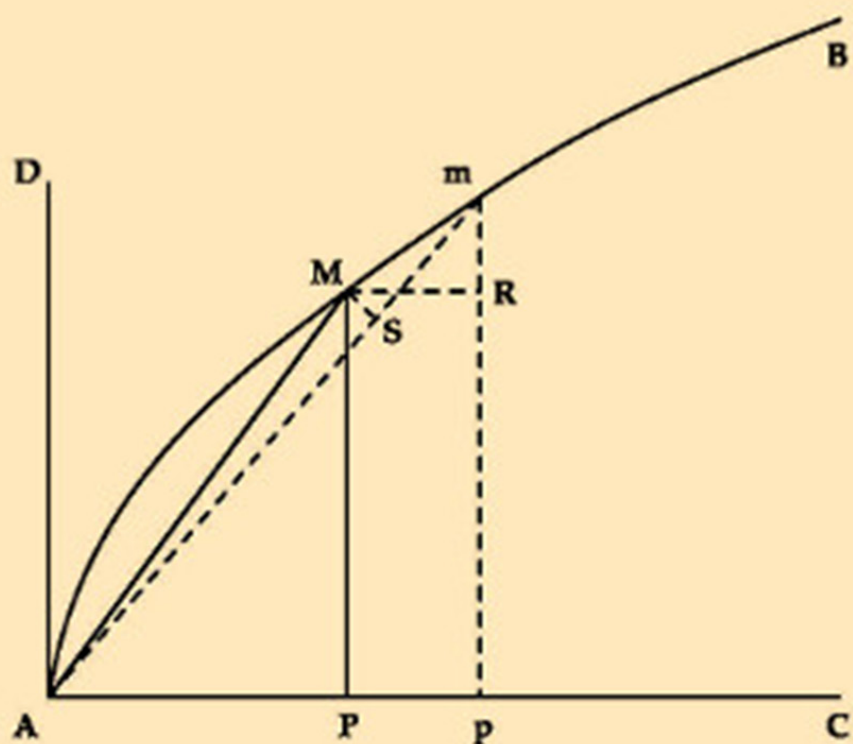


Detlef D. Spalt

Die Analysis im Wandel und im Widerstreit

Eine Formierungsgeschichte
ihrer Grundbegriffe



VERLAG KARL ALBER



Detlef D. Spalt

Die Analysis im Wandel
und im Widerstreit

VERLAG KARL ALBER 

Titel wie »6000 Jahre Mathematik«, »5000 Jahre Geometrie«, »4000 Jahre Algebra« und »3000 Jahre Analysis« sind grundfalsch. Die Mathematik, mit der wir es zu tun haben, hat ihre Formierungsgeschichte in den letzten knapp 400 Jahren erfahren.

Diese Studie zeigt, wie heftig um jeden der Grundbegriffe der Mathematik (wie Zahl, Größe, Wert, Funktion, Differenzial) gerungen wurde, bis er in der heutigen Weise geprägt war. Es ist eine unendliche Geschichte um kleinste Details, die in kürzester Zeit im Streit durchfochten wurde und dennoch nicht ohne Vagheiten auskam, weil sich nichts Besseres finden ließ - für die Rechnung aber reichte es allemal.

Zugleich bedeutet die Darstellung der Analysis seit Descartes eine Würdigung der Arbeit der Mathematiker und deren Konsequenzen: den dramatischen Begriffs- und damit Bedeutungswandel grundlegender Lehrsätze der Analysis.

Der Autor:

Detlef D. Spalt studierte 1970–75 Mathematik an der TH Darmstadt, 1981 Promotion mit einem Thema zur Analysisgeschichte, 1992 Ablehnung der Habilitation, Gastvorlesungen an den Universitäten Salzburg (mehrfach), Marburg und derzeit Frankfurt am Main.

Detlef D. Spalt

Die Analysis im Wandel und im Widerstreit

Eine Formierungsgeschichte
ihrer Grundgeschichte

Verlag Karl Alber Freiburg / München

Originalausgabe

© VERLAG KARL ALBER
in der Verlag Herder GmbH, Freiburg / München 2015
Alle Rechte vorbehalten
www.verlag-alber.de

Satz: Detlef D. Spalt (L^AT_EX)
Herstellung: AZ Druck und Datentechnik, Kempten
Umschlagmotiv: l'Hospital 1696, Fig. 1

Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier (säurefrei)
Printed on acid-free paper
Printed in Germany

ISBN 978-3-495-48740-2
E-ISBN 978-3-495-80785-9

dem Andenken an Birgit
(1964–2013)

Vorwort

WAS IST DIE MATHEMATIK?

Dieses Buch beleuchtet diese Frage, indem es den *Wandel* der Mathematik aufzeigt. Die mächtigste mathematische Theorie, die wir heute kennen, die Analysis (früher: Differenzial- und Integralrechnung, auch: Infinitesimalrechnung), wurde in den vergangenen dreieinhalb Jahrhunderten geschaffen. Wie dies möglich wurde, wird hier gezeigt.

FÜR WEN?

Wer gar nicht weiß, wovon die Analysis handelt, wird nach dem ersten Kapitel nicht mehr leicht Gewinn aus diesem Buch ziehen. Wer sich jedoch bereits ein wenig mit „Funktionen“ und „Stetigkeit“, mit „Reihen“ und „Konvergenz“, mit „Ableitung“ und „Integral“ befasst hat, kann dieses Buch verstehen.

Die Grundbegriffe der Analysis werden hier nicht erklärt, sondern ihre Kenntnis wird vorausgesetzt – genauer: die Kenntnis ihrer *heutigen* Bedeutung. *Wie diese heutige Bedeutung zustande kam*, ist Gegenstand des Buches.

Die Probleme von Geist und Materie, Möglichkeit und Wirklichkeit, Sinn und Bedeutung mathematischer Begriffe haben das Denken auch der großen Mathematiker bestimmt. Diese Aspekte gehören daher zum Gegenstand dieses Buches.

WARUM?

Merkwürdigerweise scheint sich noch niemand für die Erforschung dieses Themas erwärmt zu haben.

WIE?

Die Aufgabe ist ebenso einfach wie schwer: Was die Mathematik ist, wissen wir nur aus Texten. Also erfahren wir, was die Mathematik *war*, indem wir die *früheren Texte* (respektvoll „Quellen“ genannt) lesen.

So einfach diese Feststellung war, so schwierig ist ihre Realisierung. Denn schnell zeigt sich: Die Lektüre der Quellen ist nicht trivial, die Früheren haben sich ganz anders ausgedrückt als wir heute. Dieses Ganz-Andere zu verstehen ist nun die Aufgabe, und eine Lösung dieser Aufgabe bringt eine Antwort auf unsere Frage zutage: welches der Wandel der Analysis war.

Die Grundlage dieses Buches sind die Originaltexte der Früheren.

WOHER?

Der folgende Text ist das Skriptum der Vorlesung, die im Wintersemester 2013/14 im Fachbereich Informatik und Mathematik der Universität Frankfurt gehalten wurde. Im Vordergrund steht also die Lesbarkeit. Die zahlreichen Querverweise innerhalb des Textes (die typografisch in den Rand verschoben wurden) müssen die im Vortrag gegebenen ergänzenden Hinweise ersetzen und stellen die Zusammenhänge der Quellen her. Sie werden auch jenen nutzen, die im Buch eher nachschlagen als es ganz lesen wollen.

Dennoch enthält dieser Text nicht wenig Neues, erhebt also wissenschaftlichen Anspruch. Deswegen war alles zu belegen, die Herkunft jeder Quelle genau anzugeben. Das umgibt den Text mit einigem Brimborium, das wissenschaftlich unverzichtbar ist: *Fußnoten* als Verweise auf das *Literaturverzeichnis* sowie die üblichen *Register*. Sie mögen den Fachleuten – soweit sie sich heranwagen – zur Erschließung des Textes dienlich sein.

S. 731← (Da die hier verfolgte Vorgehensweise neu ist, ging es nicht ganz ohne *neue* Fachbegriffe. Sie sind im Register „Technik“ gesondert zusammengestellt und werden im Text ganz sanft eingeführt.)

S. ix ff.← Das *Inhaltsverzeichnis* ist ausführlich gehalten. Es soll dem Neuling die Sache schmackhaft machen und zur Orientierung dienen.

S. xxvi← Die Vorlesung dauerte ein Semester, und zur Erstellung des Textes hatte ich jenes halbe Jahr Zeit. (Es gab freilich ein paar Jahrzehnte vorgängiger Befassung mit dem Thema, in den letzten beiden Jahrzehnten nur nebenberuflich.) Die für den Druck natürlich erforderliche Überarbeitung des Skriptums^a erfolgte danach, ebenfalls nebenberuflich und mit der unten genannten Unterstützung. Dabei konnte noch manche der offenen Fragen behandelt werden.¹ Jede neue Überarbeitung würde den Text maßgeblich ausweiten. Das würde ihn gewiss reichhaltiger machen, wohl aber kaum lesefreundlicher. Insofern mag es klug sein, der Arbeit an diesem Text ein – in gewissem Sinne: willkürliches – Ende zu setzen. Damit ist klar: Dieser Text kann und will nicht das letzte Wort in seiner Sache sein.

Ohne ein leistungsfähiges Satzsystem wie \LaTeX wäre diese Aufgabe nicht in dieser Zeitspanne zu bewältigen gewesen.² Ich nutze das KOMA-Script von MARKUS KOHM und JENS-UWE MORAWSKI und profitiere unter vielem anderen insbesondere von den Paketen: `parallel` von MATTHIAS ECKERMANN (auch wenn es sich dabei leider nur um eine Beta-Version handelt, die noch einigen Beschränkungen unterliegt) für die zweisprachigen Zitate; `bigfoot` von DAVID KASTRUP für den

^aDetlef D. Spalt 2014/2015, *Die Analysis im Wandel und im Streit – Die Entwicklung der Grundlagen der Analysis*, in den Quellen gelesen, Universität Frankfurt. Das Vorgängerprojekt war eine Vorlesung am Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Marburg im Sommersemester 2008 mit dem Skriptum: *Geschichte der Analysis*, 679 Seiten.

¹Der Abschnitt „LEIBNIZ' Begriff der Zahl“, S. 79–100, kam so zustande.

²Unverzichtbar: Mittelbach und Goossens ²2005, nützlich auch: Niedermair und Niedermair 2004, wohl auch Lignau 2007.

Fußnotensatz sowie `picins` aus dem Jahr 1992 von J. BLESER und E. LANG, das leider nicht mehr mit `texlive` verteilt wird. Besonders danke ich BERND RAICHLE, der mir einst (binnen Stunden) den ergänzenden Code zum `ngerman.sty`-File für die fakultative Silbentrennung beim Apostroph sandte. Ein effizienter Editor wie der GNU-Emacs, der viele Dateien parallel öffnen kann und dabei für jede eine ausgeprägte History-Funktion vorhält, erleichtert die Arbeit enorm.

Ich danke Herrn LUKAS TRABERT vom Verlag Karl Alber dafür, dass er sich prompt zur Publikation bereit erklärt, Wohlwollen signalisiert und mir bei der Gestaltung des Textes freie Hand gelassen hat.

Inhalt

Vorwort	v
Inhalt	ix
Einleitung	xix
1. Die Erfindung der formalen Algebra durch Descartes	1
Der Stand der Dinge vor Descartes: Galilei um die Jahre 1623–38	1
Die geläufige Version	1
Die tatsächliche Version	2
Descartes' mathematische Großtat	3
Erster Versuch: Descartes' Algebra mit Figuren (bis 1628)	4
Das Ausgangsproblem	4
Die »Regulae«: Rechnen mit Figuren	6
Die Leistungsfähigkeit des menschlichen Denkens	6
Descartes' Vorgehensweise	7
Was sind Figuren, und wie soll mit ihnen verfahren werden?	8
Descartes' Zielsetzung	11
Zweiter Versuch: Descartes' Algebra mit Streckenlängen (ab 1637) – die Erfindung der formalen Algebra	17
Die grundlegenden Konstruktionen	18
Reflexion 1	19
Die bahnbrechende Erfindung	21
Die Erfindung der rein formalen Gleichung	25
Reflexion 2	26
Die Rückbindung der algebraisch gefundenen Gleichungslösung an die Geometrie	28
Descartes hat nur positive Grössen – und keine Koordinaten	30
Ergebnis	31
Ein Blick auf Descartes' Ontologie	31
Substanz, Attribut, Modus	32
Zwei Substanzen	32
Geometrie und Arithmetik bei Descartes	34
Bewegung in der Mathematik	35
Ein ontologischer Nachtrag	38

Historiografische Nachträge	38
Die Erfindung der Operationszeichen + und –	38
Das cossische Rechnen	43
Recorde oder: Die Erfindung des Gleichheitszeichens	45
Viète oder: Rechnen mit geometrischen Figuren – nicht formal	46
Eine weltgeschichtliche Analogie zu Descartes' Leistung	48
Die Anfänge von Descartes' Gleichungslehre	52
Warum „Algebra“?	59
Descartes' Leistung für die Grundlagen der Mathematik	60
Warum also „Algebra“?	61
Zur philosophischen Bedeutung von Descartes' Leistung für die Mathematik	63
2. Die Erfindung der stetig Veränderlichen durch Leibniz	65
Die bei Descartes verbliebene Begriffslücke	65
Verschiedene Arten von Gleichungen	65
Worin besteht das Problem bei Descartes?	67
Descartes' Ablenkungsmanöver	68
Die Lösung des Descartes'schen Problems in der Analysis:	
eine Begriffsverschiebung	70
Der Gegenstand	70
Die Bedeutung dieser Lösung des Descartes'schen Problems	70
Eine Bewertung dieser Lösung	70
Wie kann Leibniz zum Begriff der veränderlichen Größe kommen?	71
Zu Leibniz' Begriff der Monade	71
Leibniz' Begriff der Veränderung	73
Leibniz' Begriff(e) von (Raum und) Zeit	78
Leibniz' Begriff der Zahl	79
Der junge Leibniz war Pythagoreer	79
Ontologisch gefragt: Was ist die Zahl?	80
Begrifflich gefragt: Wie ist „Zahl“ bestimmt?	80
Das Verfahren der Größen- und der Zahlbestimmung	85
Zur Deutungsgeschichte des Leibniz'schen Zahlbegriffs	89
Zwei Schlussbemerkungen zu Leibniz' Zahlbegriff	99
Das erste allgemeine Konvergenzkriterium	101
Die Quelle	101
Aus dem Inhalt	102
Das Konvergenzkriterium (ohne den Begriff der Konvergenz)	102
Leibniz' Technik der Infinitesimalrechnung: strenge Epsilontik –	
das Riemann-Integral	105
Die Konstruktion	106
Der Beweis	108

Bedingungen an diesen Beweis	109
Das Neuartige an diesem Beweis	110
Der Preis des Neuartigen	110
Leibniz' Begründung der Differenzialrechnung	111
Die Quelle	111
Das Kontinuitätsgesetz	111
Unendlich kleine und unendlich große Größen – als „erdichtete“	113
Die Differenzialregeln	117
Leibniz erweitert den Geltungsbereich der Mathematik	122
Der Ausgangspunkt: Descartes' <i>La Géométrie</i>	122
Leibniz' Erweiterungsprogramm	123
Durch die Einführung der veränderlichen Größe wird das Kontinuum zu einem Gegenstand der Mathematik	124
Transzendente Zahlen	125
Das Kontinuum besteht nicht nur aus Zahlen	127
Leibniz als Begriffs- und Symbolerfinder	128
Characteristica universalis	128
Von Leibniz erfundene Symbolik	128
Einige von Leibniz angeregte Konstruktionen und Begriffe	130
Die Erfindung der stetig Veränderlichen und der Epsilontik	136
Der Begriff der Veränderlichen	136
Die „Stetigkeit“ der Veränderung	137
Nochmals: Was ist für Leibniz eine Veränderliche?	138
Historiografischer Nachtrag I – die Indivisibeln	140
Das Indivisibel im scholastischen Kontinuumsbegriff	140
Cavalieri	140
Unverständnis	143
Torricellis Indivisibeln	144
Fermat, Roberval	146
Fazit	146
Historiografischer Nachtrag II – die Stetigkeit des Kontinuums	147
Historiografischer Nachtrag III – Newtons Fluxionsrechnung	148
Newtons mathematische Grundbegriffe	148
Newtons Verfahrensweise	150
Newtons Fluxionsmethode: die „Methode der verschwindenden Größen“	150
Analyse	160
Rückblick	161
3. Die Grundlagen der Algebraischen Analysis	163
Johann Bernoullis Kalkül der Differenziale	163
Eine vage Diffusion von Ideen	163
Leibniz' Publikation der Differenzialregeln	163

Johann Bernoullis Differenzialkalkül	166
Zusammenfassung: Der Wechsel von der Geometrie zur Algebra	179
Die heftige Kontroverse zwischen Leibniz und Johann Bernoulli – vom geometrischen Differenzial zur unendlich kleinen Zahl?	179
Ein Nachtrag zur Kettenregel	187
l’Hospitals Umsetzung der Vorgabe Johann Bernoullis	188
Veränderliche und Konstante	188
l’Hospitals Begriff des Differenzials	189
Die Forderung	190
Differenzialregeln	190
l’Hospital ist konsequenter als Johann Bernoulli	192
Die Weitergabe von Johann Bernoullis Differenzialkalkül	193
Eulers Begriffe von Funktion und Zahl	193
Vorspiel	193
Die Inthronisierung des wichtigsten Begriffs der Analysis: Funktion	194
Eulers Algebra mit Größen	216
Eulers Zahlbegriff	223
Konvergenz	245
Stetigkeit	253
Eulers Denkmuster der Analysis: „Algebraische Analysis“	255
Vier Weiterführungen	255
(1) d’Alemberts Begriff der Größe: eine Kritik an Euler	255
(2) Der Begriff der Größenordnung	258
(3) Die Taylorreihe in der Algebraischen Analysis – Lagrange	261
(4) Das Konvergenzverständnis von Lacroix	267
Was war die Algebraische Analysis?	268
Johann Bernoullis Beitrag	268
Eulers Denken der Algebraischen Analysis	270
4. Die Begründung der Werte-Analysis	275
Vom Wandel der Dinge	275
Der doppelte Auftakt, Teil 1: Bernard Bolzano 1817	276
Bolzanos Zielsetzung	277
Bolzanos Durchführung seines Programms	281
Bolzanos Funktionenlehre	292
Der doppelte Auftakt, Teil 2: Augustin-Louis Cauchy 1821	297
Das Programm	297
Cauchys Stufenaufbau der Grundlagen der Analysis	300
Veränderliche, Grenze, Irrationalzahlen, Funktion, Funktionswert und unendlich Kleine	303
Stetigkeit und Konvergenz – die Definitionen	314
Differenzenverhältnis und Ableitung	331

Das Differenzial bei Funktionen einer Veränderlichen	336
Das Integral	339
Rekapitulation der Revolution	344
5. Das analytische Interregnum von 1817 bis 1872	351
Nichtverstehen der Cauchy'schen Analysis	351
Niels Henrik Abel 1826	351
Zusammenfassende Bewertung von Abels Kritik	355
Philipp Ludwig Seidel 1850	355
Unsicherheiten beim Begriff des Funktionswerts	362
Ein einziger treuer Cauchy-Leser?	362
Dirichlets zögerliche Position	363
Riemanns klarer Schnitt beim Funktionsbegriff stößt das Tor zur Mengenlehre auf	370
Riemann übersieht den Sachverhalt der gleichmäßigen Konvergenz	376
Die Ambivalenz der Werte-Revolution	380
Gleiche Bestimmungen von Stetigkeit und Konvergenz	380
Zwei sehr unterschiedliche Funktionsbegriffe	380
Ergebnis	381
Unterschiedliche Methodiken	382
Cauchys ‚Grenzwertsprache‘	382
Riemanns ‚Epsilontik‘	382
‚Epsilontik‘ contra ‚Grenzwertsprache‘	383
Missverständnisse	383
Methodisches Fazit und eine fachliche Konsequenz	387
Weierstraß' Ringen um die Grundbegriffe der Analysis	388
Größe, Grenze, Kontinuum	389
Der „Satz vom Verdichtungspunkt“	399
Weierstraß' Funktionsbegriff (im Wandel)	402
Weierstraß' hartnäckige Arbeit am Zahlbegriff	415
Ein veränderter Blick auf Weierstraß	439
6. Konsolidierung (1) – Die Erfindung der reellen Zahlen im Jahr 1872	447
Die Situation ante	447
Hankels Bestandsaufnahme zum Begriff der irrationalen Zahl im Jahr 1867	447
Die Artikulation der Misere durch Eduard Heine	452
Rückblick: Weierstraß' Konstruktion	454
Cantors Blick auf Weierstraß' Konstruktion	454
Cantors Deutung von Weierstraß' Konstruktion	456

Die Neuschöpfung – Variante 1: Cantor und Heine 1872	458
Cantor: Zahlgrößen im weiteren Sinne	458
Eine Hierarchie neuer Zahlbereiche – Die Gleichheit	463
Heines Versuch der Reduktion der Hierarchie	465
Eine erste topologische Fassung des „Satzes von Bolzano-Weierstraß“	468
Freges Kritik an Cantors und Heines Begriffsbildungen	468
Logische Unterscheidungen	469
Der ontologische Aspekt: Was ist „Zahl“?	469
Was ist „Gleichheit“?	470
Freges Kritik am <i>formalen</i> Zahlbegriff	471
Woher und warum hat Heine den Begriff der „Zahl“ als „Zeichen“?	474
Freges Ablehnung der neuen Relationen	475
Was hat Frege übersehen? – Der analytische Zugewinn des neuen Zahlbegriffs	477
Die Neuschöpfung – Variante 2: Dedekind 1872	479
Nochmals Cantor 1872: Der Bezug zur Geometrie	479
Die Entstehung der Schrift	481
Dedekinds Vorgehen: Eine Analogie von Arithmetik und Geometrie	482
Die „Stetigkeit“ der geraden Linie	483
Die Schöpfung der irrationalen Zahlen	488
Reflexion	496
Freges Kritik an Dedekinds Konstruktion	501
Russells Glättung der Dedekind’schen Konstruktion	504
Nachtrag: Mérays Skizze aus dem Jahr 1869	508
Zwei Prinzipien	508
„Fiktive Grenzen“	510
Rekapitulation und Einschätzung	513
Drei Jahre später	514
Rückblick auf die Revolution des Zahlbegriffs	517
Welches neuen Konstruktionsmittels bedienen sich Cantor, Heine und Dedekind? – Die Einführung des „aktualen“ Unendlich in die Mathematik	518
Ausblick auf eine lange unterbliebene Revolution des Zahlbegriffs:	
Die Ω -Analysis 1958	519
Rekapitulation der Herkunft des Cantor’schen Zahlbegriffs	519
Die Ω -rationalen Zahlen	520
Quasirationale Ω -Zahlen	522
Anordnungen der Ω -rationalen Zahlen	523
Drei verschiedene Arten des Größenvergleichs	524
Grenzwerte für Ω -rationale Zahlen	532
Warum nicht?	538
Eine intensionale Fassung des Zahlbegriffs: Husserl	539
Die Zielsetzung	539
Der Ausgangspunkt	540

Die Unterscheidung von „Vielheit“ und „kollektive Verbindung“	541
Zugängliche Zahlen	545
Symbolische Zahlen	549
Rechnen	551
Zur Bedeutung des dekadischen Zahlensystems	557
Ausblick	559
Die Axiomatisierung der reellen Zahlen durch Hilbert	559
„18 Axiome“	560
Pro und contra axiomatische Methode	564
Standortbestimmung zum Zahlbegriff und Ausblick	573
Das Neue am Zahlbegriff seit 1872	574
Sind die Ω -Zahlen die modernen Inkommensurablen?	575
Das Verschwinden der „unendlich kleinen“ Größen aus der Analysis	576
Die Abdankung des begrifflichen Denkens	577
Willkürliches Denken	578
Die Neugründung der Mathematik	580
7. Konsolidierung (2) – Die Suche nach einem Substrat für den Funktionsbegriff	581
Heine: Funktionenlehre über dem neuen Zahlbegriff	581
Eine erste Konsequenz für die Funktionenlehre über dem neuen Zahlbegriff	582
Eine zweite Konsequenz	583
Der Zwischenwertsatz	585
Die gleichmäßige Stetigkeit	585
Nach Riemann lange nichts Neues	586
Der Gegensatz zwischen Weierstraß' und Riemanns Funktionsbegriff	586
Die Tradition der deutschsprachigen Literatur folgt Riemann	588
Die französische Tradition	597
Der offizielle Entwicklungsstand des Funktionsbegriffs am 10. August 1899	606
Klein: Mathematik als Theorie der Naturerscheinungen	611
Mathematik vom erkenntnistheoretischen Standpunkt aus	612
Zwei grundlegende Sätze in der Sprache der Mengenlehre	623
Die unabhängig Veränderliche	624
Der Begriff der Funktion	625
Stetigkeit	627
Das bestimmte Integral	635
Die vernünftigen Funktionen	635
Zwischenbilanz im Jahr 1913	637
Vorspiel: Georg Cantor 1895	638
Nachtrag: Cantors Mengenbegriff	638

„Funktion“ zwischen „Mengen“	638
Pasch: Die Funktion als Menge (1)	639
Paschs Anfangsbegriffe	639
Reihe und Menge	642
Wert und Veränderliche	643
Argument, Abhängigkeit und Funktion	644
Zweierlei Stetigkeit	648
Hausdorff: Die Erfindung der Mengen-Analyse – die Funktion als Menge (2)	650
Richtigkeit vor Plausibilität	650
Der mengentheoretische Begriff „Funktion“	651
Drei verschiedene Begründungsweisen der ‚Mengen-Analyse‘: je nach Geschmack	653
Topologie als Umgebungssystem	654
Aus eins mach zwei: Von der „Grenze“ zu „Limes“ und „Häufungspunkt“	656
„Stetigkeit“ als topologischer Begriff	657
Was der Punktmengen-Analyse nach Hausdorff fehlt	658
Metrischer Raum	659
Ein Fazit für ‚Epsilontik‘ und ‚Grenzwertsprache‘	661
Nach dem großen Kulturbruch	661
Eine erste Monographie: Hahn 1921	661
Kurze Bemerkungen zur Lehrbuchliteratur	663
Standortbestimmung zum Funktionsbegriff und Ausblick	666
Rückblick auf die Entwicklung des Funktionsbegriffs in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts	666
Ontologische Standortbestimmung der heutigen Analysis	666
Ausklang: Das aktuelle Unendlich – der philosophische Joker in der heutigen Mathematik	671
Umbrüche des mathematischen Denkens	671
Wie ist es um die Strenge der Mathematik bestellt?	675
Welche Eigenschaften hat das aktuelle Unendlich?	676
Beispiel Logik	676
Beispiel Arithmetik	677
Ein Drittes gibt es nicht	677
Frühere Betrachtungsweisen	678
Bolzano	678
Dedekind und Cantor	679
Standard- und Nichtstandard-Analysis	680

Strenge in der Mathematik: eine auf Willkür gegründete Notwendigkeit	680
Die Macht der Geschichte	681
Eine Lehre	681
(Mathematische) Wahrheiten	682
Zum Abschied	683

Verzeichnisse

Literatur	685
Personen	721
Technik	731
Sachen	735

Einleitung

ANDREA: Aber ich sehe doch, dass die Sonne abends woanders hält als morgens! Da kann sie doch nicht stillstehen! Nie und nimmer.

GALILEI: Du siehst! Was siehst du? Du siehst gar nichts. Du glotzt nur. Glotzen ist nicht sehen.

(Bertolt Brecht: Leben des Galilei)

Viele Menschen, darunter auch Mathematiker, glauben, in mathematischen Lehrsätzen seien absolute Wahrheiten ausgesprochen. Mathematik treiben sei gewissermaßen ein Dienst am Sein.³ Dieser Glaube hat seine Reformation noch vor sich. Er blendet die Tatsache aus, dass ein mathematischer Lehrsatz – zuallererst ein *Satz* ist, ein sprachliches Konstrukt. Als sprachliches Konstrukt aber unterliegt jeder Satz, auch der mathematische Lehrsatz, vielfachen Bedingungen, oft auch solchen kontingenter Art. (Bemerkenswerterweise gab es sogar Historiker der Mathematik, denen diese Reformation ihres Glaubens nicht gelang: siehe die „Einleitenden Bemerkungen“ in OSKAR BECKERS *Die Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung* aus dem Jahr 1954.⁴)

Dazu gehören zunächst die allgemeinen Unwägbarkeiten des Verständigungsprozesses: Ist der Sachverhalt zutreffend formuliert? Ist die Formulierung angemessen verstanden? Was ist überhaupt der Sinn des Satzes?

³Aller Anfang ist schwer. Ich habe mir hier KURT FLASCH zum Vorbild genommen, der einmal so begonnen hat:

„Viele Menschen, darunter auch einige Philosophen, stellen sich Philosophie als ruhige Weisheit oberhalb aller Parteiungen vor.“ (Flasch 2008, S. 7)

⁴Die Erklärung ist leicht: OSKAR BECKER (1889–1964) war Platonist (zum „Übergeschichtlichen“, sagt er, gehört die „Mathematik mit ihren »ewigen Wahrheiten«“ – Becker 1943/44, S. 67). Dies erklärt sich unmittelbar aus BECKERS HEIDEGGER-Gefolgschaft, denn gut HEIDEGGER’sch ist eine Rede „entbergend“, und „Wahrheit“ ist „Unverborgenheit“ (dazu Givsan 1998, Anmerkung 63, S. 538 f.). Auch war BECKER, wie HEIDEGGER, Rassist („Philosophie ist [...] eben Schicksal: des Einzelnen, des Volkes, der Rasse selbst.“ – Becker 1938, S. 81; siehe auch Anmerkung 36 auf S. 71), sogar enthusiastischer Nationalsozialist:

„Der politische Führer von Rang erhebt sich über das bloße (wenn auch eigentliche) Dasein seines vereinzelt Selbst in einer »wider-spännstigen Gefügtheit« (παλίντος ἄρμονία) von Existenz und Para-Existenz.“ (Becker 1943/44, 95, Anmerkung 57, letzter Satz; im Wiederabdruck Becker 1984 fehlt übrigens dieser Satz wie manches andere, auffälligerweise stets ohne Hinweis auf die Auslassung.)

Dazu gehört aber auch eine weit tiefer liegende Frage: *Welche Sprache ist der Mathematik angemessen?*

Mathematik als Symbolsprache

Heute liebt Mathematik Symbole. Genauer: Mathematik liebt die Symbole, seit sie Symbole nutzt. Symbole sind ein Grundgerüst ihrer Theoriebildung, je neuer die Zeit, desto mehr.

In der Wahl ihrer Symbole ist die Mathematik sehr konservativ: Neu eingeführte Zeichen für neue Gegenstände werden rasch kanonisiert und dann auf Dauer beibehalten. Dabei kann das Symbol doch, prinzipiell gesprochen, *beliebig* gewählt werden. Diese Wahlfreiheit aber wird gewöhnlich nur zur Zeit der Erfindung genutzt, gleichgültig, wie exotisch die Erstwahl war. GEORG CANTOR hat zur Bezeichnung der kleinsten unendlichen Kardinalzahl – ein von ihm erfundener Begriff – einen (indizierten) hebräischen Buchstaben eingeführt (\aleph_0 , gesprochen: Alef-Null), und der hat sich bis heute erhalten.

S. 186,←
Anm. 117

Die Bedeutung(en) eines Symbols

Diese Konstanz der Symbolwahl in der Mathematik verleitet dazu, auch eine Konstanz der *Bedeutung* der Symbole in der Mathematik zu vermuten. Eine solche Hypothese zeichnet ein glanzvolles Bild: DESCARTES hat im Jahr 1637 das x erfunden (DESCARTES nutzte zuerst z), und das verwenden wir noch heute – seht her, so wächst und gedeiht die Mathematik!

S. 25←

Dieses glanzvolle Bild ist jedoch ein Trugbild. Denn ganz sicher ist die Mathematik kein formales Hantieren mit Symbolen, die jeglicher Bedeutung bar sind. (Gleichwohl gab es auch diese Auffassung von der Mathematik – wir werden darauf im vorletzten Kapitel zu sprechen kommen.) Sondern die Symbole in der Mathematik symbolisieren *etwas*: Symbole bezeichnen mathematische Gegenstände.

S. 465, 474←

Doch anders als in der Regel die Symbole unterliegen die mathematischen Gegenstände *grundsätzlich* und *immer* einem geschichtlichen Wandel. Diesen Wandel festzustellen und zu analysieren ist Gegenstand der geschichtlichen Mathematik.

Es ist richtig: Noch heute verwenden wir die von DESCARTES erfundene Gleichungssymbolik – auch wenn wir für „ist gleich“ ein anderes Zeichen schreiben als DESCARTES (er nutzte „ ∞ “ oder „ ∞ “), nämlich das von ROBERT RECORDE eingeführte Zeichen „ $=$ “, freilich in weit kürzerer Form als dieser. Doch das x des DESCARTES verstehen wir heute in gänzlich anderer Weise als er.

S. 25←
S. 45←

Um welchen Wandel es sich hier handelt, das ist eines der Themen dieses Buches.

Wandel der Mathematik

Die Mathematik wandelt sich, natürlich, als Ganzes. Es werden nicht nur neue Resultate gewonnen (neue Sätze formuliert und bewiesen, offene Probleme gelöst und andere formuliert), sondern auch die eingesetzten Mittel wandeln sich, die Begriffe und Methoden.

Die Darstellung dieses Wandels, genannt „Mathematikgeschichte“, bevorzugt jedoch traditionell die Beschreibung der neu erzielten Resultate. Die Beschreibung jener Bedingungen, die für die Gewinnung dieser neuen Resultate erforderlich waren: die gewandelten Begriffe und Methoden, werden gründlich vernachlässigt.

Der maßgebliche Grundbegriff der Analysis ist der Begriff „Größe“. Er war seit der Erfindung der Differenzial- und Integralrechnung durch NEWTON und LEIBNIZ bis über die Mitte des 19. Jahrhunderts hinaus in Gebrauch, also rund zweihundert Jahre lang. Das jüngste deutschsprachige Buch zur Geschichte der Analysis^a verzeichnet ihn nicht einmal in seinem Register.

Das ein Dutzend Jahre früher erschienene Gemeinschaftswerk zur Analysisgeschichte^b hat etliche Registereinträge zum allgemeinen Größenbegriff und führt sogar einen dieser Begriffe ausdrücklich an^c – doch jenes Kapitel, das die verheißungsvolle Überschrift „Das Ende der Größenlehre: Grundlagen der Analysis 1860–1910“ trägt^d, kommt ohne jede Äußerung zum damaligen Begriff „Größe“ aus (und gibt auch keine Erklärung für dieses Phänomen).

Gegenstand dieses Buches

Das hier vorliegende Buch will ein erster Versuch sein, diesen offenkundigen blinden Fleck der gängigen Geschichtsschreibung der Analysis (und man darf mit leichter Übertreibung sagen: fast aller Mathematikgeschichtsschreibung) ein wenig auszuleuchten.

Hier geht es also nicht darum, die *Spitzenergebnisse* der behandelten Autoren darzustellen.⁵ Vielmehr konzentriere ich mich auf den gegenteiligen Aspekt: Mich interessieren die *Basisergebnisse* der untersuchten Texte. Ziel ist es deshalb, die jeweiligen *Grundbegriffe* der Autoren aufzuklären – und die Bedeutung dieser Begriffsklärungen für *einige* der vom betrachteten Autor erzielten Resultate zu erläutern. Hier kann keine Vollständigkeit angestrebt werden, es wird Forschungsbedarf bleiben.

Klarerweise haben die jeweils erzielten Spitzenergebnisse ihren Sinn und ihre Bedeutung NUR innerhalb jenes begrifflichen Rahmens, den die verwendeten Grund-

^aSonar 2011 ^bJahnke 1999

^cJahnke 1999/2003, S. 134 ^dEpple 1999/2003

⁵Das ist freilich nicht ungewöhnlich. Die Spitzenergebnisse, die etwa HILBERT in seinem Nachruf auf WEIERSTRASS anführt (Hilbert 1965, Bd. 3, S. 330–338), finden sich weder in Jahnke 1999 (und Jahnke 2003) noch in Sonar 2011 genannt, werden jedoch sehr wohl in Dieudonné 1985 ausführlich behandelt.

begriffe abstecken. Diese Einsicht setzt freilich jene Reformation des naiven Mathematikverständnisses voraus, die eingangs angesprochen wurde.

Deswegen erscheint es nicht als unvernünftig, die Arbeit an mathematischen Texten mit der Klärung der dort gebrauchten Grundbegriffe zu beginnen. Dies gilt jedenfalls für geschichtliche Texte – also solche, bei denen der zugrunde gelegte Begriffsrahmen nicht a priori der heutige sein wird.

In seinen „Anfangsgründe[n] einer allgemeinen Charakteristik“ schreibt LEIBNIZ im Jahr 1677:

„Weshalb kein Mensch bisher [...] sich mit einem so wichtigen Gegenstande befasst hat, darüber habe ich mich oft gewundert. Denn wäre man nur streng methodisch verfahren, hätten sich gleich am Anfang solche Betrachtungen aufdrängen müssen [...].

Der wahre Grund aber, weshalb man den Zugang verfehlt hat, liegt wohl darin, dass die Prinzipien meistens trocken und wenig reizvoll sind, und man sie daher, nachdem man sie nur oberflächlich gestreift, auf sich beruhen lässt.“ (Leibniz 1996b, S. 49)

Ich möchte mich hier an LEIBNIZ halten. Ich ersetze seine „Prinzipien“ profaner durch „Grundbegriffe“ – und hoffe, die Sache nicht gänzlich reizlos gestalten zu können.

Ergebnisse

Im Ergebnis wird sich herausstellen: Manches frühere Resultat hat *im Lichte der Begrifflichkeit seines Autors* – in diesem Buch werden nur männliche Autoren behandelt, ohne damit Frauen zu diskriminieren – eine andere mathematische Bedeutung, als es eine heutige Leserschaft denkt, die bloß das Resultat anschaut, ohne sich einen einzigen Gedanken über die Bedeutung der vom Verfasser *gemeinten* Begriffe gemacht zu haben.

Als Konsequenz dieser Begriffsanalyse wird sich zeigen: Lieb gewonnene (und populäre) Urteile müssen revidiert werden. Um die wichtigsten Revisionen vorweg zu nennen:⁶

S. 109← (i) LEIBNIZ hat die Differenzial- und Integralrechnung nicht nur erfunden, sondern er hat beide Lehren auf das Sorgfältigste und völlig korrekt begründet. Leider sind diese korrekten Beweise seinen Zeitgenossen nicht bekannt geworden.

S. 344← (ii) Im Jahr 1821 hat CAUCHY in strenger Weise eine *Alternative* zur damals bestehenden *wie auch* zur heutigen Analysis formuliert, und zwar eine (alternative) *Standard-Analysis*.

S. 370← (iii) Das alte und heute überall anzutreffende Urteil, der moderne Funktionsbegriff verdanke sich DIRICHLET, muss revidiert werden: Erst DIRICHLET'S Schüler RIEMANN hat die Funktion als eindeutige ‚Wert-zu-Wert‘-Zuweisung bestimmt.

⁶Das Erstgenannte verdankt sich nicht meinen eigenen Forschungen, sondern wird hier nur berichtet. Das Zweitgenannte ist bereits mehr als zwanzig Jahre alt, wird jedoch in der Fachliteratur (Jahnke 1999, Sonar 2011) bislang nicht bemerkt – zu SONARS Lesefehler siehe Anmerkung 233 auf S. 328 – und daher hier nochmals angesprochen.

(iv) Und schließlich wird sich zeigen: Die allgegenwärtige Heroisierung von WEIERSTRASS als dem Begründer einer „strengen“ Analysis, der den Teufel der „unendlich kleinen Größen“ mittels Epsilon-Tik aus den Grundlagen der Analysis vertrieben und diese somit geklärt habe, ist mit den tatsächlichen Gegebenheiten völlig unvereinbar. Darüber hinaus verkennt dieses Urteil die mathematischen Konsequenzen der Wesensänderung der Analysis ab 1872.

→ S. 444

In diesem Sinne erhebt der vorliegende Text den Anspruch, die bisherige Geschichtsschreibung der Analysis in einigen grundlegenden Aspekten zu revidieren.

Methode

Die Vorgehensweise in einer solchen Studie ist durch ihren Gegenstand bestimmt: Es müssen die Originaltexte gelesen und analysiert werden.

Dabei lege ich großen Wert auf das *genaue* Lesen. Und es zeigt sich: Dadurch kommt manches Erstaunliche zutage, etwa die in den deutschen Texten des 19. Jahrhunderts chronische Schlamperei, eine „Veränderliche“ und ihre „Werte“ nicht sauber auseinanderzuhalten! Diese Tatsache steht ganz eklatant im Widerspruch zu dem so gern verliehenen Ehrentitel „Zeitalter der Strenge“ für das 19. Jahrhundert.⁷

Damit unterscheidet sich der vorliegende Text grundlegend von den üblichen⁸ Büchern zur (Analysis-)Geschichte: *Hier kommen die früheren Mathematiker selbst zu Wort, und zwar ausführlich* (manchmal vielleicht ein wenig zu ausführlich?), statt nur in einer Interpretation oder mit einem aus dem Zusammenhang gelösten Satz oder wenigen solchen Sätzen. Und ihre Behauptungen werden *penibel* auf ihre *Bedeutung* und auf ihre *Richtigkeit* befragt. Dabei erlauben es die hier wiedergegebenen Originalpassagen den Lesenden, sich ein eigenes Urteil zu bilden, hin und wieder vielleicht auch eines, das der hier gegebenen Deutung widerspricht.

Hinzu kommt als wesentliches Element: Die *Verbindungen*, die diese Texte untereinander haben, werden hier ausdrücklich aufgezeigt. Die Texte werden zueinander in Beziehung gesetzt – eine Verfahrensweise, die sonst eher selten zu finden ist. Dabei ist diese Verbindung keineswegs immer eine Kontinuität, sondern sie kann auch strittig sein. Wunderbar ist etwa die – direkt ausgetragene – Kontroverse zwischen JOHANN BERNOULLI und LEIBNIZ um die Existenz der „unendlich kleinen“ Zahlen, beeindruckend ist WEIERSTRASS' hartnäckiger Widerstand gegen die durch RIEMANN initiierte völlig neuartige Technik der relationalen Begriffsbildung in der Analysis.

→ S. 179 – 187

→ S. 388 – 439

⁷Auch meine 1991/92 formulierte Neudeutung der CAUCHY'schen Analysis verdankt sich übrigens dieser Vorgehensweise. Ob die Tatsache, dass diese Neudeutung bisher keine ernsthafte Kritik erfahren hat, dieser ungewohnten Vorgehensweise geschuldet ist, muss Spekulation bleiben.

⁸Eine eindrucksvolle und sehr schöne Ausnahme, freilich mehr Nachschlagewerk als Lesebuch, ist *A history of algorithms* von JEAN-LUC CHABERT. Auch das bereits genannte Buch Becker 1954 bildet eine Ausnahme, ebenso *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung von den Anfängen bis 1933* von IVO SCHNEIDER. – Von anderer Art sind die verschiedenen „Quellenbücher“, die jeweils längere Originalpassagen bedeutender Autoren weitgehend unkommentiert aneinanderreihen.

Wie sich die jeweilige Textauswahl gestaltet, hängt vom Autor, dessen Arbeitsstil und dem aktuellen Erschließungsgrad der Quellen ab.⁹ Der derzeit fortgeschrittene Stand der Retrodigitalisierung der Bibliotheksbestände erleichtert eine solche Studie enorm, ermöglicht sie vielleicht gar erst,¹⁰ jedenfalls einem Freizeit- oder Saisonwissenschaftler. Der kostenfreie Zugriff auf die Datenbanken der aktuellen Sekundärliteratur ist derzeit leider jedoch vielfach nur aus einem Universitätsnetz heraus möglich.

Glücklicherweise hat es heute den Anschein, dass wir auch die ältesten hier relevanten Texte nun zur Verfügung zu haben, nachdem die LEIBNIZ-Edition in den letzten zwanzig Jahren endlich einen deutlichen Fortgang erfahren hat. (Ein Fachartikel mit einer ausführlichen Darstellung und eingehenden Analyse der LEIBNIZ-schen Begründung seines Differenzialkalküls erschien vier Monate nach Beginn der Arbeit am Manuskript des vorliegenden Buches, also gerade noch rechtzeitig.)

Den Text habe ich im Wintersemester 2013/14 als Skriptum zu der Vorlesung erstellt, die ich im Fachbereich Informatik und Mathematik der Universität Frankfurt halten durfte. Er wurde nach dem Vortrag an einigen Stellen verbessert. (Das letzte Kapitel kam aus zeitlichen Gründen nicht mehr zum Vortrag.) Dieser Charakter des Textes sei besonders betont. Hier wird kein Endgültigkeitsanspruch erhoben. Da ich für fast keinen der hier behandelten Autoren als Spezialist gelten darf, werden im Einzelnen Ergänzungen oder Korrekturen erforderlich sein. Doch scheint mir der Forschungsstand reif, den Mathematikstudierenden Gelegenheit zu geben, über die Fragwürdigkeit des ihnen üblicherweise als unhinterfragbar vorgeetzten Lehrgebäudes Analysis – im *Einzelnen* wie im *Ganzen* – nachzudenken. (Ob die für die Studieninhalte Verantwortlichen dies wollen, muss sich zeigen.)

