Naturwissenschaft

Elke Weigert

Zur Simulation Approximierbarkeit einer Funktion samt Ableitungen durch Polynome

Diplomarbeit

Diplom.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de/ abrufbar.

ISBN: 9783832404024

http://www.diplom.de/e-book/216377/zur-simulation-approximierbarkeit-einer-funktion-samt-ableitungen-durch

Elke Weigert

Zur Simulation Approximierbarkeit einer Funktion samt Ableitungen durch Polynome

Diplom.de

Elke Weigert

Zur Simulation Approximierbarkeit einer Funktion samt Ableitungen durch Polynome

Diplomarbeit
an der Universität Regensburg
April 1997 Abgabe

Diplom.de

Diplomica GmbH
Hermannstal 119k
22119 Hamburg

Fon: 040 / 655 99 20
Fax: 040 / 655 99 222

agentur@diplom.de
www.diplom.de

ID 402

ID 402
Weigert, Elke: Zur Simulation Approximierbarkeit einer Funktion samt Ableitungen durch Polynome / Elke Weigert · Hamburg: Diplomica GmbH, 1997
Zugl.: Regensburg, Universität, Diplom, 1997

Diplomica GmbH
http://www.diplom.de, Hamburg 1997
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung

Der vorliegenden Diplomarbeit liegt im wesentlichen der Artikel *„Simultaneous approximation by polynomial projection operators“* von T.F. Xie und S.P. Zhou zugrunde (vgl. [XZ]). Er behandelt die Approximierbarkeit einer Funktion $f \in C^q[-1,1]$ samt ihrer Ableitungen durch Polynome P_n vom Grad $\leq n$, wenn die Übereinstimmung von f und P_n auf gewissen Systemen Y_n von Interpolationsknoten gefordert wird. Die Stützstellen aus Y_n konvergieren dabei wie $O(n^{-2})$ gegen $+1$ bzw. -1.

Einen Überblick über die Vorgehensweise der Arbeit liefert die folgende Zusammenstellung.

Zu Beginn werden die in der Arbeit verwendeten Hilfsmittel bereitgestellt. Hierzu gehören die Hermitesche Interpolation und die trigonometrischen Polynome, die Fourierreihe und ihre n-te Partialsumme und das Mittel von de la Vallée-Poussin. Ferner definiert man für $f \in C[-1,1]$ das Stetigkeitsmaß $\omega(f,h)$ und die Schmiegungsmaße $\omega_r(f,h)$. Als Approximationsgrad $E_n(f)$ bezeichnet man den Abstand von f zum Raum $\mathcal{P}_n$ aller Polynome vom Grad $\leq n$ bezüglich der Maximumsnorm.

Der Inhalt des zweiten Kapitels ist im wesentlichen der Beweis der Jackson-Sätze. Diese Sätze schätzen den Approximationsgrad stetiger Funktionen ab, insbesondere durch das Stetigkeitsmaß der Ableitungen dieser Funktionen. Hierbei gelingt in Theorem 2.13 für $f \in C^q[-1,1]$ eine Abschätzung

$$E_n(f) = O(n^{-q})\omega(f^{(q)}, n^{-1}).$$

Für den Beweis der Jackson-Sätze sind in der Literatur unterschiedliche Methoden bekannt. In dieser Arbeit werden die Eigenschaften spezieller trigonometrischer Polynome, der sogenannten Jackson-Kerne und Jackson-Operatoren, benutzt.

