

Alain Hamid

Zu multivariaten Renditeverteilungen und Copulas in der Finanzmarktstatistik

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de/> abrufbar.

Dieses Werk sowie alle darin enthaltenen einzelnen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsschutz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlanges. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, Auswertungen durch Datenbanken und für die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme. Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe (einschließlich Mikrokopie) sowie der Auswertung durch Datenbanken oder ähnliche Einrichtungen, vorbehalten.

Copyright © 2010 Diplomica Verlag GmbH
ISBN: 9783836647427

Alain Hamid

**Zu multivariaten Renditeverteilungen und Copulas in
der Finanzmarktstatistik**

Alain Hamid

Zu multivariaten Renditeverteilungen und Copulas in der Finanzmarktstatistik

Alain Hamid

Zu multivariaten Renditeverteilungen und Copulas in der Finanzmarktstatistik

ISBN: 978-3-8366-4742-7

Herstellung: Diplomica® Verlag GmbH, Hamburg, 2010

Zugl. Universität Augsburg, Augsburg, Deutschland, Diplomarbeit, 2010

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Die Informationen in diesem Werk wurden mit Sorgfalt erarbeitet. Dennoch können Fehler nicht vollständig ausgeschlossen werden und der Verlag, die Autoren oder Übersetzer übernehmen keine juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für evtl. verbliebene fehlerhafte Angaben und deren Folgen.

© Diplomica Verlag GmbH

<http://www.diplomica.de>, Hamburg 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Grundlagen	7
2.1	Hinweise zur Notation	7
2.2	Gemeinsame Verteilungen	7
2.3	Randverteilungen	8
2.4	Maßzahlen gemeinsamer Verteilungen	9
2.4.1	Erwartungswertvektor	10
2.4.2	Kovarianzmatrix	10
2.4.3	Korrelationsmatrix	12
2.5	Statistisches Schätzen	13
2.6	Begriffe aus der Finanzwirtschaft	14
2.6.1	Value at Risk	14
2.6.2	Diskrete und stetige Rendite	14
3	Multivariate Renditeverteilungen	16
3.1	Multivariate Normalverteilung	16
3.1.1	Grundlagen und Besonderheiten	17
3.1.2	Test auf multivariate Normalverteilung	21
3.1.3	Kritische Betrachtung	28
3.2	Elliptische Verteilungen	28
3.2.1	Grundlagen	28
3.2.2	Schätzung der Parameter	30
3.2.3	Die multivariate t-Verteilung	30
3.2.3.1	Grundlagen	30
3.2.3.2	Spezielle Parameterwerte	30
3.2.4	Kritik	33
3.3	Die gemischte multivariate Normalverteilung	33
3.3.1	Grundlagen	34
3.3.2	Bestimmung der Verteilungsparameter	36
3.3.3	Kritik	38
3.4	Die generalisierte multivariate hyperbolische Verteilung	38
3.4.1	Grundlagen	39
3.4.2	Einige Spezialfälle	40
3.5	Überblick zu multivariaten Verteilungen	41

4	Copulas	43
4.1	Grundlagen	43
4.2	Eigenschaften	46
4.3	Fundamentale Copulas	48
4.4	Copula-basierte Abhängigkeitsmaße	50
4.4.1	Spearman's Rho	51
4.4.2	Kendall's Tau	52
4.4.3	Tail Dependence	53
4.5	Bivariate Copulas	55
4.6	Elliptische Copulas	58
4.6.1	Gauß-Copula	58
4.6.2	t-Copula	60
4.7	Archimedische Copulas	61
4.7.1	Grundlagen	61
4.7.2	Cook-Johnson-Copula	62
4.7.3	Gumbel-Copula	63
4.7.4	Frank-Copula	63
4.8	Simulation	64
4.8.1	Die bedingte Inversionsmethode	64
4.8.2	Die bedingte Inversionsmethode für archimedische Copulas	66
4.9	Schätzmethoden für Copulamodelle	67
4.9.1	Parametrische Schätzung	67
4.9.1.1	Exakte Maximum-Likelihood-Schätzung	68
4.9.1.2	Die Methode der Inferenzfunktionen für die Randverteilungen	68
4.9.2	Semiparametrische Schätzung	70
4.9.2.1	Schätzung mittels Copula-basierter Abhängigkeitsmaße	71
4.9.3	Nichtparametrische Schätzung	72
4.9.3.1	Die empirische Copula nach Deheuvels	72
4.10	Anpassungstests für parametrische Copulas	73
4.10.1	Der Chi-Quadrat Anpassungstest für bivariate Copula-Modelle von Dobrić und Schmid (2005)	74
4.11	Abschlussbeispiel	77
5	Schluss	83
A	Tabellen	85
B	Matlab-Quellcodes	87
B.1	VaR	87
B.2	MNVTTest	89
B.3	nueSchaetzung	91

Inhaltsverzeichnis

B.4	copteststudent	93
B.5	Ct_test	96
B.6	coptestclayton	97
B.7	coptestgumbel	100
Literatur		103

Abbildungsverzeichnis

3.1	Bivariate Standardnormalverteilung mit unterschiedlichen Varianzen: Dichte (links) und Höhenlinien (rechts).	19
3.2	Standardnormalverteilung (schwarz) und t -Verteilung mit Freiheitsgraden 1 (rot), 5 (blau) und 30 (grün).	31
3.3	Die ML-Funktion in Abhängigkeit von ν , ausgewertet in $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ und $\frac{\nu-2}{\nu}\mathbf{S}$	33
3.4	(a) Bivariate Dichte, (b) Querschnitt entlang der x-Achse, (c) Querschnitt entlang der y-Achse, (d) Univariate gemischte Normalverteilung.	35
4.1	Die beiden Komponenten einer multivariaten Verteilungsfunktion. Angelehnt an Abbildung 3.6 aus Schmid und Trede (2006).	44
4.2	Synthese einer gemeinsamen Verteilungsfunktion aus einer Copula und den Randverteilungen.	45
4.3	3-D-Plot und Höhenlinien der Copulas W , Π und M	50
4.4	Dichte und Höhenlinien der aus Gauß-Copula und t -verteilten Rändern (Freiheitsgrad 3) resultierenden Verteilung. Der Korrelationskoeffizient ρ ist gleich 0.2 (oben) bzw. 0.85 (unten).	60
4.5	Plot der stetigen wöchentlichen Renditen von Daimler und BMW.	78

