

Pablo Amster
Juan Pablo Pinasco

TEORÍA de JUEGOS

Una introducción matemática
a la toma de decisiones



BREVIARIOS

PABLO AMSTER, autor de numerosos libros de investigación científica, es doctor en matemáticas por la Universidad de Buenos Aires, ciudad de la que es originario. Actualmente es profesor asociado del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales e investigador independiente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (Conicet). Entre los libros que ha publicado se encuentran *Fragmentos de un discurso matemático* (FCE, 2007), *iMatemática, maestro! Un concierto para números y orquesta* (2010) y *Apuntes matemáticos para leer a Lacan 1 y 2* (2009).

JUAN PABLO PINASCO es doctor en matemáticas por la Universidad de Buenos Aires y profesor adjunto del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la misma universidad. Se desempeña también como investigador independiente del Conicet y es autor de numerosos artículos de investigación científica, principalmente en problemas de autovalores de ecuaciones diferenciales. También es traductor y ha participado en numerosas actividades de divulgación de las matemáticas.

BREVIARIOS
del
FONDO DE CULTURA ECONÓMICA

Pablo Amster
Juan Pablo Pinasco

Teoría de juegos

*Una introducción matemática
a la toma de decisiones*



FONDO DE CULTURA ECONÓMICA

Primera edición, 2014

Amster, Pablo, y Juan Pablo Pinasco

Teoría de juegos. Una introducción matemática a la toma de decisiones /
Pablo Amster, Juan Pablo Pinasco. — México : FCE, 2014
301 p. ; ilus. ; 17 × 11 cm — (Colec. Breviarios ; 584)
ISBN 978-607-16-2234-1

1. Teoría de juegos 2. Toma de decisiones 3. Teoría de las probabilidades
4. Matemáticas — Estudio y enseñanza I. Pinasco, Juan Pablo, coaut. II. Ser.
III. t.

LC QA269

Dewey 082.1 B846 V. 584

Diseño de forro: Teresa Guzmán Romero

D. R. © 2014, Pablo Amster

D. R. © 2014, Juan Pablo Pinasco

D. R. © 2014, Claudia Hartfiel, agente literaria

D. R. © 2014, Fondo de Cultura Económica

Carretera Picacho-Ajusco, 227; 14738 México, D. F.

Empresa certificada ISO 9001:2008

Comentarios: editorial@fondodeculturaeconomica.com

www.fondodeculturaeconomica.com

Tel. (55) 5227-4672; fax (55) 5227-4694

Se prohíbe la reproducción total o parcial de esta obra, sea cual fuere
el medio, sin la anuencia por escrito del titular de los derechos.

ISBN 978-607-16-2234-1

ISBN 978-607-16-3296-8 (PDF)

Impreso en México • *Printed in Mexico*

SUMARIO

<i>Prefacio</i>	9
<i>Introducción</i>	13

Primera parte
¿QUÉ ES UN JUEGO?

I. Juegos para humanos y máquinas	69
II. Juegos para matemáticos y economistas	88

Segunda parte
JUEGOS, DECISIONES Y ESTRATEGIAS

III. Suma cero	129
IV. Por fin, un poco de decisión	175
V. Nash, John Nash	189
VI. ¿Quién da más?	223
VII. Todos juegan y yo también	261
<i>Bibliografía</i>	289

PREFACIO

Este libro tiene un doble objetivo: por un lado, efectuar un recorrido por algunos temas matemáticos de aplicación directa a la resolución de problemas; por otro, presentar una forma de pensar y comprender el mundo, en donde el interés no reside tanto en la *resolución* de los problemas sino más bien en su *formulación*.

Es un hecho conocido que la matemática constituye una parte esencial en casi todas las construcciones del pensamiento. En consecuencia, su estudio resulta de fundamental importancia, no sólo por sus múltiples aplicaciones sino por su indiscutible poder para abrir nuevas formas de entendimiento.

Dentro de las áreas de aplicación, el estudio y la formalización de los problemas decisorios ha cobrado especial interés durante los últimos años. Las diferentes circunstancias de la vida nos ponen constantemente en diversas situaciones de decisión, motivadas por la existencia de ambigüedades y múltiples cursos de acción ante un mismo objetivo. Todos los seres vivos se ven forzados a tomar determinaciones en forma permanente; algunas de ellas se llevan a cabo de una manera puramente instintiva, mientras que otras esconden una compleja trama de procesos mentales. La *teoría de la decisión* se ocupa de la clasificación y el estudio de tales procesos desde una perspectiva racional; en particular, el empleo de herramientas matemáticas tales como las matrices y los

grafos, o la teoría de probabilidades, ha posibilitado sistematizar y cuantificar algunos de sus problemas centrales, ofreciendo métodos que permiten elegir una alternativa óptima con base en diferentes criterios.

