zu engen inhaltlichen Sicht auf Vorläufer:

„Mit der phonologischen Bewusstheit, die gegenwärtig in der Diskussion der Vorläuferfertigkeiten einen unangemessen hohen Stellenwert einnimmt, wird nur ein kleiner Ausschnitt der für den Schrifterwerb bedeutsamen Vorläuferfertigkeiten erfasst.“ (Schmid-Barkow 2008, 54)