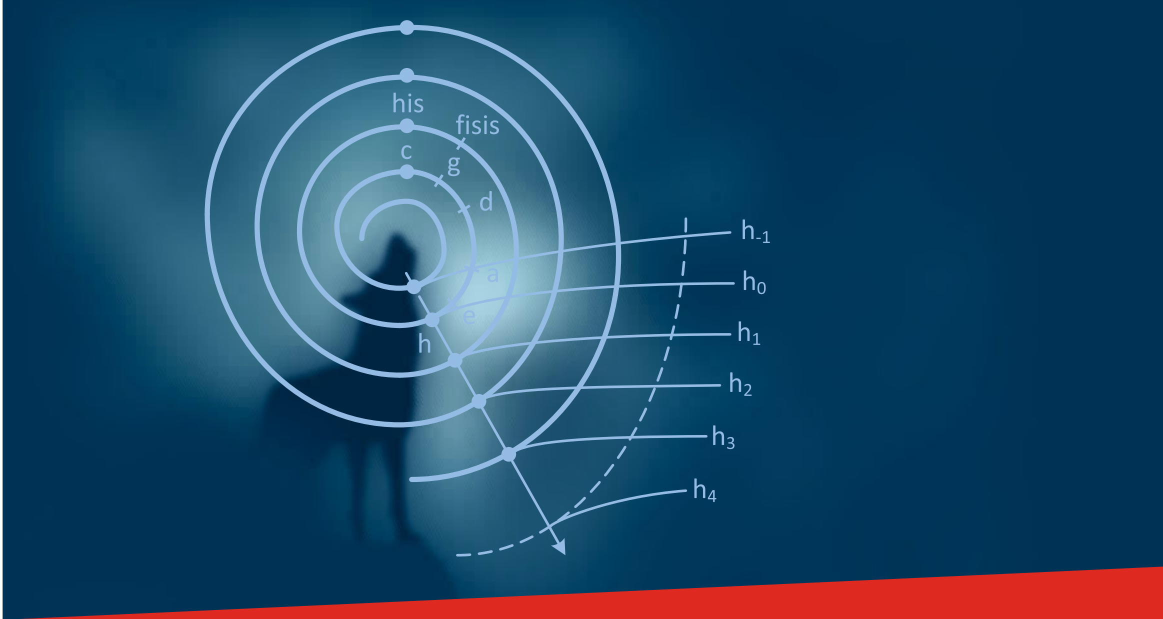



Karlheinz Schüffler

# Pythagoras, der Quintenwolf und das Komma

## Mathematische Temperierungstheorie in der Musik

*2. Auflage*

Springer Spektrum

Pythagoras, der Quintenwolf und das Komma

Karlheinz Schüffler

# Pythagoras, der Quintenwolf und das Komma

## Mathematische Temperierungstheorie in der Musik

2., neu bearbeitete Auflage

Springer Spektrum

Karlheinz Schüffler
Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf, Deutschland

ISBN 978-3-658-15185-0 ISBN 978-3-658-15186-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-15186-7

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum


Planung: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

*Für meine Kinder*
*Christine, Stefan und Peter*

# Vorwort zur 2. Auflage

Ein erfreuliches Echo auf die Ersterscheinung dieses Buchtitels ließ den Wunsch nach einer zweiten Auflage aufkommen. Diesem Wunsch komme ich nun gerne nach.

Die erneute Auflage eines Buches lässt ganz sicher die Überlegungen aufkommen: Soll was geändert werden? Soll was hinzukommen? Wollen wir was weglassen? Was war gut – was kann sicher besser werden? Stimmt das Konzept noch und erreicht es die Leserschaft erfolgreich?

Klar: Als erstes versucht man, sich aller zwischenzeitlich stets mit beharrlichem Nachdruck und immer wieder aufs Neue scheinbar aus dem Nichts auftretenden Fehler (darunter äußerst ärgerlicher) zu entledigen – es bleibt jedoch meist ein Versuch. Ich verdanke hierbei vor allem den Herren Walter Bühler (aus Berlin) sowie Dr. Günther Semmler (aus Freiberg/Dresden) wertvolle und umfangreiche Korrekturhinweise und Vorschläge, die auch inhaltliche Überlegungen mit eingeschlossen haben.

Daneben ist von zahlreichen Lesern der Wunsch geäußert worden, die Inhalte – wann immer möglich – nicht nur alleine der mathematischen Fachsprache anzuvertrauen, sondern vermehrt auch der Sprache des Alltags eine Chance zu geben. Ich habe nun an der Erfüllung dieses Wunsches hart gearbeitet – muss aber gestehen, dass ein solches Unterfangen nicht ganz konfliktfrei ist: Sicher, so manche Spielerei zwischen Zahlen und Tönen – angesiedelt in der Arithmetik der ersten 12 Zahlen – mag als Zusammenhang von „Mathematik und Musik“ auf den ersten Blick durchgehen und zu einer Schilderung in elementarem Stil besonders präferabel zu sein. Die ernsthafte Beschäftigung führt dagegen unvermittelt zum Wesentlichen unserer Zahlen, ihre rationalen und irrationalen Strukturen zwingend einfordernd. Auch betreten wir den Hoheitsbereich der Exponentialfunktion; ohne ihre segensreichen Möglichkeiten, die musikalisch-mathematisch verankerten Grundstrukturen nicht nur quantitativ sondern vor allem auch qualitativ beschreiben, messen und bewerten zu können, wäre sogar schon die Schilderung der Problematik schlechterdings möglich. Ein zentrales Beispiel möge uns dies vor Augen führen: Ein profundes Ergebnis unserer Recherche ist etwa dieses:

> „Genau dann, wenn das logarithmische Maß eines Iterations-Intervalls rational ist, liefert der standardisierte Prozess der Iteration eine periodische Skala. Irrationale Maße liefern demnach Tonsysteme, die der chaotischen Dynamik sehr ähnlich sind.“

Was ist rational – was ist irrational? Was bedeutet „genau dann, wenn“?

Mathematiker verzichten ungerne auf das Ausloten „endgültiger“ Wahrheiten, auf Fragen wie etwa: Warum – letztendlich – gilt dies oder das? Dabei spielt es auch keine Rolle, ob dieses oder jenes sich den Anwendern eilfertig aufdrängt. Wäre es anders, so glaube ich zutiefst, wäre uns der Reichtum eines fantastischen Gebäudes niemals geschenkt worden. Warum? Weil jene Fragen Fantasie und Kreativität einfordern – das Berechnen von Tabellen mitnichten.

Und wie ist es umgekehrt? Ich wage zu bezweifeln, dass unsere wirklich großen Musiker ihre wirklich großen Werke nur deshalb geschaffen haben, um alleine dem Drang der Gefälligkeit nachzugeben. Nein, der Fantasie zur Vollendung eines Gedankens, einer Idee durften niemals Zügel angelegt werden. Womit wir eigentlich die tiefste Form der Gemeinsamkeit von Mathematik und Musik erkannt haben.

Die neue Auflage ist eine Neubearbeitung. Ich habe mich bemüht, den textlichen Erklärungen mehr Raum zu geben; alle Kapitel haben nun eine Überblick-verschaffende Einführung; in nicht wenigen Abschnitten habe ich mittels einheitlicher Zusammenfassungen kompaktere Formen gefunden, die hoffentlich das Lesen, Verstehen und Merken erleichtern. Gleichwohl bin ich dem Fahrplan der Erstauflage treu geblieben, und von wenigen Ergänzungen und Modifikationen abgesehen, finden sich alle Themen wieder. Konkret habe ich die historischen Stimmungen um die Analyse der äußerst populären Temperierung „Kirnberger III“ ergänzt – stellt sie doch eine einzigartige Verbindung von Mitteltönigkeit, Reinheit – und auch Gleichstufigkeit dar, weil ihre Wolfsquinte numerisch mit der Ausgleichsquinte übereinstimmt, ein kleines Wunder.

Neu hinzu gekommen ist auch ein großer Abschnitt über antike Konsonanz und die superpartikularen Intervalle der griechischen Tetrachordik.