Tabellenverzeichnis

3.1	Wöchentliche stetige Renditen von Daimler, BMW und VW.	25
3.2	Auswertung des Tests von Mardia bzgl. des Datensatzes <i>Automobilbranche</i>	27
3.3	Inklusionsrelationen einiger Klassen von (multivariaten) Wahrscheinlichkeitsverteilungen.	42
4.1	Ausgewählte Copulas und Formeln der zugehörigen Abhängigkeitsmaße.	56
4.2	Auswertung des GoF-Tests nach Dobrić und Schmid (2005), bei Schätzung von $\hat{\theta}$ mittels Kendall's τ	81
4.3	Zweite Auswertung des GoF-Tests nach Dobrić und Schmid (2005). $\hat{\theta}$ wurde diesmal während des Tests implizit geschätzt.	81
A.1	Auswertung des MNV Tests von Mardia bzgl. der Renditen von Daimler und BMW aus dem Datensatz <i>Automobilbranche</i>	85
A.2	Wöchentliche Freitagsschlusskurse von Daimler, BMW und VW. Quelle: http://money.de.msn.com/	86

1 Einleitung

Die Liste der möglichen Mitschuldigen an der aktuellen Weltwirtschafts- und Finanzkrise ist lang und reicht von bekannten Personen wie Alan Greenspan bis hin zu dem eher unbekanntem Richard Fuld.¹ Spätestens seit dem Artikel „Formula From Hell“ in Lee (2009) hat sich die Liste um einen Kandidaten verlängert, um ein mathematisches Konstrukt, genauer gesagt die Gauß-Copula. In diesem Artikel wird beschrieben, wie verschiedene Institutionen versuchten Ausfallwahrscheinlichkeiten in sehr komplexen Finanzinstrumenten mit Hilfe der Gauß-Copula zu schätzen. Diese Formel wurde unter anderem von namhaften Banken, wie JPMorgan Chase, aber auch den weltweit führenden Ratingagenturen Moody's und Standard & Poor's genutzt.

Natürlich macht es wenig Sinn für den Zusammenbruch der Finanzmärkte eine Formel verantwortlich zu machen - vielmehr kann nur ihre falsche Anwendung dazu beigetragen haben. Deshalb ist es wünschenswert nachvollziehen zu können, mit welchen Methoden Banker oder Finanzwirtschaftler versuchen, die Risiken von Kapitalanlagen zu überblicken.

Ziel dieser Diplomarbeit ist es mathematische Hintergrundkenntnisse zu vermitteln, die für das Verständnis der in Finanzmärkten verwendeten Verfahren unerlässlich sind. Somit können Fehler im Risikomanagement, die im Vorfeld der Finanzkrise zweifellos begangen wurden, besser eingeordnet werden. Dabei werden klassische Methoden, die seit mehr als 50 Jahren Anwendung finden, ebenso beleuchtet wie aktuelle Ansätze. Hierzu gehören z.B. moderne Verteilungsklassen, oder die - in der Finanzwirtschaft erst seit kurzem eingesetzten- Copulas. Weiterhin wird dem Leser vermittelt, worin die Ursachen für die stetig steigende Beliebtheit des Copula-Konzepts zu suchen sind.² Um das Verständnis zu erleichtern und auf mögliche Probleme bei der praktischen Umsetzung der theoretischen Erkenntnisse hinzuweisen, werden an geeigneten Stellen Berechnungen mit realen Marktdaten durchgeführt. Zur Durchführung dieser Berechnungen wurden mehrere Algorithmen in der Programmiersprache *Matlab* implementiert.

¹ Richard Severin Fuld war der letzte Vorsitzende der US-Investmentbank Lehman Brothers und leitete diese bis zu ihrem Konkurs am 15. September 2008. Der Untergang dieser Großbank wird von vielen Finanzexperten als entscheidender Negativbeitrag für die gravierenden Ausmaße der Finanzkrise gesehen.

² Während eine Google-Suchanfrage des Begriffs „Copula“ im Jahre 2003 circa 10.000 Treffer zur Folge hatte, waren es 2005 bereits 650.000. Heute sind es etwa 933.000 Treffer, vgl. (Mikosch, 2006, S. 1).

Der Rest der Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

In Kapitel 2 erfolgt eine Einführung in die Grundlagen multivariater Verteilungen, sowie eine Klärung wichtiger finanzmathematischer Fachbegriffe.

Im 3. Kapitel werden ausgewählte Klassen multivariater Verteilungen vorgestellt. Zudem werden in einem Beispiel mögliche Anwendungen illustriert.

Das 4. Kapitel beschäftigt sich ausführlich mit dem Konzept der Copulas. Es erfolgt eine detaillierte Einführung der theoretischen Eigenschaften, sowie eine Darstellung der verbreitetsten Copula-Familien. Abgeschlossen wird das Kapitel mit einem praxisbezogenen Beispiel.

Im 5. Kapitel werden die gewonnenen Erkenntnisse zusammengefasst und mögliche Schlussfolgerungen gezogen. Darüber hinaus erhält der Leser einen Einblick in aktuelle Forschungsergebnisse.