Das dritte Kapitel behandelt weitergehende Sätze über die Approximierbarkeit stetig differenzierbarer Funktionen durch Polynome, insbesondere das Theorem von Timan. Man definiert

$$\Delta_n(x) := \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}$$

und zeigt hiermit, daß zu $f \in C^q[-1,1]$ Polynome P_n vom Grad $\leq n$ $(n \geq q)$ existieren, so daß gilt

$$|f(x) - P_n(x)| = O(1)\Delta_n^q(x)\omega(f^{(q)}, \Delta_n(x)).$$

Im Mittelpunkt des vierten Kapitels stehen die Bernstein-Ungleichung und tiefergehende Aussagen für die Ableitung von Polynomen. Die Bernstein-Ungleichung zeigt für die Ableitung trigonometrischer Polynome T_n vom Grad $\leq n$ die Abschätzung

$$\|T_n'\| \leq n\|T_n\|.$$

Auf algebraische Polynome läßt sich diese Ungleichung nur bedingt übertragen. Daher zeigt man für algebraische Polynome P_n vom Grad $\leq n$, die für ein beliebiges Stetigkeitsmaß ω die Bedingung

$$|P_n(x)| \leq \Delta_n^r(x)\omega(\Delta_n(x))$$

erfüllen, die Abschätzung

$$\left|P_n'(x)\right| \leq O(1)\Delta_n^{r-1}(x)\omega(\Delta_n(x)).$$

Das fünfte und sechste Kapitel beschäftigen sich mit dem Beweis des Theorems von Gopengauz und des Theorems von Kilgore. Das Theorem von Gopengauz liefert eine Verschärfung des Theorems von Timan aus dem dritten Kapitel. Hierbei wird $\Delta_n(x)$ durch $\delta_n(x) := n^{-1}\sqrt{1-x^2}$ ersetzt. Zu $f \in C^q[-1,1]$ existieren Polynome P_n vom Grad $\leq n$ $(n \geq 2q+1)$, so daß für $x \in [-1,1]$ gilt

$$|f(x) - P_n(x)| = O(1)\delta_n^q(x)\omega(f^{(q)}, \delta_n(x)).$$

Diese Polynome interpolieren f einschließlich der Ableitungen bis zur Ordnung q in den Stützstellen $+1$ und -1. Entsprechende verschärfte Abschätzungen gelten dann auch für die Ableitungen von f und P_n. Das Theorem von Kilgore liefert ähnliche Ergebnisse, wobei hier der Approximationsgrad $E_{n-q}(f^{(q)})$ das Stetigkeitsmaß $\omega(f^{(q)}, \delta_n(x))$ ersetzt.

Im Mittelpunkt des letzten Kapitels steht die Approximierbarkeit stetig differenzierbarer Funktionen durch Polynome, die in Stützstellensystemen Y_n interpolieren. Diese Systeme zeichnen sich dadurch aus, daß ihre Knoten wie $O(n^{-2})$ gegen $+1$ bzw. -1 konvergieren und ihre Knotenzahl konstant ist. Auf derartige interpolierende Polynome werden die Aussagen der Theoreme von Gopengauz und von Kilgore übertragen. Im zweiten Teil des Kapitels betrachtet man ein Approximationsverfahren, das auf K. Balàsz und T. Kilgore (vgl. [BK2]) zurückgeht. In diesem Verfahren wird ein Projektions-Operator L_n mit der Interpolation auf Y_n in geeigneter Weise kombiniert. Vorgegeben sind beschränkte Projektions-Operatoren L_n, die Funktionen aus $C[-1,1]$ in die Menge $\mathcal{P}_n$ der algebraischen Polynome vom

Grad $\leq n$ abbilden und anstelle der Linearität die schwächere Bedingung

$$L_n(f + P_n, x) = L_n(f, x) + L_n(P_n, x)$$

für $f \in C[-1, 1]$ und $P_n \in \mathcal{P}_n$ erfüllen. Hieraus konstruiert man die Operatoren R_{n+q}, die ähnliche Eigenschaften wie L_n besitzen und zusätzlich die vorgegebene Funktion auf Y_n interpolieren. In Theorem 7.7 erzielt man bei Approximation durch die Operatoren R_{n+q} für $x \in [-1, 1]$ Abschätzungen durch

$$O(1)\Delta_n^{q-2l-2}(x)\delta_n^{2l+2}(x)E_n(f^{(q)})\|L_n\|.$$

Gleichmäßige Konvergenz des Operators R_{n+q} gegen die vorgegebene Funktion f erhält man, falls

$$E_n(f^{(q)}) \cdot \|L_n\| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

erfüllt ist. Diese Bedingung erreicht man durch zusätzliche Voraussetzungen an die Projektions-Operatoren L_n, beispielsweise für den Lagrange-Interpolations-Operator $\tilde{L}_n$ bezüglich der Tschebyscheff-Stützstellen bei hinreichend glattem $f \in C^q[-1, 1]$.