Por otra parte, la *teoría de juegos*, desarrollada a partir de 1928 por John von Neumann, se ha constituido en los últimos años en una rama crucial de la matemática, que ha permitido entender muchos problemas a partir de un nuevo y potente enfoque y ha mostrado con fundamentos lógicos un hecho que, en su fuero íntimo, los matemáticos sabían desde hace tiempo: en algunos casos la estrategia más racional consiste en ser irracional. Esta celebrada teoría ha encontrado ecos en los más diversos campos, desde la física o la biología, hasta la economía, los negocios, la psicología o la política.

En este libro se presentarán a los lectores de un modo accesible, que no requiere de conocimientos matemáticos previos, algunos de los temas mencionados, desde un enfoque amplio y poblado de curiosas historias y anécdotas que acompañaron los diversos hallazgos que aquí se describen. Como se verá, hablar de tales hallazgos no es posible sin efectuar un amplio recorrido por la compleja trama del pensamiento humano.

El texto está organizado de la siguiente manera. En la Introducción se presentan informalmente los principales temas a tratar a lo largo del libro y las nociones matemáticas básicas que serán necesarias para tal fin. Luego vienen los diferentes capítulos, organizados en dos partes. En la primera, se describe aquello que la matemática entiende por juego, comenzando por los juegos combinatorios para luego brindar el panorama general, en el que la información no siempre está disponible y puede intervenir el azar. En la segunda parte

se detallan algunas características de los juegos a partir de la distinción básica entre aquellos que son de “suma cero” (vale decir, lo que gana un jugador equivale a lo que pierde el otro) y aquellos que no lo son. Luego veremos algunos casos especiales de juegos y ciertos aspectos concernientes a la toma de decisiones, que muchas veces deben efectuarse en un ámbito de incertidumbre. Para terminar, mostraremos algunos ejemplos concretos del diseño de mecanismos, como las subastas, sistemas de votación o la elaboración de listas, que han encontrado innumerables aplicaciones en la vida diaria; entre otros, en el vertiginoso mundo de internet.

Este libro no hubiera sido posible sin la ayuda de muchísimas personas, tanto matemáticos como gente medianamente seria. Es imposible mencionar a todos aquí aunque, desde ya, queremos agradecer a todos los estudiantes y colegas del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA, y del IMAS-CONICET, de quienes aprendemos a diario no solo en las clases, coloquios o seminarios sino también en charlas de café en las que nos enteramos de muchas de las curiosidades y ejemplos aquí desarrollados. También queremos agradecer a los editores por su disposición y paciencia y a todos los amigos que leyeron distintas versiones del texto y nos hicieron llegar sus comentarios y sugerencias.

Buenos Aires, marzo de 2014

INTRODUCCIÓN

Por inverosímil que sea, nadie había ensayado hasta entonces una teoría general de los juegos.

J. L. Borges, “La lotería en Babilonia”

Hay un enunciado que a simple vista puede parecer una trivialidad y sin embargo se lo conoce como “teorema”. A grandes rasgos, dice que en el juego del ajedrez se da una de las siguientes tres situaciones:

Las blancas pueden forzar jaque mate.

Las negras pueden forzar jaque mate.

Cada uno de los jugadores puede evitar que el otro le dé jaque mate.

Esto puede parecer muy claro, de acuerdo con nuestra más ingenua experiencia en aquel *severo ámbito en que se odian dos colores*:¹ hasta donde lo hemos podido verificar, cualquier partida tiene siempre un ganador, o bien termina en tablas. Y esta observación *sin duda* es trivial, aunque vale la pena señalar que involucra varios acuerdos implícitos sobre el juego. Muchos de ellos —la mayoría— se encuentran especificados en las reglas, pero otros son de un orden más conceptual. Al decir que toda partida termina de alguna de

¹J. L. Borges, “Ajedrez”, en *El hacedor* (1960).

esas formas estamos excluyendo una infinidad de otras posibilidades menos felices (al menos, para el que va ganando): por ejemplo que un gato, o quizá un hurón, voltee el tablero en forma repentina, haciendo caer todas las piezas. O que *no termine*, pues los jugadores podrían ser tan distraídos como para no darse cuenta de que repiten, una y otra vez, posiciones en las que ya han caído previamente.

Sin embargo, el enunciado original es mucho más sutil: no se trata de algo que ocurre “siempre” porque, claro está, tampoco se trata de “cualquier” partida. El teorema habla del ajedrez, no de las instancias posibles —las partidas— sino nada menos que del propio juego.