Dem Verlag Springer Spektrum und seiner Chef-Lektorin, Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch, sowie ihrer Mitarbeiterin, Frau Barbara Gerlach, danke ich aufs herzlichste für die Übernahme des Buches und die neue Herausgabe. Ein sehr glücklicher Umstand führte dazu, dass Herr Sascha Keil, der auch schon am Entstehen der Erst-Auflage redaktionell beteiligt war, alle wesentlichen technisch-redaktionellen Arbeiten dieser Neu-Bearbeitung liebevoll und kompetent übernommen hat. Die aufwendige Komplexität an Symboliken, Grafiken, Tabellen sowie dem Grund-Layout und Einbindung in ein Gesamt-Dokument wäre dem Autor so jedenfalls nicht geglückt. Herzlichen Dank, lieber Sascha. Etliche Personen meiner Leserschaft kommen ohne eine Dankeswort auch nicht davon: Vielfältige Korrespondenzen haben mich immer wieder genötigt, das Thema stets aufs neue auszuleuchten. Schließlich: Die wochenlange Abwesenheit vom restlichen Geschehen in der Welt war auch nur möglich durch die geduldige Unterstützung durch meine Frau Karstjen: Vielen herzlichen Dank.

im Januar 2017

Karlheinz Schüffler
Fachbereich Maschinenbau und Verfahrenstechnik
Hochschule Niederrhein, Krefeld
Mathematisches Institut der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Düsseldorf, Deutschland

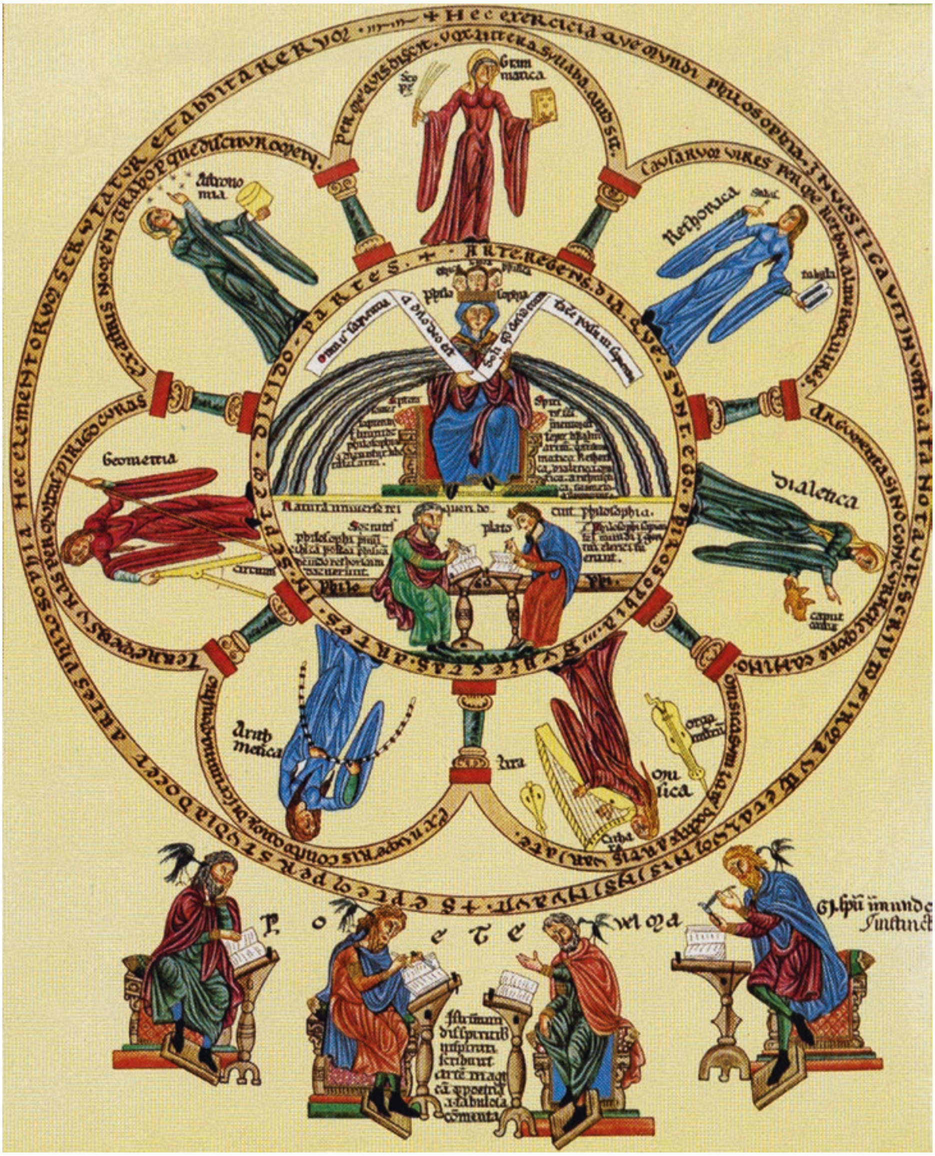
# Vorwort zur 1. Auflage

Mathematik und Musik – wie oft bin ich so oder anders gefragt worden: „Passt das überhaupt zusammen?“ Oder: „Sind das nicht völlig gegensätzliche Dinge?“ Ja, und leider reichen dann weder die Zeit noch für gewöhnlich auch die Möglichkeiten, die wunderschönen vielfältigen und tief verankerten Verflechtungen dieser beiden Kulturen zu beschreiben.

Es mag sein, dass der „Laie“ (mit nötigem Respekt so angesprochen) in den Mathematikern nur graue Mäuse sieht, die mit dem Lösen vieler Gleichungen mit ganz vielen Unbekannten (die auch immer „x“ heißen) ihr Dasein fristen – oder schlimmer: sich auf ewig mit Zahlenkolonnen beschäftigen. Das heißt dann im öffentlichen Raum stets „trockene Mathematik“. Und es mag ebenso sein, dass wiederum der „Laie“ in der Musik eine Kunst sieht, für die sich eine „Berechenbarkeit“ oder ein „Regelkostüm“ geradezu verbietet – vor allem im Falle künstlerischer Gipfelsphären.

Ein Blick in die Antike lehrt uns jedoch eines anderen Weltbildes: In den „Septem Artes Liberales“ erkennen wir, dass die „musica“ ihren Platz neben der „arithmetica“ und der „geometria“ einnahm und diese – ergänzt durch die „astronomia“ – das sogenannte Quadrivium, den „mathematischen Teil“ der sieben freien Künste bildete. Dabei könnte man allerdings sogar zur Auffassung gelangen, dass dies einen wirklichen Glücksfall bedeutete:

Für den Kulturbringer Pythagoras war nämlich Musik nachweislich ein Zahlenspiel – obendrein noch ein solches, das nur die beiden Stammzahlen 2 und 3 erlaubte, anderes wurde über tausend Jahre hinweg in seiner Lehre der „consonantiae“ nicht geduldet. Aber ganz gewiss gerade deswegen konnte sich schließlich unser diatonisches und letztlich vertrautes 12-stufiges, chromatisches Tonsystem etablieren, dauerhaft und alles andere ausschließend – denn all dies fußt schließlich fast gänzlich auf den pythagoräischen antiken Intervallbegriffen. Wer weiß? Möglicherweise würden wir uns andernfalls an bizarren Viertel-Tonklängen oder an noch merkwürdigeren Mikro-Tonklängen, die uns orientalisch aus 1001er Nacht her erreichen, erfreuen (müssen).



Die Septem Artes Liberales (aus dem „Hortus deliciarum“ der HERRAD VON LANDSBERG, 12. Jahrhundert) [Dnalor_01; Wikimedia Commons; Lizenz CC-BY-SA 3.0]

Verehrte Leserinnen und Leser, dies ist lediglich die Geburtsstunde der zweisamen Existenz von Musik und Mathematik; die „ars mathematica“ hat zu keiner Zeit der „ars musica“ geschadet. Die Mathematik ist weder trocken noch kunstfremd – wie in der Tat auch umgekehrt die Musik keineswegs nur dem ausschließlichen Diktat nach irrationaler Eingebung und „Gefühl“ unterliegt.

Ebenso wenig nämlich wie man durch bloßes Aneinanderreihen von Zahlen, Zeichen und Formeln einen mathematischen Satz zeigen kann – geschweige denn eine Theorie entwickeln kann –, so findet der Musiker eine Komposition nur durch Aneinanderreihen von Noten: Beides setzt eine gehörige Portion sowohl an Fantasie und Inspiration als auch die Beherrschung und Anwendung von Regeln verschiedenster Art voraus. Und wenn wir die Geschichte der Musik studieren, so liest sich dies bisweilen wie die Geschichte der Arithmetik. Ja, der Zusammenhänge beider gibt es viele und auf vielen Ebenen. Erfreulich daher: „Es hat viel miteinander zu tun“ – das hört man immer öfter. Dies zu bestärken, dazu möchte dieses Buch einen kleinen Beitrag leisten.

Dieses Buch ist entstanden aus einer Vorlesungsreihe zur „Mathematischen Temperierungstheorie“ – also dem Bemühen, eine Systematik der Tonleiterkonstruktionen zu entwickeln, verbunden mit dem Ziel, die überaus komplexen historischen Vorstellungen, Zusammenhänge, Rechnungen und Konstruktionen wie die auch teils ebenso abstrusen wie überraschenden Ideen zu verstehen, zu ordnen und anzuwenden.