Abschließend möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Ekkehard Wagenführer bedanken, der mir dieses Thema stellte. Bei der Anfertigung der Diplomarbeit betreute er mich hervorragend und unterstützte mich durch wertvolle Ratschläge und Anregungen.

1. Grundlagen und Bezeichnungen

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die in der Arbeit verwendeten Hilfsmittel. Es sei $C^q[-1,1]$ die Menge der q-mal stetig differenzierbaren, reellwertigen Funktionen auf dem kompakten Intervall $[-1,1]$ und $C[-1,1]$ speziell die Menge der stetigen, reellwertigen Funktionen auf $[-1,1]$. Ferner sei C^* die Menge der stetigen, reellwertigen, 2π-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Weiter bezeichne $\mathcal{P}_n$ den Raum der algebraischen Polynome vom Grad $\leq n$ und $\mathcal{T}_n$ den Raum der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$. Die Norm $\|\cdot\|$ sei stets die Maximumsnorm.

Bezeichnung 1.1 *Es seien f und g zwei in der Umgebung U von x_0 definierte Funktionen. Dann schreibt man kurz*

$$f(x) = O(g(x)),$$

genau dann, wenn es eine Umgebung $\tilde{U} \subseteq U$ von x_0 gibt, so daß mit einer Konstante $M > 0$ für alle $x \in \tilde{U} \setminus \{x_0\}$ gilt

$$|f(x)| \leq M\,|g(x)|\,.$$

Für Abschätzungen der Form

$$|B| \leq MC \leq \tilde{M}D$$

mit Konstanten M und $\tilde{M} > 0$ und Termen B, C und D vereinbart man folgende vereinfachte Schreibweise

$$|B| \leq MC \leq MD.$$

1.1. Hermitesche Interpolation

In diesem Abschnitt beschäftigt man sich mit den Begriffen des Hermiteschen Interpolationspolynoms und des interpolierenden Polynoms für stetige Funktionen. Hierzu führt man folgende Bezeichnungen ein:

Bezeichnung 1.2 *Man bezeichnet folgende Problemstellung als* **Hermitesche Interpolationsaufgabe** (vgl. [MW], Seite 183)*:*
Vorgegeben seien paarweise verschiedene $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ und dazu $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{N}_+$. Ferner sei zu jedem $\rho \in \{0, 1, ..., \alpha_i - 1\}$ und zu jedem $i \in \{0, 1, ..., n\}$ ein $f_i^{(\rho)} \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Gesucht ist dann ein Polynom H mit den Eigenschaften

(H1) *Grad* $H \leq m := \alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_n - 1$,

(H2) $H^{(\rho)}(x_i) = f_i^{(\rho)}$ *für* $\rho = 0, 1, ..., \alpha_i - 1$ *und* $i = 0, 1, ..., n$.

Das Polynom H *heißt* **Hermitesches Interpolationspolynom**. *Falls* $\alpha_i = 1$ *für alle* $i = 0, 1, ..., n$, *so bezeichnet man* H *als* **Lagrangesches Interpolationspolynom**.