Entender esta diferencia constituye, en buena medida, una de las aspiraciones de este libro: si decimos que toda partida concluye de alguna de las tres maneras mencionadas es poco más que una tautología; en cambio, decir que una de las tres situaciones se encuentra establecida de antemano (suponiendo que los jugadores juegan de la mejor manera posible) implica que el juego del ajedrez está determinado. En otras palabras, que ocurre lo mismo que en otros juegos más simples, como el tres en línea o *tatetí*, en el cual el jugador que comienza puede asegurarse de no perder. Claro que el *tatetí*, bien jugado, no ofrece el menor atractivo, mientras que el ajedrez, aun en el caso de que se encuentre determinado, presenta un número tan grande de combinaciones que es imposible (mejor dicho, *casi* imposible) jugarlo de manera perfecta.

El resultado en cuestión fue establecido en 1913 por un célebre matemático alemán llamado Ernst Zermelo, más conocido por sus trabajos en teoría de conjuntos. Diversos autores coinciden en presentarlo como el primer teorema

formal de la llamada *teoría de juegos*, que se ganó con derecho propio un lugar entre las múltiples ramas de la matemática. Esto no quiere decir que no haya habido, a lo largo de los siglos, desarrollos matemáticos de lo más variados sobre diversas situaciones de conflicto. Paul Walker, del Departamento de Economía de la Universidad de Canterbury, Nueva Zelanda, comienza su *Cronología de la teoría de juegos*² con una mención del Talmud de Babilonia, que recoge la antigua ley y tradición del judaísmo:

Un problema discutido en el Talmud es el problema denominado “del contrato matrimonial”: un hombre tiene tres esposas cuyos contratos matrimoniales especifican que en caso de muerte del marido recibirán 100, 200 y 300 respectivamente. El Talmud da recomendaciones aparentemente contradictorias. Cuando el hombre muere dejando apenas una herencia de 100, el Talmud recomienda la división a partes iguales. Sin embargo, si la herencia es de 300 recomienda la división proporcional (50, 100, 150), mientras que para una herencia de 200 la recomendación de (50, 75, 75) es un completo misterio.

Según Walker, esta *mishná* desconcertó a los estudiosos durante dos milenios, hasta que en 1985 se reconoció que el Talmud anticipó la teoría moderna de juegos cooperativos. Cada una de las soluciones corresponde a un juego, apropiadamente definido.³

²http://www.econ.canterbury.ac.nz/personal_pages/paul_walker/gt/hist.htm

³La Mishná es el cuerpo principal de la ley judía; se llama así también a los distintos párrafos que contienen casos particulares o discusiones. La resolución completa del problema puede encontrarse en R. Aumann, “Game Theory in the Talmud”, *Research Bull. Series on Jewish Law and Economics*.

Además del Talmud, la filosofía y la literatura abundan en ejemplos, que van desde la resolución de situaciones como la anterior hasta el análisis sobre las apuestas, los juegos de azar o la conveniencia o no de creer en Dios. Sin embargo, el hito histórico que Walker presenta a continuación pasa por alto una docena de siglos:

En una carta fechada el 13 de noviembre de 1713, Francis Waldegrave proporciona la primera estrategia mixta de minimax conocida para un juego de dos personas.

Se trata de un escrito sobre una versión de un juego de cartas llamado *le Her*, cuya solución fue discutida en misivas con diversos sabios. Walker aclara, sin embargo, que Waldegrave no extendió la solución a otros juegos y expresó su preocupación de que su estrategia *no parece estar en las reglas normales* de los juegos de azar.

La justificación de un salto histórico tan grande no reside en el hecho de que la humanidad no haya producido estudios de gran valor sobre los juegos en todo ese tiempo, sino que pone el foco más bien en aquello que la matemática entiende por “teoría”. No se trata precisamente de un conjunto más o menos nutrido de procedimientos o trucos, por ingeniosos que sean, sino de un auténtico *corpus*, que establece una serie precisa de axiomas y se vale de otras herramientas de la propia matemática: probabilidades, grafos, combinatoria, entre otras. Walker distingue, ya a partir del siglo XIX, una gran cantidad de sucesos históricos que de alguna forma preanuncian lo que se constituirá como área formal de la matemática solo a mediados del siglo XX, con el famoso texto de John von Neumann y Oskar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. El libro fue publicado en