Grenzen dieser Darstellung

Der vorliegende Text beruht auf einer vor rund einem Vierteljahrhundert begonnenen Forschung. Da diese Forschungsperspektive auf heftigste Ablehnung stieß,^e konnte ich sie nicht laufend betreiben. Seit dem Sommersemester 2008 in Marburg vermochte ich wieder mehr Zeit dafür zu erübrigen.

Das Vorliegende ist die Momentaufnahme meines derzeitigen Wissensstandes. Nicht alles darin konnte in gleicher Intensität bedacht werden; manches Urteil wird sich vielleicht bald als revisionsbedürftig erweisen. Wer diesen Text als eine neue Perspektive auf die Mathematik liest, die heute noch eine Forschungsperspektive ist, wird ihm gerecht.

^eSpalt 1996

⁹Eine weitere Bemerkung zur Methode findet sich in der Anmerkung 340 auf S. 454. Eine ausführlichere Darlegung meiner Vorgehensweise ist in Spalt 1996 nachzulesen.

¹⁰Inzwischen sind die meisten der klassischen Druckwerke als Datei verfügbar – siehe das Literaturverzeichnis. Sonar 2011 arbeitet noch ganz ohne digitalisierte Originale, dafür aber etwa mit einem „photokopierten Taschenbuch nach [sic] der Erstausgabe“ (von Bolzano 1975a).

Einleitung

Wort enthalten sind; werden diese Hinzufügungen des Übersetzers von mir zitiert, geschieht dies so: [...]. Nicht von mir rührende Hinzufügungen in einem Zitat sind durch (...) bezeichnet. Wenn ich in einer zitierten Übersetzung ein originalsprachliches Wort ergänze, geschieht dies stets in (...).

Zur erhofften Erleichterung der Lektüre habe ich *drei Arten der Anmerkungen* eingeführt: solche, die auch in der Quelle vorhanden sind (gekennzeichnet durch die alten Fußnotensymbole); solche, die allein eine Quellenangabe beinhalten (gekennzeichnet durch kleine Buchstaben), und schließlich solche, die Ergänzungen zum Haupttext enthalten, die dort nicht glatt hineinpassen (gekennzeichnet durch Zahlen).

Querverweise im Text – sie sind ein nicht unbeachtlicher Kern dieses Textes – sind am Rand notiert. Das beeinträchtigt ein wenig die Ruhe des Layouts, entlastet aber den Fußnotenapparat enorm und erleichtert hoffentlich ihre Berücksichtigung. Auch gibt es jenen Interessierten eine Chance, die das Buch nicht (auf Anhieb) insgesamt lesen können, sondern selbst in den Quellen eine gewisse Orientierung suchen. (Das Ziel dieser Verweise ist mit der bloßen Seitenangabe nicht immer unmittelbar benannt. Wollte man genauer sein, müssten vermehrt die aus juristischen Texten geläufigen Randnummern eingeführt werden. In meinen Arbeitsdateien wird das so gehandhabt, doch hier soll kein standardisierter Leseleitfaden für die Analysisgeschichte geboten werden, sondern ein möglichst flüssig zu lesender Text.)

Dank

Zuallererst habe ich HASSAN GIVSAN, Darmstadt, zu danken, der mir seit Jahrzehnten anregender und förderlicher philosophischer Gesprächspartner ist. Auch RÜDIGER THIELE, Halle, hat mir stets mit Anregungen und Hinweisen geholfen, ebenso Prof. Dr. JOACHIM FISCHER, München und Berlin, sowie HERBERT BREGER, Hannover.

BERND ARNOLD, Wiesbaden, hat mit großer Geduld und Geschick meine Übersetzungen verbessert. Seine Hinweise waren stets mehr als Übersetzungshilfen, nämlich kritisches Mitdenken, das mir weiterhalf. Prof. Dr. EBERHARD KNOBLOCH, Berlin, hat der Übertragung einiger besonders vertrackter fremdsprachlicher Passagen die allerletzte Politur gegeben. Auch THOMAS BUSCH, Marburg, danke ich für seine Unterstützung herzlich.

Ebenfalls zu großem Dank verpflichtet bin ich dem amtierenden Präsidenten des Hessischen Landtags, NORBERT KARTMANN, der mir im Sommer 2008 und im Winter 2013/14 zwei Halbjahre ganztägiger wissenschaftlicher Tätigkeit im Rahmen meines Dienstes im Hessischen Landtag – und somit auch die Abfassung des vorliegenden Textes – ermöglicht hat, ebenso den beiden mich jeweils freundlich aufnehmenden Fachbereichen für Mathematik und Informatik (auch umgekehrt) an den Universitäten Marburg und Frankfurt – und nicht zuletzt jenen über das Übliche hinaus engagierten Mathematik- und (im Falle Frankfurt auch:) Philosophie-Studierenden, die mir durch ihr Interesse und ihre Arbeitsbereitschaft sehr

geholfen haben. Besonders ist hier JOHN FLATH zu nennen, dessen Fragen und Anregungen in Frankfurt mich immer weitergebracht haben.

Und last but really not least danke ich den Professoren JOHANNES CZERMAK, Salzburg, sowie HENK J. M. BOS, Utrecht und KIRSTI ANDERSEN, Aarhus. Herr CZERMAK hat mir in der schwierigsten Phase meines wissenschaftlichen Lebens (nach 1992) den Kontakt zu Lehre und Forschung am Mathematischen Institut der Universität Salzburg jahrelang offen gehalten. HENK J. M. BOS hat trotz der vielfältigen untergründigen Widerstände die Publikation des Artikels „CAUCHYS Kontinuum“^f befürwortet, dem *point of departure* meiner universitären Laufbahn und einem Markstein auch für die vorliegende Studie (und er hat lange mit mir um dessen Form gerungen). KIRSTI ANDERSEN hat mich im November 2000 zu einem Vortrag auf eine Tagung nach Roskilde eingeladen, mich zu dem Aufsatz Spalt 2001 ermuntert und seine Publikation befürwortet.

Meine Frau BIRGIT^g hat das vorliegende Buch mit allen Kräften gefördert. Ihr war es noch mehr Herzensangelegenheit als mir. Dass sie nur den Beginn seiner Abfassung, nicht aber dessen Fertigstellung erlebt hat, ist tragisch.

Frankfurt am Main und Darmstadt, den 17. Februar 2014 und 2015

^fSpalt 2002

^gKarl 1993, Schlote 2002, (Allgemeine Wissenschaftsgeschichte, Philosophie 1750–1990); auch Karl *et al.* 1991 sowie Tyradellis (2016)