Bezeichnung 1.3 *Vorgegeben seien Werte* $x_0, x_1, ..., x_n \in I\!R$ *und dazu paarweise verschiedene Werte* $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_m \in I\!R$, *so daß* $x_i = \tilde{x}_j$ *für genau* α_i *Werte. Hierbei gelte* $\alpha_i \leq q$. *Dann sagt man für eine* q*-mal stetig differenzierbare Funktion* f *und ein Polynom* H:

H *ist* **interpolierendes Polynom** *von* f *auf* $\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_m\}$

genau dann, wenn gilt

$$H^{(\rho)}(x_i) = f^{(\rho)}(x_i) \quad (\rho = 0, 1, ..., \alpha_i - 1, i = 0, 1, ..., n).$$

Für die Hermitesche Interpolationsaufgabe erhält man nun folgende Aussage (vgl. [Wal]):

Satz 1.4 *Die Hermitesche Interpolationsaufgabe ist eindeutig lösbar.*

Für den Beweis des Satzes zeigt man zunächst

Hilfssatz 1.5 *Vorgegeben seien ein algebraisches Polynom* S *vom Grad* $\leq m$, *ein* $x_0 \in I\!R$ *und ein* $\alpha_0 \in I\!N_+$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $S^{(\rho)}(x_0) = 0$ *für* $\rho = 0, 1, ..., \alpha_0 - 1$,

(2) $S(x)$ *ist teilbar durch* $(x - x_0)^{\alpha_0}$.

Beweis von Hilfssatz 1.5. Mit dem Satz von Taylor gilt

$$S(x) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{1}{\nu!} S^{(\nu)}(x_0)(x - x_0)^{\nu}. \tag{1.1}$$

Nun sei zuerst $S^{(\rho)}(x_0) = 0$ für $\rho = 0, 1, ..., \alpha_0 - 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{\nu=0}^{m} \frac{1}{\nu!} S^{(\nu)}(x_0)(x - x_0)^{\nu} = \sum_{\nu=\alpha_0}^{m} \frac{1}{\nu!} S^{(\nu)}(x_0)(x - x_0)^{\nu} \\ &= (x - x_0)^{\alpha_0} \sum_{\nu=\alpha_0}^{m} \frac{1}{\nu!} S^{(\nu)}(x_0)(x - x_0)^{\nu - \alpha_0}, \end{aligned}$$

und daher ist $S(x)$ teilbar durch $(x-x_0)^{\alpha_0}$. Es folgt also (2) aus (1). Nun sei $S(x)$ teilbar durch $(x-x_0)^{\alpha_0}$. Daher existiert ein Polynom $Q(x)$ vom Grad $\leq m-\alpha_0$ mit

$$S(x) = (x-x_0)^{\alpha_0} Q(x) = (x-x_0)^{\alpha_0} \sum_{k=0}^{m-\alpha_0} c_k (x-x_0)^k = \sum_{\nu=\alpha_0}^{m} c_{\nu-\alpha_0}(x-x_0)^{\nu}. \quad (1.2)$$

Vergleicht man nun die Koeffizienten von (1.1) und (1.2), so ergibt sich

$$S^{(\rho)}(x_0) = 0 \text{ für } \rho = 0, 1, ..., \alpha_0 - 1,$$

und es folgt (1) aus (2). Insgesamt ist dann Hilfssatz 1.5 gezeigt. □

Beweis von Satz 1.4. Man zeigt zunächst die Eindeutigkeit des Hermiteschen Interpolationspolynoms. Dabei seien H und $\tilde{H}$ Polynome mit den oben geforderten Eigenschaften (H1) und (H2). Nun setze man $S := H - \tilde{H}$. Dann ergibt sich für $\rho = 0, 1, ..., \alpha_i - 1$ und $i = 0, 1, ..., n$