1944, el mismo año en el que Borges publicó el libro *Ficciones*, de donde proviene el epígrafe de esta introducción. Más allá de estas coincidencias, casuales o no, lo que no es casual es el título del trabajo de von Neumann y Morgenstern: se da cuenta allí de uno de los aspectos cruciales de esta teoría que —entre otras cosas— permitió a algunos matemáticos acceder al Premio Nobel.⁴ En efecto, la teoría de juegos ha crecido rápidamente en virtud de sus múltiples aplicaciones a los más variados campos, en particular la economía. Pero no es el único; por ejemplo, en la cronología de Walker se menciona también a Darwin como otro de los “precursores”:

En la primera edición de su libro *El origen del hombre y la selección en relación al sexo* Charles Darwin brinda el primer argumento (implícito) de teoría de juegos en biología evolutiva. Darwin argumentó que la selección natural actúa para equilibrar la proporción de sexos. Si, por ejemplo, los nacimientos de mujeres son menos comunes que los de hombres, entonces una niña recién nacida tendrá mejores perspectivas de apareamiento que un varón recién nacido y por lo tanto podrá esperar tener más descendencia. Así, los padres dispuestos genéticamente a

⁴A fin de evitar que esto parezca una obviedad, conviene recordar que no existe el Premio Nobel de matemática. Las razones de esto han sido objeto de diversas leyendas: la más conocida dice que la esposa de Alfred Nobel fue amante del matemático sueco Mittag-Leffler y, por despecho, Nobel consideró que tal disciplina no podía merecer tan importante galardón. Sin embargo, esta teoría se hace difícil de sostener, entre otras cosas porque Nobel nunca estuvo casado. Se han entregado, en cambio, algunos premios *IgNobel* de matemática: por ejemplo, en 2013 se ha entregado un premio en la teoría de probabilidades, por un artículo que demuestra que las vacas que están paradas más tiempo tienen más predisposición a echarse. Este ejemplo y algunos otros se comentan en el post <http://gaussianos.com/las-matematicas-y-los-ig-nobel/>.

producir mujeres tienden a tener un número de nietos mayor que la media, y por lo tanto los genes de las tendencias a producir mujeres se propagan, y los nacimientos de mujeres se hacen más comunes. A medida que se aproxima a la proporción 1:1 entre los sexos, la ventaja asociada con la tendencia a producir mujeres desaparece. El mismo razonamiento es válido si se sustituye a las mujeres por hombres. Por lo tanto, 1:1 es la relación de equilibrio.

Podemos agregar también a la lista numerosos ejemplos literarios. Si pensamos en el comportamiento humano, sus dilemas y conflictos, quizás no haya otro autor más profuso que Shakespeare; sin embargo, en un libro dedicado especialmente a la teoría de juegos se hace casi indispensable citar a Edgar Allan Poe, quien, entre otras alusiones matemáticas, introduce un problema hoy clásico en *El misterio de Marie Rogêt*. Recordemos el cuento, basado en una historia ocurrida realmente en Nueva York. Una joven es asesinada en circunstancias misteriosas y la policía ofrece una cuantiosa recompensa por la denuncia del asesino, o de alguno de ellos en caso de que se tratara de más de uno. Teniendo en cuenta esta última posibilidad, ofrece también el “completo perdón a cualquier cómplice” que declarase contra el autor del hecho. Pero Poe descarta de plano que el crimen haya sido llevado a cabo por una pandilla:

Solo añadiré un argumento contra la noción de una banda, pero el mismo tiene, en mi opinión, un peso irresistible. Dada la enorme recompensa ofrecida y el pleno perdón que se concede por toda declaración probatoria, no cabe imaginar un solo instante que algún miembro de una pandilla de miserables criminales —o de cualquier pandilla— no haya traicionado hace

rato a sus cómplices. En una pandilla colocada en esa situación, cada uno de sus miembros no está tan ansioso de recompensa o de impunidad, como temeroso de ser traicionado. Se apresura a delatar lo antes posible, a fin de no ser delatado a su turno. Y que el secreto no haya sido divulgado es la mejor prueba de que realmente se trata de un secreto. Los horrores de esa terrible acción solo son conocidos por Dios y por una o dos personas.

En realidad, lo que era en tiempos de Poe aún conocido por “una o dos personas” (y acaso por Dios, aunque no hay registros de ello) era justamente el modelo que el notable autor empleó para arribar a sus conclusiones. Se trata, en efecto, de un antecedente del *dilema del prisionero*, introducido por A. Tucker en 1950, que echa luz sobre importantes aspectos de la cooperación humana. Algunas otras ideas relativas a la teoría de juegos en los cuentos de Poe (y en su propia vida) aparecen en un artículo de 2006,⁵ en donde también se hace referencia a otro antecedente aún más lejano del dilema, los escritos de Heródoto, del siglo v a.C:

Un grupo de nobles se reunió y decidió derrocar al emperador. Cuando se propuso levantar la sesión uno de ellos, llamado Darío, tomó la palabra y dijo que si lo posponían, sabía que uno de ellos iría directamente al emperador a revelar la conspiración, porque si nadie más lo hacía, lo haría él mismo. Darío también sugirió una solución: ir inmediatamente al palacio y matar al emperador.