Es ist geschrieben für Musiker, Mathematiker und – ich betone das ausdrücklich – für den stets so titulierten „interessierten Laien“. Demnach müsste es nun drei Vorworte geben – allein dies vertrüge sich wohl nicht mit der erkennbaren Absicht des Verfassers, die „artes“ nicht zu trennen, vielmehr zu vereinen. Gleichwohl möchte ich für beide einen kurzen Impuls geben:

**Für die Musik:** Stellen wir uns vor, ein Chorleiter teilt seinen Chor in zwei Gruppen A und B, die nun auch räumlich getrennt seien. Die Choristen sind topfit – sie singen a cappella und alle gegebenen Tonschritte „rein“, also Quinten stets im Maß 3 : 2, Quarten demzufolge im Maß 4 : 3 sowie schöne Terzen – nämlich solche im Maß 5 : 4. Beide Gruppen bekommen nun einen gemeinsamen Ausgangs-Start-Ton, sagen wir c sowie folgende Anweisungen:

Gruppe A singt c – g (Quinte rauf), dann g – d (Quarte runter). Endton ist also d = d(A).
Gruppe B singt c – f (Quarte rauf), dann f – a (Terz rauf), dann a – d (Quinte runter). Endton ist d = d(B).

Haben nun beide den gleichen Endton? Ist d(A) = d(B)? Nein, bedauerlicherweise nicht. Beide Gruppen singen jeweils rein, zusammen aber unsauber. Wie das? Nun, schuld daran ist ein Komma, das Syntonische – ein kleines Intervall vom Frequenzmaß 81 : 80 – allerdings ist das bereits ein Fünftel eines gewöhnlichen Halbtonschritts. Das Intervall c – d(A) hat nämlich das Frequenzmaß 9 : 8 im Gegensatz zum Intervall c – d(B), welches nur das Maß 10 : 9 besitzt; der Unterschied beider Intervalle ist gerade dieses Syntonische Komma. Und wiederholen wir diesen Vorgang aneinandergesetzt 5-mal, so ist die Gruppe B um einen vollen Halbton unter der Gruppe A angekommen: Der Vorwurf des Chorleiters träfe wohl die Falschen. Wir werden später sehen, dass es kein „reines“ Tonsystem geben kann, welches die Forderung von der Erhaltung der Tonika erfüllt.

**Für die Mathematik:** Stellen Sie sich vor, Sie schichten Quinte auf Quinte mit der praxisnahen Nebenbedingung, bei Oktavüberschreitung immer um eine Oktave zurückzuspringen („reoktavieren“ nennen wir das später). Nehmen wir dabei einmal an, es sei eine Quinte mit einem rationalen Frequenzmaß zwischen 1 und 2. Welche Gesamt-Tonmenge entsteht? Gibt es Muster, Regelmäßigkeiten und anderes Bemerkenswertes? Wir entwickeln hierzu in diesem Buch eine Intervall-Arithmetik, eine „Adjunktions-Algebra“, die zusammen mit der Eulerschen Cent-Funktion im Reich der Komplexen Zahlen uns zu Antworten führt.

Das Buch wendet sich vor allem auch an Studierende und deren Lehrer der Musikwissenschaft einerseits wie auch der Mathematik andererseits. Für die Ersteren bietet es sich zum Beispiel auch als Hilfe an, das leicht undurchschaubar werdende Sammelsurium historischer wie auch aktuell zu behandelnder Temperierungen nicht nur zu berechnen sondern auch in seinen intrinsischen Zusammenhängen verstehen zu lernen. Für die anderen möge es dagegen ein weiteres dankbares Feld sein, auf welchem eine fruchtbare Anwendung sowohl algebraischer als auch analytischer Methoden höchst lohnenswert wie auch nützlich sein kann. Des Weiteren finden auch all jene praktizierenden Musiker, die sich mit dem „Stimmen“ der Instrumente zu befassen haben – wie es zum Beispiel im Orgelbau als ein Charakteristikum gilt – hilfreiche und hoffentlich auch nachhaltige Kenntnisse und Informationen über die vernetzten Strukturen einer systematischen Temperierung.

Der inhaltliche Leitfaden ist in der Tat eine „Mathematische Theorie der Tonskalen-Bildung“. Ein wenig simpler ausgedrückt, begleitet uns also die (praktische) Frage:
„Wie packe ich 12 Töne in eine Oktave – wenn ich darüber hinaus einige Vorgaben erfüllen soll?“
Solche Vorgaben könnten sein:

- Es sollen möglichst viele Intervalle „rein“ sein;
- Es sollen möglichst viele Intervalle aus einer „Iteration“ – also aus einer Intervallschichtung eines gegebenen „Erzeugerintervalls“ – stammen;
- Es sollen möglichst viele Intervalle eines bestimmten Typs „rein“ (oder anders gegeben) sein;
- Es sollen ganz bestimmte Akkord-Typen eine ganz bestimmte, gewünschte Klangvorstellung besitzen;

und dergleichen mehr.

Auch ist es ebenso spannend wie durch die Praxis legitimiert zu fragen: „Wann ist ein System geschichteter Intervalle periodisch (modulo einer jeweiligen passenden Oktavierung) – und wann nicht?“ Ferner: „Gibt es regelmäßige Muster in den erzeugten Skalen?“ und: „Welche Mikro-Differenzen, Schwebungen würden sich ergeben?“ und so weiter.

Der **musikalische Leitfaden** besteht in den Stationen der klassischen Temperierung:

- Die pythagoräische Stimmung (Reine-Quinten-Iteration, Kap. 3),
- Die reine Stimmung (Reine Quinten, reine Terzen, Kap. 4),
- Die Mittelton-Stimmung (Kap. 5),
- Die historischen Stimmungen (Kap. 6),
- Die gleichstufige Stimmung (Kap. 7).

Die **mathematische Beschreibung** beruht im Wesentlichen auf den zwei Bausteinen:

- Die Messung der Intervalle durch das logarithmische Centmaß,
- Eine abstrakte Intervall-Arithmetik in der Intervallschichtung („Adjunktion").

Und genau die Letztere befreit uns von der Last, alle Quinten-, Terz- und sonstigen Iterationen per Zahlenkalkül bestimmen zu müssen – also so, wie man es in den meisten früheren Literaturen vorfand. Das Erkennen von Regeln und Prinzipien ist hierbei jedenfalls kaum denkbar – und umgekehrt erscheinen uns so manche nur vage beschriebenen historischen Wege auf einmal absolut transparent. Um nun noch etwas „entlegene" Fragen (wie sie nur Mathematiker stellen können) zu beantworten, dient uns noch ein drittes Werkzeug:

- Die Eulersche Cent-Funktion.

Sie stellt eine vorzügliche Verbindung zwischen musikalischen Intervallen, Analysis und Geometrie dar. Ihr Einsatz ist jedoch nur punktuell vorhanden – dem hierin weniger geübten Leser werden die Ergebnisse auch erfreulicherweise nicht notwendigerweise verschlossen bleiben müssen – allenfalls die eine oder andere Komponente eines Beweises. Dagegen stellt die „Intervall-Arithmetik" zusammen mit dem „Centmaß" die durchgängige Methodik unserer Darlegung dar – eigentlich unverzichtbar.

Ja, diese Abhandlung ist zweifellos auch eine „Mathematische". So werden auch hier – wie gewohnt – Sätze, Definitionen, Theoreme formuliert – und zumeist auch „bewiesen". Der Beweis dient nämlich nicht nur der Überprüfung der angegeben Formeln oder Behauptungen, sondern er schult vor allem auch den Blick für die Zusammenhänge und ermöglicht dadurch erst die Vertrautheit und Verankerung der Inhalte. Versuchen Sie daher auch, die eine oder andere „Rechnung" nachzuvollziehen oder auch ähnlich gelagerte Aussagen bzw. Formeln bzw. Konstruktionen selbstständig zu prüfen.

## Aufbau des Buches

Kap. 1 stellt zunächst einmal die Mehrzahl der Begriffe vor. Insbesondere wird aber eine neue, äußerst effiziente Arithmetik für das Rechnen mit musikalischen Intervallen entwickelt. Ein weiterer Schwerpunkt ist die Messung von Intervallen vermöge des „Centmaßes“, welchem ein entsprechender Raum gegeben wird. Es folgt eine erste Einführung in die Theorie der Iterationsskalen. Einige nette wie nützliche Zahlenspielereien mit musikalischen Intervallen schließen sich an.

Kap. 2 ist ein Theorie-Kapitel; es widmet sich den einfachen und multiplen Intervall-Iterationen, den passenden Modellen (Tonspiralen und Eulersche Tongitter), der Erstellung von Mustern („Tonartencharakteristiken“) und vielem mehr.