$$S^{(\rho)}(x_i) = H^{(\rho)}(x_i) - \tilde{H}^{(\rho)}(x_i) = 0.$$

Daher ist $S(x)$ teilbar durch $(x-x_i)^{\alpha_i}$ $(i = 0, 1, ..., n)$ und sogar durch $\prod_{i=0}^{n}(x-x_0)^{\alpha_i}$, da die $x - x_i$ paarweise teilerfremd sind. Nun ist $\prod_{i=0}^{n}(x-x_0)^{\alpha_i}$ ein Polynom vom Grad $m+1$, und zugleich ist Grad $S \leq m$. Daher ergibt sich $S \equiv 0$, und somit ist eine existierende Lösung auch eindeutig. Nun zeigt man die Existenz einer solchen Lösung. Dabei setze man

$$H(x) := \sum_{j=0}^{m} b_j x^j.$$

Die Bedingungen

$$H^{(\rho)}(x_i) = f_i^{(\rho)} \text{ für } \rho = 0, 1, ..., \alpha_i - 1 \text{ und } i = 0, 1, ..., n$$

definieren dann ein lineares Gleichungssystem mit $m+1$ Gleichungen und $m+1$ Unbekannten. Da H eindeutig ist, liefert die Koeffizientenmatrix eine injektive Abbildung, und da die Matrix quadratisch ist, ist sie bijektiv. Demnach ist das Gleichungssystem lösbar und die Existenz einer Lösung gesichert. Damit ist Satz 1.4 gezeigt. □

Nun soll kurz angeführt werden, wie das **Lösungspolynom der Hermiteschen Interpolationaufgabe** konstruiert wird. Dabei werden die Bezeichnungen aus [MW], Seite 183 ff übernommen. Hierzu setze man

$$w_\nu(x) = \prod_{\substack{\sigma=0 \\ \sigma\neq\nu}}^{n} (x - x_\sigma)^{\alpha_\sigma} \text{ für } \nu = 0, 1, ..., n$$

und

$$h_{\nu,\mu}(x) = w_\nu(x)(x - x_\nu)^\mu \text{ für } \mu = 0, 1, ..., \alpha_\nu - 1 \text{ und } \nu = 0, 1, ..., n.$$

Dabei gilt für $\rho = 0, 1, ..., \alpha_i - 1$ und $i = 0, 1, ..., n$

$$h_{\nu,\mu}^{(\rho)}(x_i) \begin{cases} \neq 0, & \text{falls } \nu = i \text{ und } \mu = \rho, \\ = 0, & \text{falls } \nu \neq i \text{ oder } (\nu = i \text{ und } \mu > \rho). \end{cases}$$

Für festes $\nu \in \{0, 1, ..., n\}$ definiert man dann rekursiv

$$l_{\nu,\alpha_\nu-1}(x) := \frac{1}{h_{\nu,\alpha_\nu-1}^{(\alpha_\nu-1)}(x_\nu)} h_{\nu,\alpha_\nu-1}(x)$$

und

$$l_{\nu,\mu}(x) := \frac{1}{h_{\nu,\mu}^{(\mu)}(x_\nu)} \left(h_{\nu,\mu}(x) - \sum_{\sigma=\mu+1}^{\alpha_\nu-1} h_{\nu,\mu}^{(\sigma)}(x_\nu) l_{\nu,\sigma}(x) \right) \text{ für } \mu = 0, 1, ..., \alpha_\nu - 2.$$

Dabei sind die Polynome $l_{\nu,\mu}$ vom Grad $\leq m$. Nun setze man

$$H(x) := \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{\alpha_\nu-1} f_\nu^{(\mu)} l_{\nu,\mu}(x).$$

Dann ist $H(x)$ das gesuchte Hermitesche Interpolationspolynom.

Bemerkung 1.6 *Die Polynome w_ν, $h_{\nu,\mu}$ und $l_{\nu,\mu}$ sind nicht von f_ν abhängig.*

Im Spezialfall von nur zwei paarweise verschiedenen Stützstellen erfüllt das Hermitesche Interpolationspolynom die anschließend notierte Aussage.

Hilfssatz 1.7 *Vorgegeben seien eine Funktion $f \in C^q[-1,1]$ und Stützstellen x_0 und $x_1 \in I\!R$, wobei $x_0 \neq x_1$. Ferner sei H das Hermitesche Interpolationspolynom von f vom Grad $\leq 2q+1$ zu x_0 und x_1 mit*

$$H^{(\rho)}(x_i) = f^{(\rho)}(x_i) \textit{ für } \rho = 0,1,...,q \textit{ und } i = 0,1.$$

Dann existieren zu $\mu = 0,1,...,q$ Polynome $A_\mu(x)$ und $B_\mu(x)$ vom Grad $\leq 2(q-\mu)+1$, so daß gilt

$$H(x) = \sum_{\mu=0}^{q} (x-x_0)^\mu (x-x_1)^\mu \left(f^{(\mu)}(x_0) A_\mu(x) + f^{(\mu)}(x_1) B_\mu(x) \right).$$

Beweis von Hilfssatz 1.7. Man verwendet hier die oben eingeführten Bezeichnungen $l_{\nu,\mu}$ und $h_{\nu,\mu}$. Für das Hermitesche Interpolationspolynom H von f existiert eine Darstellung

$$H(x) = \sum_{\mu=0}^{q} \left(f^{(\mu)}(x_0) l_{0,\mu}(x) + f^{(\mu)}(x_1) l_{1,\mu}(x) \right),$$

wobei die $l_{0,\mu}$ und die $l_{1,\mu}$ Polynome vom Grad $\leq 2q+1$ sind. Nun zeigt man, daß zu $\mu = 0,1,...,q$ Polynome $A_\mu(x)$ und $B_\mu(x)$ vom Grad $\leq (2q-\mu)+1$ existieren, so daß gilt

$$l_{0,\mu}(x) = (x-x_0)^\mu (x-x_1)^\mu A_\mu(x) \tag{1.3}$$

und

$$l_{1,\mu}(x) = (x-x_0)^\mu (x-x_1)^\mu B_\mu(x). \tag{1.4}$$

Dies wird gezeigt durch Induktion nach s, wobei $q - s := \mu$. Hierfür sei zunächst $s = 0$. Dann gilt nach obiger Konstruktion

$$l_{0,q} = \frac{1}{h_{0,q}^{(q)}(x_0)} h_{0,q}(x) = \frac{1}{h_{0,q}^{(q)}(x_0)} (x-x_1)^q (x-x_o)^q$$

$$=: A_q(x)(x-x_1)^q(x-x_0)^q.$$

Hierbei ist A_q vom Grad $\leq 2(q-\mu)+1 = 1$, und somit ist der Hilfssatz für den Induktionsanfang $s = 0$ gezeigt. Nun gelte als Induktionsvoraussetzung für $\mu = q - s$ und $s \geq 0$:

Es existiert ein Polynom $A_\mu(x)$ vom Grad $\leq 2(q-\mu)+1$ mit

$$l_{0,\mu}(x) = (x-x_0)^\mu (x-x_1)^\mu A_\mu(x).$$

Dann erhält man

$$l_{0,\mu-1}(x) = \frac{1}{h_{0,\mu-1}^{(\mu-1)}(x_0)} \left(h_{0,\mu-1}(x) - \sum_{\sigma=\mu}^{q} h_{0,\mu-1}^{(\sigma)}(x_0) l_{0,\sigma}(x) \right).$$

Dabei gilt

$$h_{0,\mu-1}(x) = (x-x_1)^q (x-x_0)^{\mu-1} = (x-x_0)^{\mu-1}(x-x_1)^{\mu-1}(x-x_1)^{q-\mu+1}$$

und nach Induktionsvoraussetzung für $\sigma = \mu, \mu+1, ..., q$

$$l_{0,\sigma}(x) = (x-x_0)^\sigma (x-x_1)^\sigma A_\sigma(x).$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma=\mu}^{q} h_{0,\mu-1}^{(\sigma)}(x_0) l_{0,\sigma}(x) \\ =&(x-x_0)^{\mu-1}(x-x_1)^{\mu-1} \sum_{\sigma=\mu}^{q} h_{0,\mu-1}^{(\sigma)}(x_0)(x-x_0)^{\sigma-\mu+1}(x-x_1)^{\sigma-\mu+1} A_\sigma(x). \end{aligned}$$

Man setze nun

$$\begin{aligned} A_{\mu-1}(x) := &\frac{1}{h_{0,\mu-1}^{(\mu-1)}(x_0)} \times \\ &\times \left((x-x_1)^{q-\mu+1} - \sum_{\sigma=\mu}^{q} h_{0,\mu-1}^{(\sigma)}(x_0)(x-x_0)^{\sigma-\mu+1}(x-x_1)^{\sigma-\mu+1} A_\sigma(x) \right). \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\text{Grad } A_{\mu-1}(x) = \text{Grad } l_{0,\mu-1} - 2\mu + 2 \leq 2(q-\mu+1)+1,$$

und damit ist (1.3) gezeigt. Zum Beweis von (1.4) geht man nun in analoger Weise vor und erhält insgesamt Hilfssatz 1.7. $\square$

Der anschließend notierte Satz zeigt, daß unter bestimmten Voraussetzungen das Interpolationspolynom einer Funktion f direkt aus f und den vorgegebenen Stützstellen gewonnen werden kann. Diese Darstellung des Interpolationspolynoms wird mehrmals in Kapitel 7 für den Beweis von Theorem 7.2 benutzt.

Satz 1.8 *Vorgegeben seien paarweise verschiedene Stützstellen* $t_0, t_1, .., t_k \in [-1,1]$ *und dazu* $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k \in I\!N_+$ *mit* $\alpha_i \leq q$. *Ferner sei* $f \in C^q[-1,1]$ *vorgegeben mit*

$$f^{(\rho)}(t_i) = 0 \text{ für } \rho = 0, 1, ..., \alpha_i - 1 \text{ und } i = 0, 1, ..., k.$$

Man setze $\tilde{\alpha} := \sum_{i=0}^{k} \alpha_i$.

1.Fall: $t_{k+1} \in [-1,1] \setminus \{t_0, t_1, ..., t_k\}$: *Dann existiert ein Polynom* $q(t)$ *vom Grad* $\leq \tilde{\alpha}$ *mit*

(1) $q^{(\rho)}(t_i) = f^{(\rho)}(t_i)$ $(= 0)$ *für* $\rho = 0, 1, ..., \alpha_i - 1$ *und* $i = 0, 1, ..., k$,

(2) $q(t_{k+1}) = f(t_{k+1})$,

nämlich

$$q(t) = \frac{f(t_{k+1})}{\prod_{i=0}^{k}(t_{k+1} - t_i)^{\alpha_i}} \prod_{i=0}^{k} (t - t_i)^{\alpha_i}.$$

2.Fall: $t_{k+1} \in \{t_0, t_1, ..., t_k\}$: *Man wähle ohne Einschränkung* $t_{k+1} = t_k$. *Dann existiert ein Polynom* $q(t)$ *vom Grad* $\leq \tilde{\alpha}$ *mit*

(3) $q^{(\rho)}(t_i) = f^{(\rho)}(t_i)$ $(= 0)$ *für* $\rho = 0, 1, ..., \alpha_i - 1$ *und* $i = 0, 1, ..., k$,

(4) $q^{(\alpha_k)}(t_{k+1}) = f^{(\alpha_k)}(t_{k+1})$,

nämlich

$$q(t) = \frac{f^{(\alpha_k)}(t_{k+1})}{\alpha_k! \prod_{i=0}^{k-1}(t_{k+1} - t_i)^{\alpha_i}} \prod_{i=0}^{k} (t - t_i)^{\alpha_i}.$$