⁵R. Deloche and F. Oguer, “Game Theory And Poe’s Detective Stories And Life”, *Eastern Economic Journal*, vol. 32, núm. 1, 2006. En el artículo S. Brams, “Game Theory and Literature”, *Games and Economic Behavior*, enero de 1994, se brinda una lista de obras literarias que aplican de alguna forma la teoría de juegos.

La solución de Darío es sin duda muy práctica, aunque conviene aclarar que no es eso lo que habitualmente se conoce como “matemática aplicada”. Según los autores, la conspiración ilustra además una forma de los juegos de coordinación. Tras asesinar al emperador, los nobles decidieron elegir a uno de ellos para que tomase el trono en su lugar, aunque, en vez de pelear, acordaron disputarlo al azar: se reunirían al atardecer y sería coronado aquel cuyo caballo relinchase primero. Según Heródoto, el trono quedó para Darío merced a una pequeña trampa perpetrada con ayuda de un esclavo, quien (asumiendo algunos riesgos para su integridad física) se impregnó con el olor de la yegua favorita del caballo de su amo.

Pero ya que hablamos de literatura, vale la pena comenzar nuestra presentación informal de la teoría de juegos con una historia muy conocida, que aparece en diversas fuentes. En algunas versiones de *Las mil y una noches* se la ha titulado “Caso prodigioso de videncia”:

Se cuenta de un hombre de Bagdad que vivía en completo desahogo y tenía grandes riquezas. Pero éstas se le agotaron, su situación cambió y se quedó sin nada consiguiendo comer sólo a costa de inauditos esfuerzos. Cierta noche mientras dormía cohibido y amedrentado vio en sueños a una persona que le decía: «¡Tu fortuna se encuentra en El Cairo! ¡Ve, corre a buscarla!»

Emprendió el viaje a El Cairo, llegó al atardecer y fue a dormir en una mezquita. Cerca de la mezquita había una casa y Dios (¡ensalzado sea!) dispuso que una partida de ladrones entrase en la mezquita para asaltar la casa. Los habitantes de ésta se despertaron al oír el movimiento de los ladrones y empezaron a

chillar. El valí de la ciudad y sus hombres acudieron a auxiliarles. Los ladrones huyeron. El valí entró en la mezquita y encontró dormido al bagdadí. Le detuvo y le hizo azotar con golpes muy dolorosos hasta que estuvo a punto de morir. Le encarceló y le tuvo tres días en prisión. Después le hizo comparecer y le preguntó: «¿De qué país eres?» «¡De Bagdad!» «¿Y qué motivos te han traído a El Cairo?» «He visto en sueños una persona que me decía: “¡Tu fortuna se encuentra en El Cairo! ¡Vete!” Al llegar a El Cairo me he dado cuenta de que la fortuna prometida eran los azotes que me has mandado dar.» El valí se rió de buena gana dejando al descubierto sus molares. Le dijo: «¡Hombre de poco entendimiento! Yo he visto en sueños tres veces a una persona que me decía: “Hay una casa de Bagdad situada en tal barrio y cuyo aspecto es éste. En su patio hay un jardincillo y debajo del surtidor se encuentran riquezas enormes. Ve allí y cógelas”. Yo, a pesar de esto, no me he movido y tú, tonto, has emprendido el viaje de una ciudad a otra por una visión que has tenido en el curso de una pesadilla». Le dio a continuación unos dirhemes y le dijo: «Utilízalos para regresar a tu ciudad».

Sahrazad se dio cuenta de que amanecía e interrumpió el relato para el cual le habían dado permiso.

Cuando llegó la noche trescientas cincuenta y dos, refirió:

—Me he enterado, ¡oh rey feliz!, de que [el hombre] tomó los dirhemes y regresó a Bagdad, pues la casa que el valí le había descrito era la suya propia. Al llegar a su domicilio cavó debajo del surtidor y encontró una gran riqueza. De este modo Dios le dio un gran tesoro. Éste es un caso prodigioso.