Die Kap. 3 bis 7 sind – wie oben bereits erwähnt – den klassischen Skalen gewidmet. Sie besitzen dabei in der Regel den Aufbau:

Vorstellung – Historisches – Etwaige Verallgemeinerungen – Mathematische Ergänzungen.

Diese Kapitel könnten darüber hinaus auch als weitgehend eigenständige Lektüre genutzt werden, sieht man einmal von den zentralen Begrifflichkeiten (des Kap. 1) ab. Für einen Überblick empfiehlt sich insbesondere Kap. 6, welches über eine charakteristische Auswahl der vorwiegend barocken Temperierungen berichtet und dabei tatsächlich einige überraschende Resultate und moderne Betrachtungsmöglichkeiten aufzeigt.

Kap. 8 schließlich führt die allgemeine Iterationstheorie des Kap. 2 weiter: Wir stellen mittels der Eulerschen Cent-Funktion (die dort erneut erklärt wird) engste Verbindungen der Intervall-Arithmetik zur komplexen Zahlenebene – und damit zur Geometrie – her und widmen uns derart ausgerüstet dem „Tonverteilungssatz für multiple Intervall-Iterationen“.

## Danksagung

Dem Vieweg+Teubner Verlag danke ich aufs Herzlichste für die Übernahme des Buches in sein Verlagsprogramm, insbesondere schulde ich der Cheflektorin, Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch, ob ihrer steten Ermunterung zur Erstellung des Textes großen Dank. Die Leistung, ein beinahe unleserliches Vorlesungsmanuskript samt einer ungeheuren Vielzahl an neuen Symbolen in die vorliegende Druckform zu verwandeln, haben meine ehemaligen Master-Studenten Sascha Keil, Markus Tobis und Matthias Abdinghoff vollbracht. Danke. Meinen Leserinnen und Lesern danke ich für eine hoffentlich rege Diskussion; die mathematisch orientierten unter ihnen bitte ich aber auch um Nachsicht, wenn die eine oder andere Betrachtung nicht die vielleicht gewünschte Stringenz besitzt – wie ich aber auch ebenso die eher an den musikalischen Ergebnissen interessierten unter ihnen um Nachsicht bitte, bisweilen für deren Geschmack leider zu viel mathematischen Erklärwillen eingebracht zu haben.

## Schlussbemerkung

Diese ist weder der Bibel noch deren Schriften entnommen, wenn es auch eine prägnante Analogie zu den 12 Aposteln zu geben scheint:

Unter den 12 Quinten eines jeglichen Tonsystems ist stets eine, welche falsch ist, und man gab ihr den Namen „Wolfsquinte“. Bekommt nun der Wolf ein Komma zum Fraß, das ihm eine der anderen 11 gibt, so wird er einer von ihnen – jene aber zum Wolf.

Ich lade Sie ein, mit mir auf eine Entdeckungsreise zu gehen und zu erfahren, wie die „trockene“ Mathematik durch die Stärke ihrer Abstraktion uns zu neuen Einsichten führen kann, die Vielfalt der historischen Wege ordnet und dabei Gemeinsamkeiten, Methoden und Prinzipien erkennen hilft.

Krefeld
im August 2011

Karlheinz Schüffler
Mathematiker und Organist

# Inhaltsverzeichnis

# Grundlagen – Töne und Intervalle

# 1

## 1.1 Wer kocht, braucht Zutaten… – eine Einleitung

Beginnen wir mit einer Geschichte und vielleicht mag es sich wirklich mal so zugetragen haben.

**Die Quinten-Geschichte**

Irgendwo, irgendwann und irgendwie begegnen wir in einem der wohl selten genutzten Hinterzimmer eines dörflichen Lokals einem betagten Klavier, einem Instrument mit zweifellos nobler Vergangenheit. Eine spätabendliche Hochzeitsgesellschaft will unterhalten werden. Sicher, ein gestrenger Bach wird nicht erwartet, feine Muse gleichwohl. Doch oh je: unser Klavier ist in einem erbarmungswürdigen Zustand; schon der zaghafte Anschlag des $\mathrm{C}-\mathrm{Dur}$ Akkords lässt uns erschauern, und uns deucht, dass wir dies der Gesellschaft wahrlich nicht zumuten wollen – auch nicht zu fortgeschrittener Stunde. Überdies wissen wir ja leidgeprüft, dass der miserable Klang eines Instruments ja nicht selten dem Talent seines Spielers zugerechnet wird – ist es denn nicht so, dass „der Maestro des Konzertsaals dem Instrument ganz besonders tolle Töne entlocken konnte". Schrieb jüngst der Kritiker. Also gut, ein passender Steck-Schlüssel ist schnell zur Hand – dieser und das Ohr sollen nun alles richten, und Zeit ist noch, reichlich.

Wir machen uns also über die Quinten-Reihe

$$\mathrm{C}-\mathrm{G}-\mathrm{D}-\mathrm{A}-\mathrm{E}-\mathrm{H}-\mathrm{Fis}-\mathrm{Cis}-\mathrm{Gis}(=\mathrm{As})-\mathrm{Dis}\ (=\mathrm{Es})-\mathrm{B}-\mathrm{F}$$

her. Dabei starten wir am mittleren $\mathrm{C}$, gehen Quinten aufwärts – wobei wir bei Oktavüberschreitungen hinsichtlich des Tonika- $\mathrm{C}$ wieder um eine Oktave abwärts springen, stimmen und weiter machen, Quinte aufwärts und so fort, sicher der richtige Weg. Da das Ohr uns sagt, wann die Quinte stimmt, wenn also nichts mehr „schwebt" sondern alles glatt klingt, haben wir – mit oder ohne Wissen – die reine Quinte des Pythagoras



K. Schüffler, *Pythagoras, der Quintenwolf und das Komma,*
DOI 10.1007/978-3-658-15186-7_1

und Oktaven als stimmende Schrittmaße benutzt – kein Problem. Eine Stunde ist vergangen – wir haben alle 12 Töne der Referenz-Mitteloktave hingekriegt; das $C^1$ – die Oktave über dem C – stimmen wir noch als dessen Oktavton und haben damit die komplette mittlere chromatische Referenz-Tonleiter gewonnen. Die anderen Oktaven werden wir dann einfach anpassen, quasi als Kopien. Nicht ganz ohne Befürchtung ob des Gelingens unserer Bemühung machen wir doch lieber zuvor noch eine Kontrolle:

C – Dur: Dreiklang: Klasse. D – Dur: Prima. F – Dur: Was ist das denn? Fürchterlich, F – A wie auch F – $C^1$ klingen ja schlimmer als vorher. „Hmmm – dann haben wir zwischendurch in der Quintenkette sicher irgendwo nicht aufgepasst“. Wir prüfen – aber alles perfekt. Aber von F nach $C^1$ aufwärts: Unmöglich, nichts zu machen. Sogar die Tonleiter auf F klingt merkwürdig, irgendwie archaisch oder arabesk.

Als sich gottseidank noch ein K-Board findet, geben wir auf. Aber den ganzen Abend rätseln wir rum…

**Die Leitgedanken**

Wir unternehmen in diesem Buch also eine Reise in die Welt der musikalischen Stimmungen, einem historisch gewachsenen Labyrinth aus Skalen und Zahlen. Genau genommen wollen wir aber die Strukturen und deren architektonische Aufbaumechanismen verstehen lernen, Mechanismen, welche letztendlich in einer Fülle von kryptisch anmutenden Zahlentabellen münden.

Die Temperierung ist – für gewöhnlich – genau diese datenbezogene Erfassung der charakteristischen Stufen- oder Tonfolgen einzelner Tonleiterskalen – die Temperierungstheorie stellt aber darüber hinaus auch noch die Fragen des „WARUM“. Und auf dem Wege, sich diesem WARUM zu nähern, gesellt sich die Mathematik beinahe zwangsläufig hinzu und übernimmt die Verantwortung über das, was wir mit unseren Fragen aufwerfen. Und um es vorweg zu nehmen: Mit dieser Mathematik ist keineswegs ein Zoo aus Zahlentabellen gemeint, denn selten klärt sich eine Frage des WARUMS aus einer Zahl heraus; vielmehr zeigt sich auch hier die Mathematik als ordnende Hand, ausgestattet mit dem Bestreben, Begriffe klar zu fassen und mit der ihr eigenen Stringenz ein Geflecht aus Beziehungen, Fakten und Folgerungen zu errichten.

Zurück zu unseren Tonleitern: Handelt es sich nicht um was Nebensächliches, gar Triviales, eine Leiter von 7 oder 12 Stufen zu bilden? Und warum hat man von alters her nicht ganz einfach die Oktave in 12 – gleiche – Teile geteilt und fertig wäre die Tastatur. Aber schon die Fragen „was heißt „gleich“ – und: wie ginge das am Instrument umzusetzen“ lassen schon erste Nachdenklichkeiten aufkommen. Und vor allem: „Wie klingt das; ist das auch schön anzuhören?“ – diese Frage lässt ahnen, dass sich hier ein weites Verbundfeld aus Ästhetik, Historie, Physik, Mathematik – ja und Musik – auftut.