3.Fall: $t_{k+1}, t_{k+2} \in [-1,1] \setminus \{t_0, t_1, ..., t_k\}, t_{k+1} \neq t_{k+2}$: *Dann existiert ein Polynom* $q(t)$ *vom Grad* $\leq \tilde{\alpha} + 1$ *mit*

(5) $q^{(\rho)}(t_i) = f^{(\rho)}(t_i)$ $(= 0)$ *für* $\rho = 0, 1, ..., \alpha_i - 1$ *und* $i = 0, 1, ..., k$,

(6) $q(t_{k+1}) = f(t_{k+1})$ *und* $q(t_{k+2}) = f(t_{k+2})$,

nämlich

$$q(t) = \frac{1}{t_{k+1} - t_{k+2}} \left((t - t_{k+2})\; q_1(t) - (t - t_{k+1})\; q_2(t) \right),$$

wobei q_1 das Polynom aus dem 1.Fall durch Hinzunahme von t_{k+1} und q_2 das Polynom aus dem 1.Fall durch Hinzunahme von t_{k+2} sei.

4.Fall: $t_{k+1}, t_{k+2} \in \{t_0, t_1, ..., t_k\}, t_{k+1} \neq t_{k+2}$: *Man wähle ohne Einschränkung $t_{k+1} = t_k$ und $t_{k+2} = t_0$. Dann existiert ein Polynom $q(t)$ vom Grad $\leq \tilde{\alpha} + 1$ mit*

(7) $q^{(\rho)}(t_i) = f^{(\rho)}(t_i)\ (= 0)$ *für* $\rho = 0, 1, ..., \alpha_i - 1$ *und* $i = 0, 1, ..., k$,

(8) $q^{(\alpha_k)}(t_{k+1}) = f^{(\alpha_k)}(t_{k+1})$,

(9) $q^{(\alpha_0)}(t_{k+2}) = f^{(\alpha_0)}(t_{k+2})$,

nämlich

$$q(t) = \frac{1}{t_{k+1} - t_{k+2}} \left((t - t_{k+2})\; q_3(t) - (t - t_{k+1})\; q_4(t) \right),$$

wobei q_3 das Polynom aus dem 2.Fall durch Hinzunahme von t_{k+1} und q_4 das Polynom aus dem 2.Fall durch Hinzunahme von t_{k+2} sei.

5.Fall: $t_{k+1} \in \{t_0, t_1, ..., t_k\}, t_{k+2} \notin \{t_0, t_1, ..., t_k\}$: *Man wähle ohne Einschränkung $t_{k+1} = t_k$. Dann existiert ein Polynom $q(t)$ vom Grad $\leq \tilde{\alpha} + 1$ mit*

(10) $q^{(\rho)}(t_i) = f^{(\rho)}(t_i)\ (= 0)$ *für* $\rho = 0, 1, ..., \alpha_i - 1$ *und* $i = 0, 1, ..., k$,

(11) $q^{(\alpha_k)}(t_{k+1}) = f^{(\alpha_k)}(t_{k+1})$,

(12) $q(t_{k+2}) = f(t_{k+2})$,

nämlich

$$q(t) = \frac{1}{t_{k+1} - t_{k+2}} \left((t - t_{k+2})\; q_3(t) - (t - t_{k+1})\; q_2(t) \right),$$

wobei q_3 das Polynom aus dem 4.Fall und q_2 das Polynom aus dem 3.Fall sei.

Beweis von Satz 1.8. 1.Fall. Das vorliegende Problem ist Hermitesches Interpolationsproblem mit den paarweise verschiedenen Stützstellen $t_0, t_1, ..., t_k, t_{k+1}$ und mit $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k$ und $\alpha_{k+1} = 1$. Dann existiert hierzu mit Satz 1.4 eindeutig ein Polynom $q(t)$ vom Grad $\leq \tilde{\alpha}$ mit den Eigenschaften (1) und (2). Wegen Grad $q \leq \tilde{\alpha}$ und (1) gibt es mit Hilfssatz 1.5 eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß gilt