Quizás el lector esté más familiarizado con el relato análogo que transcribe Borges en su *Historia universal de la infamia*, bajo el título: “Historia de los dos que soñaron”. El

que sueña ahora no es bagdadí sino precisamente cairota; la ciudad de sus sueños es Isfaján (Isfahán), en Persia. Algunos otros detalles adornan la historia; veamos por ejemplo lo que le dice el valí, que en la versión de Borges es un capitán y en otras un cadí (juez):

... tres veces he soñado con una casa en la ciudad de El Cairo en cuyo fondo hay un jardín, y en el jardín un reloj de sol y después del reloj de sol una higuera y luego de la higuera una fuente, y bajo la fuente un tesoro. No he dado el menor crédito a esa mentira. Tú, sin embargo, engendro de una mula con un demonio, has ido errando de ciudad en ciudad, bajo la sola fe de tu sueño. Que no te vuelva a ver en Isfaján. Toma estas monedas y vete.

El cuento es atractivo desde diversos puntos de vista. En el Talmud, el viaje se entiende como un crecimiento espiritual: es preciso hacer todo ese recorrido para finalmente encontrar el tesoro que se encuentra en nuestra propia casa, vale decir, *dentro de nosotros*.⁶ También se puede interpretar el concepto de “tesoro” en términos de *información*, o asociar toda la historia a la matemática, pensada como el resultado de “dejarse llevar por un sueño”.⁷ Pero en este contexto vale la pena introducir un nuevo concepto, que surge a partir de una lectura elemental. Observemos, en efecto, que cada uno de los personajes interpreta los sueños de manera diferente

⁶Una interpretación similar puede encontrarse en *El alquimista* de P. Coelho, catalogado por algunos críticos como un extenso plagio de la historia aquí referida. Respecto de la calidad literaria de Coelho, hay algunos textos más bien lapidarios, como por ejemplo el artículo de Héctor Abad Faciolince: <http://prodavinci.com/2013/04/12/actualidad/por-que-es-tan-malo-paulo-coelho-por-hector-abad-faciolince/>.

⁷Véase P. Amster, *Mucho, poquito, nada* (2007).

y se siente satisfecho con la decisión que ha tomado. Para el cairota esto es fácil, pues al escuchar al cadí comprende que el sueño era cierto y no ve la hora de regresar a casa a reunirse con el tesoro. El cadí, en cambio, tiene menos razones para creer en la existencia de ese tesoro; su encuentro con el maltrecho cairota no hace otra cosa que dar sustento a su incredulidad. Creer conlleva el riesgo de sufrir una decepción, de modo que cada golpe asestado al viajero dormido (cabe preguntarse qué estaría soñando en el momento de la golpiza) es una forma de alejar cada vez más la tentación de dar crédito a su sueño. Aunque los azotes, vale la pena mencionarlo, no figuran en la versión de Borges.

Llegado este punto, cabe hacerse una pregunta: ¿qué es una “decisión correcta”? Si la respuesta es “aquella que nos deja satisfechos”, entonces podemos decir que, efectivamente, los dos han elegido bien. A esto se refiere el matemático Ivar Ekeland en su libro *Al azar*:

La belleza de esta historia está en que tanto el cadí como el viajero pueden felicitarse de la excelencia de su respectivo juicio. Sus análisis diametralmente opuestos están los dos plenamente confirmados por los hechos. El cadí morirá en Ispahan burlándose de los ingenuos que hacen un viaje tan largo en busca de un tesoro que no existe, y el cairota se regocijará toda su vida por haber creído en su sueño. Ambos, cada uno a su manera, obtuvieron una anticipación perfecta.

Como veremos a lo largo del libro, en muchas situaciones resulta clave el *punto de vista*. En la teoría de juegos, esto no solo se ve reflejado en los análisis diferentes que hace cada jugador desde su situación particular, sino también en un aspecto más delicado, que determina que distintas personas

(o una misma, en momentos distintos de su vida) tomen decisiones diferentes ante un mismo conjunto de elecciones posibles. Tiene que ver, si se quiere, con aspectos psicológicos que se traducen en propensión o aversión al riesgo y pueden modelarse matemáticamente mediante la noción de *utilidad*.