Wann überhaupt klingen zwei oder mehrere Töne „schön“ – oder „schmeicheln unserem Ohr“ – wie sich die Experten des Bachzeitalters ausdrückten? Zweifellos eröffnet diese Frage ein ganz eigenes riesiges Feld, ganze Wissens- und Erfahrungsbereiche vereinnahmend.

Für unsere Zwecke reicht es aber gottlob, dass wir – ausgehend bei Pythagoras und weniger ästhetisch als physikalisch – dieser Frage wie folgt begegnen: Stehen die Schwingungszahlen (Frequenzen) zweier Töne in einem möglichst einfachen Zahlenverhältnis zueinander, so erweist sich der Zusammenklang als schwebungsarm, wenn nicht gar schwebungsfrei; der Klang erscheint „stabil", Musiker sagen „sauber intoniert" oder ähnlich. So finden die Frequenzverhältnisse

2 : 1 – das ist „die" Oktave
3 : 2 – das ist „die" Quinte
5 : 4 – das ist „die" Terz

und einige wichtige andere beim Ohr großes Gefallen. Der Hintergrund ist natürlich, dass in dieser Konstellation eine möglichst einfach gebaute „stabile" Gesamtschwingung (Überlagerung) aus den Einzel-Schwingungen entsteht, welche dem Ohr schmeichelt. So ist es zum Beispiel im 3 : 2- Fall so, dass bereits nach zwei Schwingungen des tieferen Tons und drei Schwingungen des höheren Tons die Gesamtschwingung sich periodisch gleich fortsetzt. Pythagoras selbst hat die 3 : 2- Quinte zum alleinigen Grundintervall gekürt (neben Prim und Oktave), und seine Tonkonstruktionen ließen auch nur diese Zahlen 1, 2, 3 (aber auch 4) zu, wie uns die Lehre der pythagoräischen „Tetractys" zeigt. Alle weiteren Tonkonstruktionen bestanden letztlich aus Aneinanderreihungen (Addition und Subtraktion) von Quinten und Oktaven und den auf diese Weise bereits gewonnenen Konstrukten.

Im Grunde verdanken wir genau dieser Quinten-Konstruktion das bekannte Modell des **12-gliedrigen Quintenzirkels,** also die Universalquelle unserer tonalen – harmonischen Musiklehre.

**Die Lösung des Rätsels**

Wenn nun die Quinten-Geschichte wie geschildert stimmt: Wo genau liegt das Problem, wie lässt es sich erklären und – wer weiß – möglicherweise beseitigen??? Gibt es am Ende einen Widerspruch in der pythagoräischen Quintenkreis-Konstruktion?

Verfolgen wir noch einmal den Quintenverlauf mit den dazu passenden Oktavierungen

$$\mathrm{C} \nearrow \mathrm{G} \nearrow \mathrm{D}^1 \searrow \mathrm{D} \nearrow \mathrm{A} \nearrow \mathrm{E}^1 \searrow \mathrm{E} \nearrow \mathrm{H} \nearrow \mathrm{Fis}^1 \searrow \mathrm{Fis} \nearrow \mathrm{Cis}^1 \searrow \mathrm{Cis} \nearrow \mathrm{Gis} \nearrow \mathrm{Dis}^1 \searrow \mathrm{Dis} \nearrow \mathrm{B} \nearrow \mathrm{F}^1 \searrow \mathrm{F}.$$

Jetzt wären alle 12 Töne der Oktave C – H erreicht. Das sind bis zum Ton F genau 11 Aufwärtsquinten bei 6maligem Abwärtsoktavieren. Wenn nun jede Aufwärtsquinte die Frequenz des Vor-Tons um das $^3/_2$ fache vergrößert, wenn eine Abwärtsoktave die Frequenz des Vor-Tons halbiert, erreichen wir für den Ton F den Frequenzfaktor

$$(^3/_2)^{11} : 2^6 = 3^{11}/2^{17}$$

gegenüber dem Start C. Was passiert, wenn wir nun erneut eine Quinte aufwärts und dann eine Oktave abwärts schreiten? Auf der Tastatur sähe es so aus, als hätten wir dann das Ausgangs-C erreicht. Der totale Frequenzfaktor zu C ist dann aber genau

$$\varepsilon = 3^{12}/2^{19}.$$

Wäre nun $\varepsilon = 1$, so wäre der Kreis geschlossen und die 12. reine Quinte hätte zum Ausgangston – das heißt: seiner Oktave – geführt. Ist es aber nicht, könnte es auch nie sein, denn $3^{12}$ ist stets ungerade, $2^{19}$ jedoch stets gerade. Tatsächlich ist nämlich

$$\varepsilon = 3^{12}\Big/2^{19} = 1{,}0136\ldots$$

Und genau dieses berühmte Epsilon – das „**Pythagoräische Komma**" – ist der Kern des Übels. Auf den ersten Blick möchte man die Abweichung des Epsilon gegenüber 1 für geringfügig halten – tatsächlich ist dieses Defizit-Intervall jedoch ein ungefähres Viertel eines üblichen „Halbtons" groß. Und genau dieser Anteil fehlt der letzten, 12. Quinte $F \nearrow C^1$. Man nennt sie auch **„Wolfsquinte"** – sicher, weil ähnlich Schauriges wie Wolfsgeheul dem Ohr blüht, weiß man sie nicht zu meistern. Unsere Quinten-Stimmung musste also misslingen.

Was wir jedoch hieraus auch lernen ist, dass selbst scheinbar unbedeutende Abweichungen zu Missliebigem und Unbrauchbarem führen können. Dies zu sehen, bedarf es nun tatsächlich weniger einer Zahlen-Akrobatik, also einer Rechnen-Mathematik, sondern vor allem einer solchen, die diese Dinge allgemein vom Grundsatz her erkennt, begründet und ordnet.

**Die Zutaten**

Das vorliegende Kapitel stellt nun die wesentlichen Werkzeuge und Begriffe zusammen, mit denen wir mit musikalischen Intervallen rechnen und konstruieren lernen. In erster Linie sind die beiden Maß-Bestimmungen entscheidend, welche jegliche Intervall- beziehungsweise Skalen-Arithmetik begleiten: Während das physikalische Frequenzmaß zwar die natürliche Definition in sich trägt, jedoch beinahe untauglich im arithmetischen Umgang mit Intervallkonstruktionen ist, zeigt sich das logarithmische Maß (das „Centmaß") zwar mit der kleinen Hürde seiner Definition belastet – belohnt uns aber durch seine Anschaulichkeit. So hat beispielsweise die Hälfte eines Intervalls auch die halbe Cent-Zahl – Beim Frequenzmaß ist es jedoch dessen Wurzel(!), um noch eine vergleichsweise harmlose Situation zu nennen.

Tatsächlich gilt für das Reich der Töne – ebenso wie für beinahe alles in der Natur – die Regel exponentieller Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge. Wir erkennen das an der Silhouette der Orgelpfeifenreihen wie auch beispielsweise beim Betrachten der Abstandsfolge der Bünde einer Gitarre: Beide sind Visualisierungen ganz bestimmter exponentieller Funktionen.

Die Exponentialfunktion verwandelt nun Summen zu Produkten – ihre Inverse, der Logarithmus, tut das umgekehrte. So entstehen aus exponentiell bedingten Frequenzprodukten als Maß für oftmals recht aufwendig erbaute Intervall-Ketten vermöge des Centmaßes deren einfache additive, gewöhnliche metrische Aneinanderreihung – mit allen erdenklichen Vorteilen, die die so erhaltene Anschaulichkeit nun ermöglicht.

Die nachfolgenden ersten vier Abschnitte **– die Zutaten –** befassen sich also mit

- Tönen, Schwingungen Schwebungen und Frequenzen, soweit wir dies für unsere Ziele als hilfreich ansehen,
- Intervallen, ihrem Frequenzmaß und dem Vier-Töne-Satz, dem musikalischen Analogon des berühmten Strahlensatzes der Geometrie,
- einer modernen Rechen-Algebra für Intervalle – schließlich sind ja Skalen Aneinanderreihungen von diversen Ganz- und/oder Halbtönen –,
- sowie mit dem Centmaß, also dem logarithmischen Intervallmaß.

Es folgen einige Abschnitte, die uns zum einen ein wenig auf die Spielwiese von „Mathematik und Musik“ ausführen, zum anderen uns aber auch die Früchte der Intervall-Algebra im abstrakten Spiel mit Intervall-Schichtungen („Iterationen“) nicht vorenthalten möchten – schließlich wird in der Skalentheorie hiervon notwendigerweise ständig Gebrauch gemacht.

- Die Konsonanz-Lehre von Euler verbindet mittels seiner „Gradus suavitatis – Funktion“ die „Harmonia“ mit einem ausgeklügelten Primzahl-Kalkül.
- Eine wahre Fundgrube, immer wieder interessante (sogar neue) Zusammenhänge zwischen musikalischer Akkordik und einfachen Zahlenspielereien zu entdecken, finden wir beim Experimentieren mit Mittelwerten.

Unser letzter Abschnitt dieses Einführungskapitels ist dagegen den Fundamenten einer Mathematik der Intervall-Iterationen gewidmet:

- Unser tragendes Gerüst der Mathematik der Skalen-bezogenen Intervall-Iterationen besteht aus den drei Theoremen für multiple Intervall-Iterationen:
  - Theorem über Periodizität und Endlichkeit,
  - Theorem über Eindeutigkeit und Unendlichkeit,
  - Theorem von Levy-Poincaré über die Ton-Verteilungen.

Übrigens, die Quinten-Geschichte hat sich ganz sicher zugetragen, so oder so ähnlich – und wurde mit jugendlicher Unbekümmertheit erlebt.

## 1.2 Töne: Schwingungen, Schwebungen und Monochordium

Wir stellen uns also die Aufgabe, die vielfältigen Zusammenhänge in der Welt der Tonleiter-Skalen zu verstehen. Und in erster Linie bedeutet das, dass wir uns mit dem Problem beschäftigen wollen, in einem Oktavraum eine 12-gliedrige Skala von Tönen zu bestimmen, welche ganz bestimmten Forderungen genügt. Wobei wir vor allem im Auge haben, die Gesetzmäßigkeiten und die vergleichende Analyse gegenüber einer auf bloße Numerik bedachten Tabellierung herauszustellen. Dazu bedarf es ganz bestimmt einer ziemlich präzisen Vorstellung von dem, was vor allem unmittelbar mit den Begriffen der Messbarkeit der Töne und ihrer Distanzen als auch denjenigen rund um das Zusammenklingen der Töne untereinander zu verstehen ist. Für unsere Zwecke reichen allerdings die wenigen – hier aber profunden – Vorstellungen über

| | |
|---|---|
| Töne: | Tonhöhe, Stärke und Dauer sowie Synthese (Spektrum) |
| Intervalle: | Größe als Abstand zweier Töne, musikalische Einordnung |

im Grunde aus. Also werden wir nun einen kurzen Ausflug in die akustische Physik unternehmen, damit unser Hauptziel, Tonfolgen – Skalen – untereinander zu vergleichen indem wir ihren Aufbau studieren, erfolgreich sein kann.

**Ton und Schwingung**

Im Unterschied zu allen anderen hörbaren „Geräuschen“ wird ein **„Ton“** dadurch charakterisiert, dass er eine (Luft-)Schwingung darstellt, welche periodische, zumindest jedoch annähernd periodische, Grundmuster aufweist.

Nur solche Muster werden durch unser Hör- und Nervensystem als „musikalischer Ton“ (einer subjektiv empfundenen Tonhöhe) erkannt. Das Gefüge und die Folge derartiger Töne nennen wir Klänge und Melodien, unbeschadet einer künstlerischen Attitüde.

Die Grundform einer eindimensionalen **periodischen Schwingung** (siehe Abb. 1.1) lässt sich als Formel (Funktion) so beschreiben

$$x(t) = A(t) \cdot \sin(\omega t + \alpha) \text{ mit } \omega = 2\pi \cdot f \text{ und } T\omega = 2\pi.$$

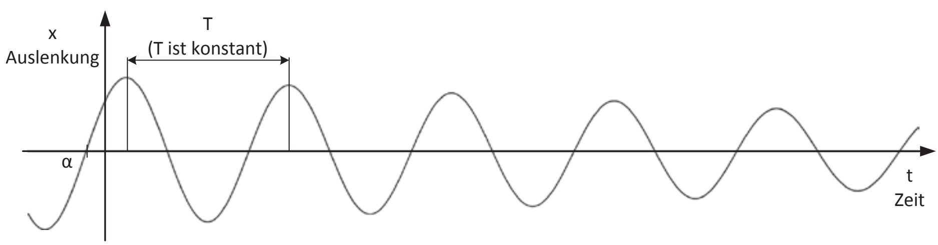



**Abb. 1.1** Grundform einer periodischen Schwingung

Hierbei bedeuten:

| | |
|---|---|
| t: | Zeit (in Sekunden) |
| f: | Frequenz (Schwingungen pro Sekunde) |
| $\omega$: | sogenannte Kreisfrequenz (ebenfalls kurz: „Frequenz“) |
| $T = 1/f$: | Dauer einer einzigen Schwingung |
| $\alpha$: | Phasenwinkel |
| $A(t)$: | (zeitabhängige) Amplitude |

Die **Amplitude** ist für die **Tonstärke** verantwortlich und die **Frequenz** – und genau dies ist für uns wichtig – für die Tonhöhe! Die „Dauer einer einzigen Schwingung“ (T) heißt im Fach-Jargon „kleinste Periode“ – oder vereinfacht „die“ Periode der Grundschwingung. Sie ist durch die Bedingung

$$\sin(\omega(t+T)+\alpha) = \sin(\omega t+\alpha)$$

für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ festgelegt. Dann ist nämlich $\omega T = 2\pi$ (beziehungsweise allgemeiner: $\omega T = 2k\pi$, mit $k \in \mathbb{Z}$). Natürlich kann hier „Sinus“ durch „Cosinus“ ersetzt werden.

Für solche Grundschwingungen gibt es einige Rechenspielchen. Zum Beispiel kann man zwei oder mehrere Schwingungen addieren („überlagern“) so wie es letztlich in der Realität auch gegeben ist, wenn zwei Töne zusammen klingen.

Für zwei Grundschwingungen $x_1, x_2$ gleicher Frequenz $\omega$, von denen wir mal im Moment annehmen, dass ihre Amplituden sich zeitlich nicht oder nur geringfügig ändern, die also so ausgedrückt werden

$$x_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t+\alpha_1)$$
$$x_2(t) = A_2 \cdot \sin(\omega t+\alpha_2)$$

entsteht durch Überlagerung eine neue Schwingung und wir erhalten das Resultat

$$x_1(t) + x_2(t) = A \cdot \sin(\omega t+\alpha),$$

wobei gesetzt wurde:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\tan\alpha = \frac{A_1 \cdot \sin\alpha_1 + A_2 \cdot \sin\alpha_2}{A_1 \cdot \cos\alpha_1 + A_2 \cdot \cos\alpha_2}.$$

▶ Töne gleicher Frequenz überlagern sich zu einem neuen Ton gleicher Frequenz.

Töne, die von „1-dimensionalen Erzeugern“ wie Saiten oder Flöten stammen, sind nun in der Regel aus Schwingungen zusammengesetzt – sprich „überlagert“ – die als Frequenzen nur

- ganzzahlige Vielfache einer gewissen „Grundfrequenz" $\omega$

haben. Man nennt dies das „Spektrum" des Tons und die Darstellung eines Tons als Überlagerung einzelner Schwingungen seine „Spektraldarstellung". Und eine Begründung für diese Sonderstellung der Natürlichen Zahlen im Gefüge der Schwingungen findet sich in der mathematischen Lösung der physikalischen Gesetze für solche Schwingungserzeugungen. Wir wären dann auf dem Feld der gewöhnlichen Differenzialgleichungen unterwegs. Sollte der Klangerzeuger allerdings beispielsweise zweidimensional – wie etwa bei Trommeln, schwingenden Membranen – sein, wären diese Dinge noch deutlich komplizierter, weil dort sogar die „Partiellen Differenzialgleichungen" die Dinge im Hintergrund regeln … Und ganz sicher sind auch reale Klangerzeuger wie Orgelpfeifen nur in einem idealisierten Modell als schwingende „1-dimensionale" Säulen anzusehen. Die Mathematik dieser Akustik würde uns im Übrigen in fernab liegende mathematische Welten führen. Aber gottlob bleibt uns dies für die Theorie unserer Skalen-Mathematik erspart.

Eingedenk dieser Vorüberlegungen treffen wir folgende Beschreibung eines „Tons", so wie es für unsere Zwecke passend ist:

**Definition 1.1 (Basismodell eines Tons)**
Ein (musikalischer) Ton ist die Überlagerung (= Summe) einer gewissen, theoretisch unendlichen Folge von Einzelschwingungen $x_n, n = 1, 2, 3, \ldots$,wobei $x_n$ die n -fache Frequenz einer gegebenen Grundschwingung $\omega$ besitzt.

Mathematisch drückt sich dieses in einer Funktionsformel aus, die man auch als „Spektralformel" oder „Spektraldarstellung" bezeichnet,

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(n\omega t) + B_n \cos(n\omega t)].$$

Der erste Summand

$$x_1(t) = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t,$$

den man mittels einer Phasenverschiebung $\alpha$ auch in der Form

$$x_1(t) = C \sin(\omega t + \alpha),$$

darstellen kann, ist hierbei die „Grundschwingung" und $\omega$ die „Tonhöhe" des Tons $x(t)$, die man als „gehörte" Tonhöhe wahrnimmt. Die Anteile

$$x_n(t) = A_n \sin(n\omega t) + B_n \cos(n\omega t) = C_n \sin(\omega t + \alpha)$$

mit $n > 1$ heißen Oberschwingungen (auch Obertöne oder n-te Partialtöne) des Tons.

Die Amplituden $A_n$ und $B_n$ können dabei zeitlich variabel sein. Die Frequenz $\omega$ ist also die kleinste (sprich „tiefste“) gemeinsame Frequenz aller Teiltöne, und man nennt

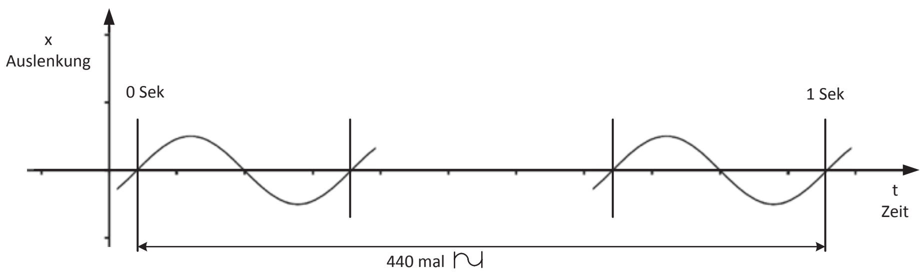
$$f = \frac{1}{2\pi}\omega$$

(eigentliche) Tonhöhe, die man in der Musik in Hertz (Hz) = Anzahl Schwingungen/sec misst:

$$[x] = {}^{\text{Anzahl Schwingungen}}/_{\text{sec}} = \text{Hertz} - \text{Zahl des Tones } x.$$

**Beispiel 1.1 (Grundschwingung)**

Für den „Kammerton a“ wird oft $[a] = 440$ Hz festgelegt: Die Grundschwingung vollzieht in 1 Sekunde 440 periodische Bewegungen.




### Töne und Schwebung

Die praktizierenden Musiker unter uns wissen gewiss etliche Geschichten aus dem Alltag des Zusammenspielens zu berichten, Geschichten rund um das Streben, Reinheit in Ton und Klang als unausgesprochene Maxime zu erhalten. Ist es nicht doch oftmals leider so, dass sich ein wunderbarer glatter Ton sehr schnell in ein flirrendes Etwas verwandelt, sobald sich ein zweiter – und auf den ersten Eindruck hin – gleich hoher Ton dazu gesellt? Oder auch dann, wenn es zwar nicht ein gleich hoher – sondern einer, der eine Quinte oder eine Terz weit entfernt sein soll: Plötzlich wird aus einem in sich ruhenden Akkord ein waberndes Tongebräu, dem eine längere Erklingdauer nicht unbedingt gewünscht wird. Nicht nur die Orgel – aber gerade sie – ist ein vorzügliches akustisches Laboratorium, den steten Kampf um den „Wohl-Klang“ zu erleben.

Wir sind damit bei dem Phänomen der Schwebung angekommen, einem Phänomen, welches aufs engste mit der Theorie der Skalen verwoben ist. Dazu machen wir wieder einen kurzen Ausflug in die mathematische Beschreibung der Töne, wobei uns glücklicherweise das sicher einfachere Modell der Töne als Einzel-Schwingungsfunktionen genügt.

Überlagert man zwei Schwingungen mit Frequenzen $\omega_1$ beziehungsweise $\omega_2$, und bedienen wir uns der strafferen Darstellung mittels einer Phasenverschiebung, also

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1),$$

$$x_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$

so kann die Summe $x_1(t) + x_2(t)$ unter Zuhilfenahme einiger Formeln der trigonometrischen Welt ebenso wieder in dieser Grundform geschrieben werden:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A(t) \cdot \sin(\omega_1 t + \alpha(t))$$

mit: $\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2 - \Delta\omega t)}$$

$$\tan\alpha(t) = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin(\alpha_2 + \Delta\omega t)}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos(\alpha_2 + \Delta\omega t)}.$$

Diese Formeln enthalten auch den Spezialfall gleicher Frequenzen ($\omega_1 = \omega_1$), wie wir es schon zuvor kennengelernt hatten. Folgendes lässt sich hieraus ablesen:

1. Eine Überlagerung $x_1(t) + x_2(t)$ ist periodisch $\Leftrightarrow$ $\omega_1$ und $\omega_2$ stehen in einem rationalen Verhältnis zueinander, das heißt

   $$m\omega_1 = n\omega_2 \text{ mit natürlichen Zahlen } n, m \in \mathbb{N},$$

   wozu man früher auch sagte, dass die Frequenzen „kommensurabel“ sind.
2. Die neue „Amplitude“ $A(t)$ ist selbst wieder periodisch mit einer Periode $\Delta\omega$ („Schwebungs-Frequenz“); die Schwingungsfrequenz $(\omega_1 + \alpha(t)/t)$ verändert sich dagegen im Allgemeinen.
   Diese periodische Amplitudenschwankung $A(t)$ kann wahrgenommen werden. Sie heißt **Schwebung**. Diese besitzt die Frequenz $|\omega_1 - \omega_2|$.
3. Im vereinfachten Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $A_1 = A_2 = A$ gewinnt man die Formel

   $$x(t) = A\sqrt{2 + 2\cos(\Delta\omega t)} \cdot \sin\left(\omega_1 t + \frac{\Delta\omega}{2} t\right)$$

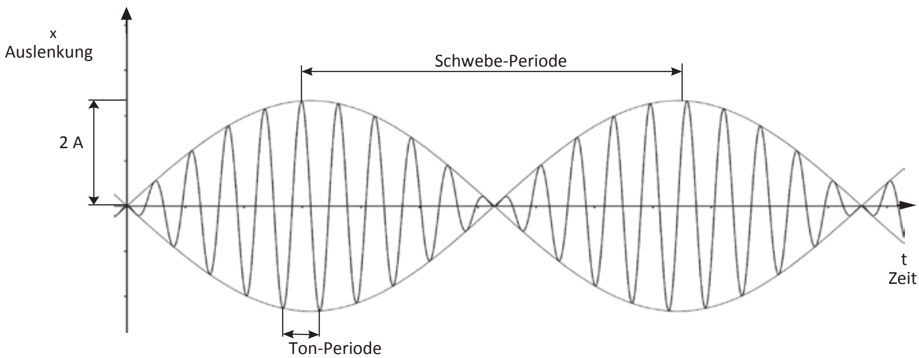
   $$= 2A\left|\cos\frac{\Delta\omega}{2} t\right| \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right),$$

   sodass auch hier (wegen des Betrags!) die Schwebungsfrequenz $= \Delta\omega$ ist, weil nämlich $|\cos\beta t|$ die halbe Periode wie $\cos\beta t$ hat.

**Beispiel 1.2 (Schwebung zweier Grundschwingungen)**

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= 440\text{ Hz}\\ \omega_2 &= 442\text{ Hz}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Schwebung hat 2 Hz}$$

Modell einer Überlagerung zweier Grundschwingungen gleicher Amplitude




**Beispiel 1.3 (Nutzung der Schwebung beim Stimmen)**

- gegeben a: 440 Hz
- gesucht $d_t$: gleichstufig temperierte Quinte unter a

Stimme zunächst d rein als Unterquinte zu a. Dann ist keine Schwebung zu hören. Nun gilt für diese gleichstufige temperierte Quinte (nach Abschn. 7.2):

Hertz-Zahl von $d_t$ ist $220\left(\sqrt[12]{2}\right)^5$ Hz $= 293{,}6648$ Hz.

Der 3. partielle Oberton von $d_t$ hat nun $3 * 293{,}6648$ Hz $= 880{,}9944$ Hz,
Referenzton ist der 2. Partialton von a mit $2 * 440$ Hz $= 880{,}000$ Hz$\rightarrow$ Unterschied $\sim 1$ Hz – das ergibt die Schwebungsfrequenz $1/\text{sec}$ bzw. $^{10}/_{10}$ sec.
Nun verändert man das ursprünglich reine d, bis diese Schwebungsfrequenz sich hörbar einstellt. Dann hat sich das ursprüngliche reine d zum gleichstufig temperierten $d_t$ gewandelt.

### Reine Intervalle und Obertöne

Der Begriff der „Reinheit“ eines Intervalls verschließt sich leider einer simplen definitorisch klar umrissenen Festlegung. Das liegt in der Natur der Sache ebenso wie an subjektiv geleiteten Vorstellungen wie aber auch an historisch erwachsenen Begriffsprozessen. In jedem Fall entdeckt man das Beziehungsgeflecht

▶ Reine Intervalle: Schwebungsfreiheit – Naturtonreihen und Oberton-Spektrum – Konsonanz – Klangschönheit – Primzahl-Relationen

Wir listen einige Beobachtungen auf:

1. Die Einzelfrequenzen der Partialtöne sind im Basismodell des Tons also Vielfache der Grundfrequenz f (bzw. $\omega$). Dies ist die eigentliche Geburtsstunde der Begriffsbestimmungen der klassischen Intervalllehre.
2. Die unendliche Folge der Partialtöne bildet eine „Naturtonreihe", welche letztlich nicht durch eine Tastatur realisierbar ist.
3. Der Amplitudencharakter der einzelnen Obertöne $(A_n, B_n)$ des Spektrums definiert (unter anderem) die Klangfarbe eines Instruments und die Klangenergie. (siehe [27], S. 130)
4. Die Obertöne bilden mit der Grundfrequenz – aber auch untereinander „reine Intervalle", und mittels des „Schwebungseffektes" können gewollte Abweichungen vom Reinheitsgrad zu stimmender Töne dank dieser Obertöne erreicht werden. Das haben wir am Beispiel 1.3 gezeigt.
5. Der Begriff der Konsonanz führt in vertiefte Bereiche von Physik und Mathematik. Hier findet man systematische Arbeiten bei dem Physiker Hermann von Helmholtz und dem Mathematiker Leonhard Euler. Wir kommen darauf zurück.

Oktaven, Quinten, Quarten, Terzen (und einige andere Intervalle) werden – in ihrer *reinen* Form – durch ganzzahlige Frequenzverhältnisse festgelegt. Die wichtigsten hiervon zeigt die Tab. 1.1.

Das bedeutet, dass wir für diese Intervalle in ihrer sogenannten „Reinform" folgende definitorischen Festlegungen haben:

**Definition 1.2 (reine Intervalle)**
Es seien $x_1, x_2$ zwei Töne mit den (Grund-) Frequenzen $\omega_1, \omega_2$ beziehungsweise $f_1, f_2$. Dann bildet das Tonpaar $x_1, x_2$ das Intervall

$$\begin{aligned}
&\text{Reine Prim} && \Leftrightarrow\ f_1 : f_2 = 1 : 1\\
&\text{Reine Terz} && \Leftrightarrow\ f_1 : f_2 = 4 : 5\\
&\text{Reine Quarte} && \Leftrightarrow\ f_1 : f_2 = 3 : 4\\
&\text{Reine Quinte} && \Leftrightarrow\ f_1 : f_2 = 2 : 3\\
&\text{Reine Oktave} && \Leftrightarrow\ f_1 : f_2 = 1 : 2.
\end{aligned}$$

Dies sind die Hauptintervalle der heptatonischen Skalen. Allgemein gelten nach antiker Vorstellung sowohl alle (Oberton-)Intervalle $1 : n$ als auch deren direkte Differenzen, die einfach superpartikulären Intervalle $n : n + 1$, als rein.

**Tab. 1.1** Natürliche Intervalle und Oberschwingungen

| f | 2f | 3f | 4f | 5f | 6f |
|---|---|---|---|---|---|
| Grund-Frequenz | Oktave | Quinte über Oktave | Doppeloktave | Terz über Doppeloktave | Oktave von 3f |

Speziell führt die Verdopplung bzw. Halbierung der Frequenzen zu Oktav-Fortschreitungen, in Formeln

$$\left\{ 2^m \mathrm{f} \middle| \mathrm{m} = 0 \pm 1, \pm 2 \right\} = \text{Oktavenfolge.}$$

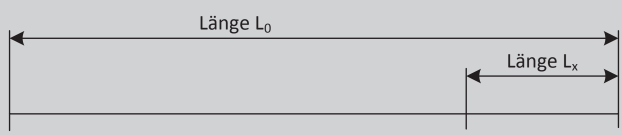
Beachte: Hat ein Ton die Grundfrequenz $^1\!/_2\mathrm{f}$, so liegt er „1 Oktave tiefer“ als der Ton mit Frequenz f.

Oktaven sind allerdings stets in ihrer reinen Form zu verstehen – die Prim meist auch. Die anderen Intervalle sind letztlich – bei fehlendem Attribut „rein“ – als von variabler Größe zu verstehen – und zwar bedingt durch der Aufgabe der Skalenbildung. Dies zu untersuchen ist ja der eigentliche Hauptgegenstand dieses Buches.

**Monochordium**

Frequenzverhältnisse lassen sich traditionell gut am sogenannten Monochord – dem Instrument aus einer einzigen gespannten Saite – demonstrieren. Das Prinzip hierbei ist, dass eine („leere“) gespannte Saite, die also einen gewissen Grundton hat, durch Abdrücken an Zwischenpunkten höhere Töne erzeugt, ganz so, wie wir es bei der Geige oder bei der Gitarre sehen. Dabei zeigt es sich, dass Tonhöhen-Verhältnisse und Saitenlängen-Verhältnisse sich reziprok entsprechen. Genauer formulieren wir dies in dem Satz:

**Satz 1.1 (Monochordformel)**
Hat eine gespannte Saite (leer = ganz) die Grundfrequenz $\mathrm{f}_0$, und haben wir die Teilung




so erhält man für die Frequenz $\mathrm{f}_\mathrm{x}$ der Teilsaite x der Länge $\mathrm{L}_\mathrm{x}$ die Formel:

$$\mathrm{f}_\mathrm{x} = \frac{\mathrm{L}_0}{\mathrm{L}_\mathrm{x}} \cdot \mathrm{f}_0 \quad \text{(Monochordformel)}$$

was man auch so formulieren kann

$$\mathrm{L}_\mathrm{x} \cdot \mathrm{f}_\mathrm{x} = \mathrm{L}_0 \cdot \mathrm{f}_0 = \text{konstant.}$$

Zur Begründung der Monochordformel kann letztlich etwas subtilere Physik dienlich sein. Der berühmte Gelehrte Mersenne (1588–1648) leitete die physikalische Formel her, nach welcher die Grundfrequenz $f_0$ einer schwingenden Saite sich berechnet aus ihrer Länge $L_0$ (in Meter m), der Massendichte $\mu \left(\text{in } \frac{\text{kg}}{\text{m}}\right)$ und der Zugkraft P:

$$f_0 = \frac{1}{2L_0}\sqrt{\frac{P}{\mu}} \quad \text{bzw} \quad f_0 \cdot L_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{\mu}} \quad \text{Mersennesche Frequenzformel.}$$

Daher gilt bei einer gespannten Saite der Gesamtlänge $L_0$ bei Grundfrequenz $f_0$ für die Frequenz $f_x$, welche zu einer gewählten Teilstrecke $L_x$ gehört (vergleiche die Skizze in Satz 1.1), ebenfalls

$$f_x \cdot L_x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{\mu}} = \text{const}(x) = f_0 \cdot L_0,$$

woraus sofort

$$f_x/f_0 = L_0/L_x$$

folgt. Frequenzen und Längen stehen in einem reziproken Verhältnis zueinander. Die Monochordformel ist damit auf einfache Art bewiesen.

**Folgerung**
Drückt man nun allgemein $L_x$ in Bruchteilen zu L aus, dann gilt

$$L_x = a \cdot L \ \Leftrightarrow f_x = \frac{1}{a} \cdot f_0$$

mit einem Teilungsparameter $0 \leq a \leq 1$.

**Aufgabe** Durch Teilung einer Saite L zum Teilungsparameter a entstehen nun die beiden komplementären Teile $L_x = a \cdot L$ und $L_y = (1 - a) \cdot L$. Frage: Wie stehen die beiden „Teiltöne“ – also der Vergleich beider Tonhöhen zueinander?

**Antwort** Es ist $f_x/f_y = \frac{1-a}{a}$.

Dazu wenden wir einfach die Monochordformel auf jedes Teilstück an und erhalten so:

$$L_x = aL_0 \Rightarrow L_y = L_0 - L_x = (1 - a)L_0$$

$$\Rightarrow f_x = \frac{1}{a}f_0 \text{ und } f_y = \frac{1}{1-a}L_0$$

$$\Rightarrow f_y/f_x = \frac{a}{1-a} \text{ beziehungsweise } f_x/f_y = \frac{1-a}{a} = \frac{1}{a} - 1.$$