Vale la pena intercalar una breve digresión que remite más a los acertijos que a los juegos, aunque pone el énfasis en el valor de *la mirada*. Una historia, muy conocida, cuenta que una princesa se enamora de un plebeyo. El rey se opone a la boda, pero ante la insistencia de los jóvenes finalmente decide darles una chance. El pretendiente deberá extraer, sin mirar, una uva de una bolsa que contiene una uva blanca y otra negra; podrá casarse con su amada únicamente si la uva extraída es blanca. Pero siguiendo los consejos de su ministro (siempre hay un malo en la historia), el rey hace trampa y coloca en la bolsa dos uvas negras, sin darse cuenta de que su hija lo está observando. La princesa, muy alterada, corre a darle la noticia al joven. Es claro que podrían pedir al rey que muestre el contenido de la bolsa antes de la prueba: con un poco de suerte, el soberano diría algo así como “¿Dos uvas negras? ¡Jem, qué despistado soy!” y pondría en la bolsa, ahora sí, una blanca y otra negra según lo acordado. Pero la cosa podría ser mucho peor, ya que el rey tiene todo su real derecho de mostrarse ofuscado al ver que se duda de su palabra y anular por completo la prueba. Sin embargo, el joven encuentra una forma de sacar provecho de la trampa y lograr que se vuelva en contra de quien la perpetró: todo lo que tiene que hacer es tomar una uva de la bolsa y, antes de que nadie pueda verla, llevársela a la boca. Luego de tragarla, basta con hacerse un poco el tonto y decir: “Ah, ¿no era para

comer? Ningún problema, veamos la uva que queda y así sabremos el color de la que me comí”.

Suele decirse que la lógica es el arte de equivocarse con confianza. Pero en las decisiones humanas, a veces las reglas de la lógica adquieren una nueva dimensión. En la historia, el rey confía en su buena lógica y se queda tranquilo a esperar el éxito de su plan: en una bolsa con dos uvas negras, la probabilidad de extraer una uva blanca es 0. Situarse en ese punto de vista hubiera sido muy desventajoso para los enamorados: en el dudoso caso de que logren que la prueba se haga finalmente sin trampas, tendrían un 50% de probabilidades de salir airosos. Sin embargo, la misma “buena lógica” proporciona el mecanismo para lograr que la trampa se vuelva en contra del rey: al extraer una de las uvas, la restante es negra, de modo que el *principio de tercero excluido* brinda a los espectadores una prueba concluyente de que la uva ingerida era blanca.

Distinta es la situación del célebre problema de los tres prisioneros, que no son los del dilema aunque ya bastante complicados se encuentran. En este caso, el éxito del buen razonamiento se basa en la inacción de los otros participantes:

El carcelero coloca a tres presos un disco en la espalda, de modo que cada uno puede ver los discos que llevan sus compañeros pero no el propio. Los discos son iguales en todo salvo en el color; en total hay tres blancos, y dos negros. Los discos que no se utilizan quedan fuera de la vista de los prisioneros. El primero que deduzca lógicamente el color de su disco debe acercarse a la puerta y será liberado. Supongamos que a cada uno de los prisioneros se le coloca un disco blanco, ¿pueden deducir el color de los discos?

La solución es simple, pero requiere una “segunda vuelta” en el razonamiento lógico. Cualquiera de los presos puede pensar de la siguiente forma: “Si mi disco fuera negro, los otros dos verían uno blanco y uno negro. Pero entonces cada uno de ellos se daría cuenta de que su disco no puede ser negro: en tal caso, el otro vería dos negros y se acercaría de inmediato a la puerta. Como ninguno de los dos se mueve, deduzco que mi disco es blanco”.⁸

Cabe mencionar que esta solución ha sido bastante discutida, pues plantea un problema respecto del tiempo; más precisamente, de su *continuidad*. En efecto, para que valga se supone, en forma implícita, que todos los presos razonan correctamente y a la misma velocidad. De ser así, al cabo de pocos instantes los tres deberían levantarse a la vez para luego volver a sentarse, algo confundidos. Pero el asunto se arregla suponiendo que los presos comunican sus conclusiones en ciertos momentos preestablecidos. Por ejemplo, supongamos que el carcelero coloca los discos a cierta hora. Los presos ven los discos de los otros, pero no pueden hacer ni decir nada hasta la hora siguiente. Si entonces nadie logra deducir el color de su disco, vuelta a callar por una hora más, y así sucesivamente. Dejando de lado la posibilidad de que alguno de los presos sea verdaderamente corto de luces y una hora no le alcance, el proceso se resume así:

⁸Otra historia basada en el “fracaso” de los otros se relata en *La matemática como una de las bellas artes* (Amster, 2004). Por turno, varios pretendientes ofrecen maravillas a una princesa, pero ninguno logra conmovérla. Solo el último de ellos atina a comprender la causa de tanta insensibilidad y le ofrece un par de anteojos. Lo que los otros no sabían era que la chica era miope: emocionada porque ahora *puede ver*, la princesa sonríe y brinda su mano a este último galán.

Hora 0. Se colocan los discos.

Hora 1. Ninguno de los presos deduce el color de su disco.

Hora 2. Ninguno de los presos deduce el color de su disco.

Hora 3. Gran algarabía: todos los presos deducen el color de sus respectivos discos.

Muchas otras historias, problemas y cuentos policiales se basan en el empleo apropiado de la información que brindan los otros: a veces a partir de lo que hacen y otras, como en el caso anterior, de lo que *no hacen*. Algo similar ocurre en aquella famosa historia de Sherlock Holmes en que ninguno de los testigos ha visto ni oído nada extraño. Ningún sonido se ha escuchado; la sagacidad del detective se limita a observar que precisamente *eso* es lo extraño. Todos sabían que había un perro en la casa en la cual se cometió el crimen, pero hasta la intervención de Sherlock nadie se había sorprendido de que *no hubiera ladrado*:

—¿Existe algún otro detalle acerca del cual desearía usted llamar mi atención?

—Sí, acerca del incidente curioso del perro aquella noche.

—El perro no intervino para nada.

—Ese es precisamente el incidente curioso —dijo como comentario Sherlock Holmes.⁹

Muchos acertijos y juegos lógicos están destinados a ejercitar este tipo de facultades perceptivas: mucho antes que Conan Doyle, el recurso había sido utilizado en una notable historia policial, esta vez de Edgar Allan Poe. En *Los crímenes*

⁹ Arthur Conan Doyle, “La estrella de plata”.

de la calle Morgue, todos los testimonios dan cuenta de unos hechos singulares de diferente manera. Un francés asegura haber oído a alguien gritar en español; un holandés afirma que la voz era de un francés. Un inglés piensa que se trata de un alemán, un español “está seguro” de que la voz era de un inglés... El detective Dupin logra dar una coherencia a estas afirmaciones dispares de forma notable. Todos dicen que los gritos que han oído corresponden a *otra lengua*, que no comprenden. Pero lo que nadie pensó es que en realidad se trata de *ninguna lengua*. Los gritos han sido proferidos por un mono; esa es la razón por la cual ninguno de los testigos ha sido capaz de comprender ni una sola palabra. Simplemente, porque no había palabras.

Siguiendo con este matiz detectivesco, vale la pena decir que uno de los aspectos clave en la resolución de problemas consiste en encontrar aquello que Sherlock Holmes consideraba “el arranque de toda investigación”: un *punto débil*, que puede ser una aparente contradicción o un aspecto de la trama que no condice con el resto. Esta regla puede ser aplicada a cualquier texto, y es comparable al concepto de *lapsus*, tan importante en el psicoanálisis. Por ejemplo, podemos encontrar una excelente ilustración en la historia bíblica de José. Recordemos que José había sido vendido por sus hermanos a unos mercaderes que lo llevaron a Egipto; a continuación viene toda aquella secuencia de su paso por la prisión, y la interpretación de los sueños del faraón que le proporciona un rápido ascenso a ministro. En tan alto cargo lo encuentran sus hermanos, que llegan a Egipto, durante la época de vacas flacas, en busca de alimentos. Pero no lo reconocen, y José, dispuesto a darles un escarmiento, no dice nada. Ellos le cuentan una y otra vez que han ido allí enviados

por su padre Jacob; al cabo de algunas idas y vueltas finalmente José les revela su verdadera identidad: Soy José; ¿está mi padre aún con vida?

La pregunta llama la atención: si sus hermanos ya le habían dicho que Jacob los envió y esperaba su regreso, ¿cómo es que aun así José pregunta si su padre está vivo? Este es justamente un “punto débil” que permite abrir el texto y obtener una interpretación. José, el racional, el que había urdido un plan para aleccionar a sus hermanos, se ha dejado vencer por la emoción. La Biblia cuenta que antes de darse a conocer hizo salir a todos los egipcios; una vez a solas con sus hermanos se echó a llorar y solo entonces les dijo quién era. Él había sido arrancado de su patria y su familia hacía ya mucho tiempo; sus hermanos le habían informado que Jacob estaba con vida, pero esto no era suficiente. Por eso la pregunta: ¿está mi padre aún con vida? Lo que José quería saber era si *su* padre vivía; vale decir: si al cabo de tantos años Jacob lo recordaba aún como su hijo.

PRESENTACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN

Vamos a mencionar ahora otra leyenda famosa, cuyo héroe no es un bagdadí o un cairota sino un alemán de Brunswick: nada menos que Carl Gauss, para muchos el más grande matemático de la historia. Se cuenta que, a los diez años, se encontraba en clase cuando el maestro impuso —tal vez a modo de castigo, no se sabe— la tediosa tarea de sumar los cien primeros números naturales. Esto parece suficiente como para desanimar a los estudiantes más revoltosos; el lector (sea o no revoltoso) puede hacer un intento antes de continuar: