

Manfred Albach

Induktivitäten in der Leistungselektronik

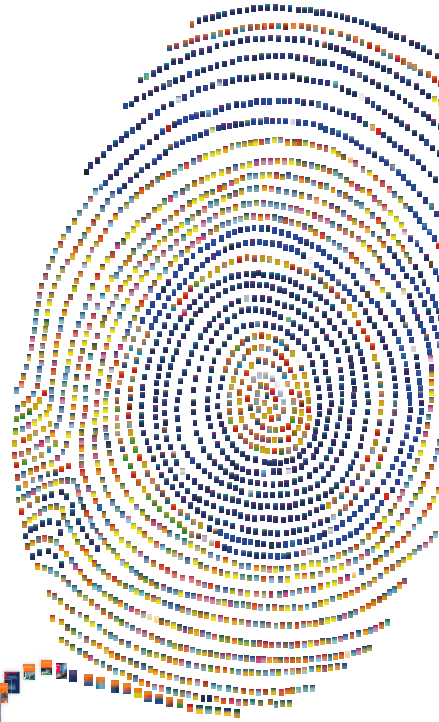
Spulen, Trafos und ihre
parasitären Eigenschaften

Induktivitäten in der Leistungselektronik




Lizenz zum Wissen.

Sichern Sie sich umfassendes Technikwissen mit Sofortzugriff auf tausende Fachbücher und Fachzeitschriften aus den Bereichen: Automobiltechnik, Maschinenbau, Energie + Umwelt, E-Technik, Informatik + IT und Bauwesen.

Exklusiv für Leser von Springer-Fachbüchern: Testen Sie Springer für Professionals 30 Tage unverbindlich. Nutzen Sie dazu im Bestellverlauf Ihren persönlichen Aktionscode **C0005406** auf www.springerprofessional.de/buchaktion/



Springer für Professionals.
Digitale Fachbibliothek. Themen-Scout. Knowledge-Manager.

-  Zugriff auf tausende von Fachbüchern und Fachzeitschriften
-  Selektion, Komprimierung und Verknüpfung relevanter Themen durch Fachredaktionen
-  Tools zur persönlichen Wissensorganisation und Vernetzung

www.entschieden-intelligenter.de

Manfred Albach

Induktivitäten in der Leistungselektronik

Spulen, Trafos und ihre parasitären
Eigenschaften

 Springer Vieweg

Manfred Albach
Lehrstuhl für elektromagnetische Felder
Friedrich-Alexander Universität
Erlangen, Deutschland

ISBN 978-3-658-15080-8
DOI 10.1007/978-3-658-15081-5

ISBN 978-3-658-15081-5 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Vieweg ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Strasse 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort

Die Ausgangssituation

Induktive Bauelemente spielen eine Schlüsselrolle bei der Entwicklung von Netzgeräten, Wechselrichtern und anderen leistungselektronischen Systemen. Die gegenseitige Abhängigkeit von ausgewählter Schaltung (Topologie und Betriebsart) und induktiver Komponente ermöglicht eine Optimierung des Gesamtsystems nur unter gleichzeitiger Einbeziehung der Spulen und Transformatoren.

Im Gegensatz zu den Halbleiterbauelementen oder auch den Kondensatoren sind die Spulen und Transformatoren aber nur in Sonderfällen, wie z. B. bei Filterspulen, käuflich verfügbar. In der Regel werden diese Bauelemente von den Schaltungsentwicklern passend für die jeweilige Applikation optimiert. Zur Erfüllung der unterschiedlichsten Anforderungen an die zu realisierende Komponente stehen dem Entwickler eine Vielzahl von Kernen, unterschieden nach Bauformen und Materialien, sowie verschiedene Querschnittsformen der Leiter, wie z. B. Runddrähte, Litzen oder Folien zur Verfügung. Unabhängig von dieser Auswahl besteht das Hauptproblem in der Festlegung des speziellen Wicklungsaufbaus. Unterschiedliche Kombinationen von Windungszahl und Luftspaltgröße und insbesondere die Positionierung der Windungen im Wickelfenster eröffnen vielfältige Möglichkeiten.

Der Wunsch nach kleiner werdenden Schaltungen führt häufig auf die Forderung nach höheren Schaltfrequenzen. Damit spielen die parasitären Effekte in den induktiven Komponenten eine immer bedeutendere Rolle, sowohl im Hinblick auf die Verluste als auch auf das EMV-Verhalten. In einigen Schaltungen kommt es auf minimale Streuinduktivitäten oder minimale Wicklungskapazitäten an, in anderen Schaltungen werden diese parasitären Eigenschaften in die Betriebsweise integriert, indem z. B. die Wicklungskapazität als Teil eines Resonanzkreises verwendet wird.

Ein gutes Verständnis für die Ursachen und die Beeinflussungsmöglichkeiten dieser parasitären Eigenschaften ist erforderlich, vor allem vor dem Hintergrund, dass sich diese Eigenschaften gegenseitig beeinflussen. Eine bessere induktive Kopplung zwischen den Transformatorwicklungen erhöht in der Regel die parasitären Kapazitäten sowie die Proximityverluste in den Wicklungen. Die zusätzlichen Randbedingungen bei der Auslegung der induktiven Komponenten, wie z. B. die zu übertragende Leistung, das maximale Volu-

men des Bauelements, die maximal zulässigen Verluste, der maximale Temperaturanstieg unter ungünstigsten Betriebsbedingungen oder auch das EMV-Verhalten erschweren die Situation zusätzlich.

Die Zielsetzung

Die primäre Zielsetzung dieses Buches besteht darin, ein tieferes Verständnis für die induktiven Bauteile und insbesondere deren parasitäre Eigenschaften zu entwickeln. Voraussetzung dafür ist die Kenntnis der elektrischen und magnetischen Felder innerhalb der dreidimensionalen Anordnungen. Diese Feldverteilungen sind der Ausgangspunkt für die weitere Analyse, wie z. B. die Herleitung der parasitären Eigenschaften.

Die Berechnung der Felder erfordert in der Regel einen hohen mathematischen Aufwand. Das gilt nicht nur für die induktiven und kapazitiven Kopplungen innerhalb der Wickelanordnungen, sondern insbesondere auch für die Berechnung der unterschiedlichen Verluste in Kern und Wicklung. Die Berücksichtigung nichtlinearer Materialeigenschaften erschwert die Analyse zusätzlich.

Simulationen mit Finite-Elemente Programmen benötigen sehr viel Speicherplatz und auch Rechenzeit. Das hängt vor allem damit zusammen, dass viele Windungen mit dünnen Drähten oder Litzen und mit eventuell kleiner Eindringtiefe aufgrund der hohen Frequenzen in einem verglichen dazu großen Wickelfenster untergebracht werden. Die dadurch notwendige Diskretisierung hat bei der Optimierung aller möglichen freien Parameter einen nicht vertretbaren zeitlichen Aufwand zur Folge. Zum Durchlaufen der vielen Optimierungsschleifen bieten auf analytischen Formeln basierende Programme deutliche Vorteile. Die Finite-Elemente Programme spielen ihre Vorteile dann aus, wenn Effekte an komplizierten Strukturen untersucht werden sollen, die einer analytischen Rechnung nicht mehr zugänglich sind.

Die Vorgehensweise

In den folgenden Kapiteln werden wir die einzelnen parasitären Eigenschaften getrennt untersuchen. Dazu werden ausgehend von dem geometrischen Aufbau nach Möglichkeit analytische Beziehungen aufgestellt. Bei manchen Problemstellungen wird der mathematische Aufwand derart komplex und umfangreich, dass auf eine ausführliche Herleitung der Gleichungen verzichtet wird. In diesen Fällen wird auf Simulationen mit handelsüblichen Softwaretools oder auch auf Messungen zurückgegriffen.

Viele Zusammenhänge werden an konkreten Zahlenbeispielen mit ausgewählten Kernen und Wickelanordnungen veranschaulicht. Die sich daraus ergebenden quantitativen Ergebnisse sind dann nicht unmittelbar auf andere Applikationen übertragbar, sie zeigen aber die funktionalen Abhängigkeiten auf und helfen das Verständnis der zugrunde liegenden Ursachen zu verbessern und diejenigen Parameter zu identifizieren, durch deren Änderung eine Optimierung der Komponenten im Hinblick auf bestimmte Kriterien ermöglicht wird.

Auf der anderen Seite bietet die von jedem PC zur Verfügung gestellte Rechenleistung die Möglichkeit, auch komplizierte mathematische Zusammenhänge zu programmieren

und in vernachlässigbarer Zeit auszuwerten. Damit eröffnet sich die Möglichkeit, mithilfe der angegebenen Gleichungen verschiedenste Parameterstudien zu betreiben und übergeordnete Optimierungsschleifen, z. B. die Wahl der Schaltungstopologie oder die Betriebsweise der Schaltung betreffend, in die Analyse mit einzubeziehen. Erst mit diesen Ergebnissen können die Werte der Induktivitäten, der Übersetzungsverhältnisse, der Schaltfrequenz und der Stromformen geeignet festgelegt werden.

Der Inhalt

Im ersten Kapitel werden die mathematischen Gleichungen bereitgestellt, die ausgehend von den physikalischen Gesetzmäßigkeiten eine weitestgehend analytische Berechnung der grundlegenden Zusammenhänge ermöglichen. Es ist als Repetitorium konzipiert und sollte wie ein Nachschlagewerk verwendet werden, auf das beim Lesen der folgenden Kapitel bei Bedarf zurückgegriffen werden kann.

Das Buch ist so eingeteilt, dass wir uns zunächst nur mit den Wicklungen beschäftigen, anschließend nur mit den Kernen und schließlich mit den aus Kern und Wicklung bestehenden Komponenten. In den Kap. 2 bis 4 werden nur Anordnungen ohne hochpermeables Kernmaterial behandelt. Dieser Einstieg mit Luftspulen bietet den Vorteil, dass wir die verschiedenen Eigenschaften der Wicklungen ohne die später infolge der Kerne hinzukommenden Probleme wie Kernverluste, Sättigungserscheinungen oder auch die Abhängigkeit der Induktivität vom Strom, von der Temperatur oder der Frequenz untersuchen können.

Kap. 2 behandelt die Selbst- und Gegeninduktivitäten bei Draht- und Folienwicklungen, in Kap. 3 werden die Wicklungskapazitäten berechnet und Kap. 4 umfasst die Berechnungen der verschiedenen Verlustmechanismen in den Wicklungen, wobei nicht nur Runddraht und Folienwicklungen betrachtet werden, sondern auch die Verlustberechnungen in Hochfrequenzlitzten ausführlich behandelt werden.

Nachdem in Kap. 5 die Beschreibung der Kerne und die Erfassung der Materialeigenschaften, insbesondere von Ferritmaterialien, vorgestellt wurden, werden in Kap. 6 der Einfluss der Kerne auf die Induktivitäten und in Kap. 7 der Einfluss der Kerne auf die Kapazitäten untersucht. Die Verlustmechanismen werden in zwei getrennten Kapiteln behandelt, einerseits die Verluste in den Kernen in Kap. 8 und andererseits der Einfluss der Kerne auf die Wicklungsverluste infolge der geänderten Feldverteilung im Bereich der Wicklung in Kap. 9.

In Kap. 10 wird der Übergang von einer einzelnen Wicklung zu mehreren Wicklungen, d. h. zu Transformatoren vollzogen. Hier spielen die Themen Streuinduktivitäten und einfache Ersatzschaltbilder eine zentrale Rolle. Das Kap. 11 ist dem Thema Modellierung gewidmet mit den Schwerpunkten kapazitives und thermisches Ersatznetzwerk für Transformatoren. In Kap. 12 werden einige EMV-Aspekte der induktiven Komponenten behandelt. Konkret betrachten wir den Einfluss des Transformatoraufbaus auf die Funkstörspannungen, die Verwendung von Spulen als Filterbauelemente und die von den induktiven Komponenten erzeugten Magnetfelder.

Das Kap. 13 beschreibt mögliche Strategien bei der Dimensionierung induktiver Komponenten und in den Anhang in Kap. 14 sind einige Zusammenhänge ausgelagert, die für das Verständnis innerhalb der vorausgegangenen Abschnitte nicht unbedingt erforderlich sind, jedoch denjenigen Lesern als hilfreiche Unterstützungen dienen können, die sich intensiver mit der Thematik beschäftigen wollen.

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich mich bei zwei Mitarbeitern des Lehrstuhls für Elektromagnetische Felder an der Universität Erlangen-Nürnberg für die tatkräftige Unterstützung bedanken. Zum einen bei Herrn Dr.-Ing. Daniel Kübrich für den Aufbau der Schaltung und die Durchführung der Funkstörspannungsmessungen in Kap. 12, und zum anderen bei Herrn Dr.-Ing. Hans Roßmanith, der mit viel Zeitaufwand das Manuskript gelesen und in zahlreichen Diskussionen mit Vorschlägen für Verbesserungen und Ergänzungen einen großen Beitrag zum Zustandekommen des Buches in der vorliegenden Form geleistet hat.

Nicht zuletzt geht ein großer Dank an meine Frau Heidrun, die während der Laufzeit dieses Buchprojektes viel Geduld und Verständnis gezeigt hat und auf gemeinsame Freizeitaktivitäten verzichten musste.

Erlangen, September 2016

Manfred Albach

Abkürzungsverzeichnis

cm	common-mode (Gleichtaktstörungen)
dm	differential-mode (Gegentaktstörungen)
EMV	Elektromagnetische Verträglichkeit
ESB	Ersatzschaltbild
HF	Hochfrequenz
iGSE	improved Generalized Steinmetz Equation
MSE	Modified Steinmetz Equation
PFC	power factor correction
rms	root mean square (Effektivwert)
SNT	Schaltnetzteil

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlegende Zusammenhänge	1
1.1	Das Durchflutungsgesetz	1
1.2	Die Flussdichten	3
1.3	Die Feldgleichung für das magnetische Vektorpotential	4
1.4	Felder unterschiedlicher Leiteranordnungen	5
1.4.1	Der unendlich lange Linienleiter	5
1.4.2	Die räumliche Stromdichteverteilung	6
1.4.3	Die dünne Leiterschleife	7
1.5	Das Faradaysche Induktionsgesetz	8
1.6	Das Durchflutungsgesetz bei zeitabhängigen Vorgängen	9
1.7	Die Maxwellschen Gleichungen	10
1.8	Die Skingleichung	10
1.9	Die Rechnung mit komplexen Amplituden	13
1.10	Der Poyntingsche Vektor	14
	Literatur	17
2	Die Induktivität von Luftspulen	19
2.1	Die Selbstinduktivität einer Leiterschleife	19
2.2	Die Gegeninduktivitäten im System mehrerer Leiterschleifen	20
2.3	Die Induktivität von Spulen	22
2.4	Der Sonderfall dünner Leiterschleifen	23
2.4.1	Die Selbstinduktivität einer dünnen Leiterschleife	23
2.4.2	Die Gegeninduktivität dünner Leiterschleifen	25
2.4.3	Die Induktivitätsmatrix	26
2.5	Drahtgewickelte Spulen	28
2.5.1	Kreisförmige Leiterschleifen	28
2.5.2	Rechteckförmige Leiterschleifen	31
2.5.3	Auswertungen	33
2.6	Planare Spulen	37

2.7	Folienspulen	37
2.7.1	Die kreisförmige Folienspule	38
2.7.2	Die rechteckförmige Folienspule	40
2.7.3	Alternative Berechnung der Selbstinduktivität	41
2.7.4	Auswertungen	42
3	Die Kapazität von Luftspulen	45
3.1	Drahtgewickelte Spulen	46
3.1.1	Auswertungen	56
3.1.2	Parallel geschaltete Drähte	58
3.1.3	Gleichmäßige Windungsverteilung in der obersten Lage	58
3.1.4	Ein alternatives Wickelschema	59
3.1.5	Wicklungen mit Litzen	61
3.1.6	Mehrkammerwicklungen	62
3.2	Folienspulen	63
3.3	Der Einfluss eines rechteckigen Wickelkörpers	65
3.4	Möglichkeiten zur Reduzierung der Wicklungskapazität	67
	Literatur	68
4	Die Verluste in Luftspulen	71
4.1	Rms- und Skinverluste in drahtgewickelten Spulen	72
4.1.1	Zeitlich konstanter Strom	72
4.1.2	Sinusförmiger Strom	72
4.1.3	Zeitlich periodischer nichtsinusförmiger Strom	78
4.2	Proximityverluste in drahtgewickelten Spulen	79
4.2.1	Runddraht im homogenen externen Magnetfeld	81
4.2.2	Runddraht im inhomogenen externen Magnetfeld	86
4.2.3	Rückwirkung der Proximityströme auf das externe Magnetfeld	90
4.3	Auswertungen	96
4.4	Die Verwendung von HF-Litzen	101
4.4.1	Die Charakterisierung von HF-Litzen	101
4.4.2	Hochfrequenzverluste in idealen HF-Litzen	103
4.4.3	Hochfrequenzverluste in realen HF-Litzen	109
4.4.4	Die Qualitätsparameter von HF-Litzen	111
4.4.5	Auswertungen	112
4.5	Die Parallelschaltung von Drähten	115
4.6	Folienwicklungen	120
4.6.1	Die eindimensionale Verlustberechnung	121
4.6.2	Die zweidimensionale Verlustberechnung	134
4.7	Möglichkeiten zur Reduzierung der Wicklungsverluste	137
	Literatur	140

5	Kerne	143
5.1	Grundlegende Zusammenhänge	143
5.2	Die effektiven Kernparameter und der A_L -Wert	148
5.3	Ferritmaterialien	152
5.3.1	Die Permeabilität	153
5.3.2	Analytische Beschreibung der Amplitudenpermeabilität	156
5.3.3	Die Sättigung	158
5.3.4	Die Leitfähigkeit des Ferritmaterials	160
5.4	Alternative Materialien	160
5.4.1	Metallpulverkerne	161
5.4.2	Ringbandkerne	162
5.4.3	Vergleich zwischen Ferrit und alternativen Materialien	163
5.5	Die Energiespeicherung	164
	Literatur	166
6	Der Einfluss des Kerns auf die Induktivität	167
6.1	Der Ringkern mit Luftspalt	167
6.2	Allgemeine Betrachtungen zum Luftspalt	170
6.3	Die Reluktanz von großen Luftspalten	176
6.4	Die Flussverdrängung im Kernquerschnitt	179
6.5	Der Einfluss der nichtlinearen Materialeigenschaften	185
	Literatur	189
7	Der Einfluss des Kerns auf die Kapazität	191
7.1	Die Berechnung der Ersatzoberfläche	192
7.2	Die Berechnung der elektrischen Energie	192
7.2.1	Der Bereich zwischen Wicklung und Mittelschenkel	193
7.2.2	Der Bereich zwischen Wicklung und Außenschenkel	195
7.2.3	Der Bereich zwischen Wicklung und unterem bzw. oberem Schenkel	195
7.2.4	Das Potential des Kerns	197
7.3	Die zusätzliche Kapazität	198
7.4	Auswertungen	198
	Literatur	200
8	Die Kernverluste	201
8.1	Die spezifischen Kernverluste bei sinusförmiger Aussteuerung	205
8.2	Der Einfluss der Kerngröße auf die spezifischen Kernverluste	209
8.3	Das Prinzip der „äquivalenten Frequenz“	210
8.3.1	Die modifizierte Steinmetz-Gleichung „MSE“	211
8.3.2	Eine alternative Methode „iGSE“	220
8.3.3	Ein Vergleich der beiden Methoden MSE und iGSE	221

8.4	Die Berechnung der spezifischen Kernverluste mithilfe der Fourier-Entwicklung	224
8.5	Der Einfluss einer Gleichfeldvormagnetisierung	228
8.6	Die Wirbelstromverluste im Kern	229
8.6.1	Die Wirbelstromverluste bei kreisförmigem Schenkelquerschnitt	231
8.6.2	Die Wirbelstromverluste bei rechteckförmigem Schenkelquerschnitt	232
8.6.3	Die Wirbelstromverluste bei komplizierteren Kerngeometrien	233
8.6.4	Der Einfluss der Stromform auf die Wirbelstromverluste	234
8.7	Auswertungen zu den Verlustmechanismen	235
8.8	Schnittbandkerne	237
8.9	Möglichkeiten zur Reduzierung der Kernverluste	238
	Literatur	239
9	Der Einfluss des Kerns auf die Wicklungsverluste	241
9.1	Die Berechnung der Feldverteilung im Wickelfenster	242
9.1.1	Das Feld der Luftspule	243
9.1.2	Das Luftspaltfeld	243
9.1.3	Die Feldbeeinflussung durch den Kern	246
9.2	Der Einfluss von Kern und Luftspalt auf die Proximityverluste	250
9.2.1	Die Ausdehnung der Lagenbreite bis zum Kern	250
9.2.2	Luftspalt im Innen- bzw. Außenschenkel	252
9.2.3	Die Aufteilung des Gesamtluftspalts in mehrere Einzelluftspalte	252
9.2.4	Der Einfluss der Luftspaltbreite	253
9.3	Der Einfluss der Windungspositionen	253
9.4	Optimierungsmöglichkeiten bei Folienwicklungen	257
9.5	Stabkernspulen	258
9.6	Möglichkeiten zur Reduzierung der Wicklungsverluste	260
	Literatur	261
10	Transformatoren	263
10.1	Der Zweiwicklungstransformator	263
10.2	Die Koppelfaktoren	265
10.3	Vereinfachte Ersatzschaltbilder	268
10.4	Der Dreiwicklungstransformator	271
10.5	Die messtechnische Bestimmung der Netzwerkparameter	272
10.6	Die Berechnung der Streuinduktivitäten	274
10.7	Auswertungen	277
10.8	Möglichkeiten zur Minimierung der Streuinduktivitäten	284

10.9	Die Aussteuerung des Kernmaterials	286
10.9.1	Der Magnetisierungsstrom und die Kernverluste	286
10.9.2	Die Sättigungsproblematik	289
10.10	Die Wicklungsverluste im Transformator	289
10.10.1	Der klassische Transformatorbetrieb	290
10.10.2	Der Betrieb als gekoppelte Spulen	293
10.10.3	Folienwicklungen	297
10.10.4	Elektrostatische Abschirmungen	298
10.10.5	Fragen zur Konvergenz bei der Berechnung der Wicklungsverluste	299
10.11	Möglichkeiten zur Reduzierung der Wicklungsverluste	301
	Literatur	303
11	Erweiterte Ersatzschaltbilder	305
11.1	Das Spulenersatzschaltbild	307
11.1.1	Die Standardlösung	307
11.1.2	Der Impedanzverlauf im Bereich höherer Frequenzen	308
11.2	Die Berücksichtigung nichtlinearer Abhängigkeiten	310
11.2.1	Die Frequenzabhängigkeit	310
11.2.2	Die Stromabhängigkeit	311
11.2.3	Die Temperaturabhängigkeit	311
11.3	Induktives Ersatzschaltbild für einen Transformator mit mehreren Wicklungen	312
11.4	Kapazitives Transformatorersatzschaltbild	316
11.5	Das Widerstandsersatzschaltbild	326
11.5.1	Die Standardlösung	327
11.5.2	Ein erweiterter Ansatz	328
11.6	Thermisches Ersatzschaltbild	331
11.6.1	Die Notwendigkeit einer thermischen Analyse	331
11.6.2	Die Wärmeübertragung	332
11.6.3	Das verwendete Ersatzschaltbild	334
11.6.4	Die thermischen Widerstände der Standardkerne	336
11.6.5	Die thermische Iterationsschleife	338
11.6.6	Möglichkeiten zur Reduzierung der Temperatur in Kern und Wicklung	341
	Literatur	343
12	EMV-Aspekte bei induktiven Komponenten	345
12.1	Die Funkstörspannungen	345
12.1.1	Gleichtakt- und Gegentaktstörungen	346
12.1.2	Die getrennte Messung der Gleichtakt- und Gegentaktstörungen	347

12.1.3	Die Beeinflussung der dm-Störpegel durch die induktive Komponente	349
12.1.4	Die Beeinflussung der cm-Störpegel durch die induktive Komponente	350
12.2	Möglichkeiten zur Reduzierung der cm-Störpegel	351
12.2.1	Das Wicklungslayout im Transformator	352
12.2.2	Schirmungsmaßnahmen im Transformator	355
12.3	Induktive Bauteile als Filterkomponenten	357
12.3.1	Filterspulen zur Reduzierung der Gegentaktströme	358
12.3.2	Filterspulen zur Reduzierung der Gleichtaktströme	360
12.3.3	Bemerkungen zum internen Aufbau eines Filters	364
12.4	Das von induktiven Komponenten erzeugte Magnetfeld	365
12.4.1	Das von Luftspulen erzeugte Magnetfeld	365
12.4.2	Der Einfluss des Ferritkerns auf das äußere Magnetfeld	375
12.4.3	Der Einfluss von Ferritkern und Luftspalt auf das äußere Magnetfeld	381
12.4.4	Wirbelstromschirmung	383
12.4.5	Möglichkeiten zur Reduzierung des Außenfelds	383
	Literatur	385
13	Strategische Vorgehensweise bei der Auslegung	387
13.1	Der Designprozess beginnt bei der Schaltung	387
13.2	In 10 Schritten zur optimalen Komponente	390
	Literatur	398
14	Anhang	399
14.1	Verwendete Koordinatensysteme	399
14.1.1	Das kartesische Koordinatensystem	400
14.1.2	Das zylindrische Koordinatensystem	400
14.2	Verwendete Beziehungen aus der Vektoranalysis	401
14.2.1	Vektoroperatoren im kartesischen Koordinatensystem	402
14.2.2	Vektoroperatoren im zylindrischen Koordinatensystem	402
14.2.3	Der Nablaoperator	403
14.3	Die vollständigen elliptischen Integrale	403
14.4	Die modifizierten Bessel-Funktionen mit komplexem Argument	404
14.5	Die Berechnung des Skin- und Proximityfaktors	405
	Literatur	407
	Symbolverzeichnis	409
	Sachverzeichnis	415

Zusammenfassung

In diesem Kapitel werden die physikalischen Gesetzmäßigkeiten und die daraus resultierenden mathematischen Zusammenhänge im Überblick dargestellt, zumindest soweit sie für die spätere Analyse der induktiven Komponenten erforderlich sind. Die Abschn. 1.1 bis 1.4 behandeln ausschließlich zeitunabhängige Vorgänge, die Gleichungen für die zeitabhängigen Vorgänge sind in den Abschn. 1.5 bis 1.10 zusammengestellt. Zum leichteren Verständnis dieser formelmäßigen Zusammenhänge sind die verwendeten Beziehungen aus der Vektoranalysis sowie die ausführlichen Rechenvorschriften für die Operatoren grad, div, rot und Δ sowohl für das kartesische als auch für das zylindrische Koordinatensystem im Anhang 14.2 angegeben. Zusätzliche Informationen können den Literaturstellen [1] bis [7] entnommen werden.

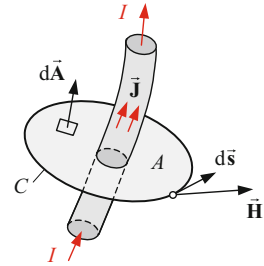
Leser, die mehr an den Ergebnissen und Auswertungen interessiert sind, können dieses Kapitel überspringen und gegebenenfalls bei Bedarf an entsprechender Stelle nachschlagen.

1.1 Das Durchflutungsgesetz

Ausgangspunkt ist die in Abb. 1.1 dargestellte Anordnung, die einen Ausschnitt einer vom Gleichstrom I durchflossenen Leiterschleife zeigt. Bekanntermaßen erzeugt die Stromschleife im gesamten Raum ein ortsabhängiges Magnetfeld. Durch Messung hat Oersted den folgenden Zusammenhang gefunden

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = I. \quad (1.1)$$

Abb. 1.1 Zum Oerstedtschen Gesetz



Dieser Erfahrungssatz besagt, dass das Wegintegral der magnetischen Feldstärke \vec{H} längs eines beliebigen geschlossenen Weges der Kontur C mit dem gerichteten Wegelement $d\vec{s}$ dem Gesamtstrom I entspricht, der die von der Kontur C umschlossene Fläche A durchsetzt. Die Richtung des Stroms zeigt dabei entsprechend Abb. 1.1 in Richtung der von dem Umlaufintegral gebildeten Rechtsschraube.

In der Aussage (1.1) ist keine Einschränkung hinsichtlich der räumlichen Verteilung des Stroms enthalten. Fließt der Strom mit einer ortsabhängigen Dichte durch einen endlichen Leiterquerschnitt, dann muss der mit dem Umlaufintegral verkettete Strom durch Integration der Stromdichte \vec{J} über die Querschnittsfläche berechnet werden

$$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}. \quad (1.2)$$

Die Aussage (1.1) enthält auch keine Einschränkung hinsichtlich der Form, mit der die Fläche über die geschlossene Kurve C gespannt wird. Betrachten wir also eine beliebige Fläche A mit dem gerichteten Flächenelement $d\vec{A}$, dann kann das Umlaufintegral (1.1) nach dem Stokesschen Satz (14.10) in ein Flächenintegral über die Wirbel der magnetischen Feldstärke umgeformt werden. Drückt man weiterhin den Strom I nach Gl. (1.2) durch das Flächenintegral über die Stromdichte aus

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} \stackrel{(14.10)}{=} \iint_A \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{A} = I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad (1.3)$$

dann stellt man wegen der beliebigen Wahl der Integrationsfläche fest, dass das magnetische Feld Wirbel an Stellen nicht verschwindender Stromdichte aufweist

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}. \quad (1.4)$$

Die bisherige Situation kann nun verallgemeinert werden. Wird die Integrationsfläche von mehreren Strömen „durchflutet“, dann nimmt die Gl. (1.1) die verallgemeinerte Form

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = \sum_k I_k \quad (1.5)$$

an. Unter der Durchflutung Θ versteht man die Summe aller Ströme I_k , die durch die Fläche A hindurchfließen, wobei sich die Ströme ihrerseits aus der Integration von Stromdichteverteilungen gemäß Gl. (1.2) ergeben können. Ströme, die die Fläche in Gegenrichtung durchfließen, sind natürlich mit negativem Vorzeichen einzusetzen.

1.2 Die Flussdichten

In Analogie zur elektrischen Flussdichte

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{As/Vm} \quad (1.6)$$

der Dimension As/m^2 , die bei den später betrachteten Kapazitätsberechnungen verwendet wird und gemäß Gl. (1.6) als Produkt der elektrischen Feldkonstante ε_0 , einer materialabhängigen Zahl ε_r und der elektrischen Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}$ dargestellt werden kann und deren Integral über eine Fläche A den diese Fläche durchsetzenden elektrischen Fluss Ψ der Dimension As ergibt

$$\Psi = \iint_A \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}, \quad (1.7)$$

entspricht die magnetische Flussdichte mit der Dimension Vs/m^2

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}} = \mu_r \mu_0 \vec{\mathbf{H}} \quad \text{mit} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Vs/Am} \quad (1.8)$$

der mit der magnetischen Feldkonstante μ_0 und einer materialabhängigen Zahl μ_r multiplizierten magnetischen Feldstärke $\vec{\mathbf{H}}$. Ihr Integral über eine Fläche A ergibt den diese Fläche durchsetzenden magnetischen Fluss Φ der Dimension Vs

$$\Phi = \iint_A \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}. \quad (1.9)$$

Die Zahlenwerte ε_r und μ_r nehmen im Vakuum und auch mit großer Genauigkeit in Luft den Wert 1 an. In Materialien sind diese Größen im allgemeinen Fall von verschiedenen Parametern abhängig. Insbesondere die Permeabilitätszahl μ_r verursacht größere Probleme bei den Feldberechnungen, da sie nicht nur vom Ort, sondern auch von der Frequenz, der Temperatur, der Materialaussteuerung und sogar von der Vorgeschichte abhängt, d. h. vom vorhergehenden zeitlichen Verlauf der magnetischen Feldgrößen. Als Beispiel lässt sich das an der Hystereseschleife in Abb. 5.7 erkennen. Die zu einem Wert der magnetischen Feldstärke gehörende Flussdichte ist abhängig davon, ob man sich dem Feldstärkewert von höheren oder niedrigeren Werten genähert hat.

Während die Quellen des elektrostatischen Feldes durch die Ladungen gegeben sind, existieren in der Magnetostatik erfahrungsgemäß keine magnetischen Einzelladungen, sie

treten immer nur in der Form von magnetischen Dipolen auf. (Die Aufteilung eines Stabmagneten in einzelne Teilstäbe führt immer auf Teilmagnete, von denen jeder einzelne wiederum einen Nord- und einen Südpol aufweist.) Es gilt daher der folgende Erfahrungssatz

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0. \quad (1.10)$$

Die magnetische Flussdichte ist quellenfrei!

Dieser Erfahrungssatz gilt allgemein, insbesondere auch für zeitlich veränderliche magnetische Felder. Aufgrund der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes muss die über eine geschlossene Fläche integrierte Flussdichte verschwinden

$$\oint_A \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \stackrel{(14.11)}{=} \iiint_V \operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} dV \stackrel{(1.10)}{=} 0. \quad (1.11)$$

1.3 Die Feldgleichung für das magnetische Vektorpotential

Wegen der Quellenfreiheit eines Wirbelfeldes nach Gl. (14.12) ist es naheliegend, die magnetische Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}$ durch die Wirbel eines neuen Vektorfeldes $\vec{\mathbf{A}}$ darzustellen, das magnetisches Vektorpotential genannt wird (Vorsicht: nicht verwechseln mit der vektoriellen Fläche $\vec{\mathbf{A}}$)

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} \stackrel{(1.10)}{=} 0 \stackrel{(14.12)}{=} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} \rightarrow \vec{\mathbf{B}} = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}}. \quad (1.12)$$

Zur Ableitung der Feldgleichung wird von der Beziehung (1.4) ausgegangen, in die nacheinander die Gln. (1.8) und (1.12) eingesetzt werden. Für konstante Werte μ gilt

$$\vec{\mathbf{J}} \stackrel{(1.4)}{=} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} \stackrel{(1.8)}{=} \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \vec{\mathbf{B}} \right) = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{B}} \stackrel{(1.12)}{=} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}}. \quad (1.13)$$

Für das magnetische Vektorpotential $\vec{\mathbf{A}}$ erhält man damit die vektorielle Feldgleichung (Poisson-Gleichung)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} = \mu \vec{\mathbf{J}}. \quad (1.14)$$

Während die Wirbel des Vektorpotentials der magnetischen Flussdichte entsprechen sind über dessen Quellen bisher noch keine Festlegungen getroffen. Da die vorliegenden Erfahrungssätze keine Aussagen zu den Quellen von $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}})$ machen, kann mit der Vereinbarung $\operatorname{div} \vec{\mathbf{A}} = 0$, d. h. das Vektorpotential wird als reines Wirbelfeld angenommen, die Beziehung (1.14) auf die Form

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} \stackrel{(14.16)}{=} \underbrace{\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\mathbf{A}}}_{=0} - \Delta \vec{\mathbf{A}} = \mu \vec{\mathbf{J}} \rightarrow \Delta \vec{\mathbf{A}} = -\mu \vec{\mathbf{J}} \quad (1.15)$$

gebracht werden. Für den Sonderfall der kartesischen Koordinaten mit den konstanten Einheitsvektoren ist der Laplace-Operator nach Gl. (14.23) separat auf jede Komponente des Vektorpotentials \vec{A} anzuwenden

$$\Delta \vec{A} \stackrel{(14.23)}{=} \vec{e}_x \Delta A_x + \vec{e}_y \Delta A_y + \vec{e}_z \Delta A_z = -\mu \underbrace{(\vec{e}_x J_x + \vec{e}_y J_y + \vec{e}_z J_z)}_{=\vec{J}}, \quad (1.16)$$

so dass die Gl. (1.15) in drei skalare, nicht miteinander gekoppelte Feldgleichungen zerfällt

$$\Delta A_i = -\mu J_i \quad \text{mit } i = x, y, z \quad \text{und} \quad \begin{matrix} A_i = A_i(x, y, z) \\ J_i = J_i(x, y, z) \end{matrix}. \quad (1.17)$$

Außerhalb der stromführenden Leiter erhalten wir als Feldgleichung wegen $\vec{J} = \vec{0}$ die Laplace-Gleichung

$$\text{rot rot } \vec{A} = \vec{0} \quad \text{bzw.} \quad \Delta \vec{A} = \vec{0}. \quad (1.18)$$

1.4 Felder unterschiedlicher Leiteranordnungen

1.4.1 Der unendlich lange Linienleiter

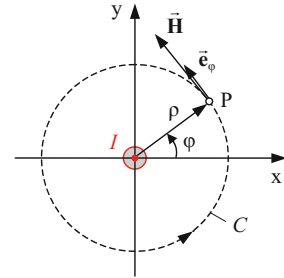
Betrachtet werden soll der im homogenen Raum der Permeabilität μ angeordnete unendlich lange dünne Linienleiter, der sich auf der z -Achse von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt und vom Strom I durchflossen wird. Das hinsichtlich der Koordinate z ebene Problem kann in den Koordinaten des Kreiszyinders (ρ, φ) betrachtet werden. Die Anordnung ist unabhängig von der Koordinate φ und die den Leiter umschließenden magnetischen Feldlinien sind Kreise in Ebenen $z = \text{const}$ ¹. Die allein φ -gerichtete magnetische Feldstärke hängt nur von der Koordinate ρ ab und kann mit dem Oersted'schen Gesetz (1.1) aus dem Umlaufintegral entlang der in Abb. 1.2 eingezeichneten Feldlinie C berechnet werden

$$I \stackrel{(1.1)}{=} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{e}_\varphi H(\rho) \cdot \vec{e}_\varphi \rho d\varphi = \int_0^{2\pi} H(\rho) \rho d\varphi = 2\pi \rho H(\rho) \quad \rightarrow \quad \vec{H} = \vec{e}_\varphi \frac{I}{2\pi \rho}. \quad (1.19)$$

Die magnetische Feldstärke klingt außerhalb des Leiters mit dem Abstand ρ vom Linienstrom ab. Nimmt man den Leiter als unendlich dünn an, dann wächst die Feldstärke nach

¹ Unter einer ebenen Anordnung (Problemstellung) soll verstanden werden, dass sie in Richtung einer kartesischen Koordinate (üblicherweise die z -Koordinate) unendlich ausgedehnt und von dieser selbst unabhängig ist. Die Berechnungen erfolgen in der zweidimensionalen Schnittebene $z = \text{const}$. Die Ergebnisse werden pro Längeneinheit der Koordinate z angegeben. Bemerkung: Bei der vorliegenden Anordnung ändert sich das elektrische Skalarpotential linear mit der Koordinate z , es wird aber nicht in die Betrachtungen mit einbezogen.

Abb. 1.2 Unendlich langer
Linienleiter



Gl. (1.19) für $\rho \rightarrow 0$ über alle Grenzen. Dieses Problem wird vermieden, wenn die endliche Leiterabmessung berücksichtigt wird. Bei der Anwendung des Oersted'schen Gesetzes auf eine kreisförmige Feldlinie innerhalb des Leiterquerschnitts ist zu beachten, dass nur ein Teil des Stroms von dem Integrationsweg eingeschlossen wird. Bezeichnet r_D den Leiterradius, dann liefert die Gl. (1.3) das Ergebnis

$$\int_0^{2\pi} H(\rho) \rho \, d\varphi \stackrel{(1.19)}{=} 2\pi \rho H(\rho) \stackrel{(1.3)}{=} \frac{\pi \rho^2}{\pi r_D^2} I \quad \rightarrow \quad \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{e}}_\varphi \frac{I}{2\pi r_D} \frac{\rho}{r_D}. \quad (1.20)$$

Innerhalb des Leiters steigt die magnetische Feldstärke beginnend beim Wert 0 im Ursprung linear bis zum Maximalwert $I/2\pi r_D$ an der Leiteroberfläche an. Der Verlauf der Feldstärke in Abhängigkeit der Koordinate ρ ist in Abb. 4.1 dargestellt.

Das Vektorpotential weist entsprechend der Gl. (1.16) nur eine Komponente in Richtung des Stroms auf und ist ebenfalls von der Koordinate z unabhängig

$$B_\varphi(\rho) \stackrel{(1.8)}{=} \mu H_\varphi(\rho) \stackrel{(1.12)}{=} \vec{\mathbf{e}}_\varphi \cdot \text{rot } \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{e}}_\varphi \cdot \text{rot} [\vec{\mathbf{e}}_z A_z(\rho)] \stackrel{(14.26)}{=} -\frac{dA_z}{d\rho}. \quad (1.21)$$

Mit der unbekanntenen Integrationskonstanten C liefert die für das Vektorpotential gefundene Differentialgleichung im Bereich außerhalb des Leiters die Beziehung

$$\frac{dA_z}{d\rho} = -\mu H_\varphi(\rho) \stackrel{(1.19)}{=} -\frac{\mu I}{2\pi \rho} \quad \rightarrow \quad A_z = -\frac{\mu I}{2\pi} \int \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\mu I}{2\pi} \ln \rho + C, \quad (1.22)$$

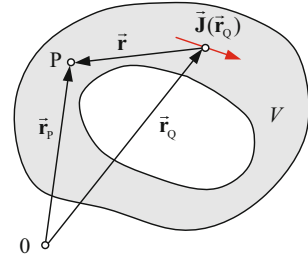
in der die Konstante C willkürlich gewählt werden kann. Mit der Festlegung eines an der Stelle $\rho = c$ verschwindenden Vektorpotentials, d. h. $A_z(c) = 0$, gilt schließlich

$$\vec{\mathbf{A}}(\rho) = \vec{\mathbf{e}}_z A_z(\rho) = -\vec{\mathbf{e}}_z \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\rho}{c} \quad \text{für } \rho \geq a. \quad (1.23)$$

1.4.2 Die räumliche Stromdichteverteilung

Betrachtet sei die in Abb. 1.3 dargestellte Anordnung mit der im Volumen V vorgegebenen von der Quellpunktskoordinate $\vec{\mathbf{r}}_Q$ abhängigen räumlichen Stromdichteverteilung $\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}_Q)$.

Abb. 1.3 Räumliche Stromdichteverteilung



Es lässt sich nun zeigen, dass man das von der Stromdichteverteilung im homogenen Gesamttraum der Permeabilität μ hervorgerufene quellenfreie Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}_P)$ an der Stelle der Aufpunktskoordinate \vec{r}_P durch folgenden von dem zugrunde gelegten Koordinatensystem unabhängigen Ausdruck

$$\vec{A}(\vec{r}_P) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{1}{r} \vec{J}(\vec{r}_Q) dV_Q \quad \text{mit} \quad \vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q \quad \text{und} \quad r = |\vec{r}_P - \vec{r}_Q| \quad (1.24)$$

berechnen kann. Das Ergebnis dieser Integration erfüllt für einen innerhalb der Stromdichteverteilung liegenden Aufpunkt automatisch die Poisson-Gleichung und für einen Aufpunkt außerhalb der Stromdichteverteilung die Laplace-Gleichung. Mithilfe der Gleichungen (1.8) und (1.12) lässt sich aus der Beziehung (1.24) das von Biot und Savart angegebene koordinatenunabhängige Gesetz zur Berechnung der magnetischen Feldstärke im linearen homogenen Medium ableiten

$$\vec{H}(\vec{r}_P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \vec{J}(\vec{r}_Q) \times \frac{\vec{r}}{r^3} dV_Q \quad \text{mit} \quad \vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q \quad \text{und} \quad r = |\vec{r}_P - \vec{r}_Q|. \quad (1.25)$$

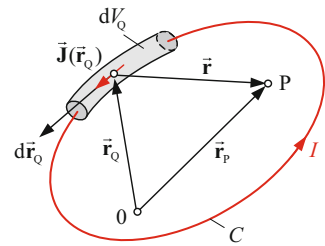
1.4.3 Die dünne Leiterschleife

In vielen technischen Anwendungen ist der Querschnitt des stromführenden Leiters sehr klein gegenüber allen anderen Abmessungen. Für diesen Fall eines „dünnen“ Leiters vereinfachen sich die bisherigen Gleichungen, da bei der Berechnung der Feldgrößen nicht mehr über das Leitervolumen dV_Q , sondern nur noch entlang der Leiterkontur integriert werden muss.

Für die in Abb. 1.4 dargestellte dünne Leiterschleife der Kontur C mit dem gerichteten Wegelement $d\vec{r}_Q$ kann in den bisherigen Integralen der Ausdruck $\vec{J}(\vec{r}_Q)dV_Q$ durch $I d\vec{r}_Q$ ersetzt werden, so dass man die entsprechenden Beziehungen für das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}_P) \stackrel{(1.24)}{=} \frac{\mu I}{4\pi} \oint_C \frac{1}{r} d\vec{r}_Q \quad \text{mit} \quad \vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q \quad \text{und} \quad r = |\vec{r}_P - \vec{r}_Q| \quad (1.26)$$

Abb. 1.4 Strom in einer dünnen Leiterschleife



und für die magnetische Feldstärke

$$\vec{H}(\vec{r}_P) \stackrel{(1.25)}{=} \frac{I}{4\pi} \oint_C \left(d\vec{r}_Q \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \quad \text{mit} \quad \vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q \quad \text{und} \quad r = |\vec{r}_P - \vec{r}_Q| \quad (1.27)$$

erhält. Auch diese Gleichungen gelten zunächst nur für die Berechnung der Feldgrößen im homogenen Gesamttraum der Permeabilität μ . Der Einfluss von Bereichen mit anderen Materialeigenschaften wird dabei nicht erfasst.

1.5 Das Faradaysche Induktionsgesetz

Wir betrachten jetzt den von Faraday durch Messung gefundenen Zusammenhang bei zeitlich veränderlichen Vorgängen

$$iR = -\frac{d\Phi}{dt} \stackrel{(1.9)}{=} -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (1.28)$$

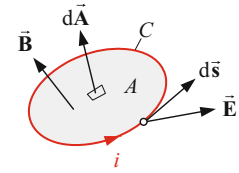
Dieser Erfahrungssatz besagt, dass in einem dünnen Leiter der Kontur C ein Strom $i(t)$ zum Fließen kommt, wenn sich der die Leiterschleife C durchsetzende magnetische Fluss Φ zeitlich ändert, und zwar entspricht die entlang der Leiterkontur C des Widerstands R gemessene Umlaufspannung der negativen zeitlichen Änderung des die Leiterschleife durchsetzenden Flusses. Da wir uns ausschließlich auf ruhende Systeme beschränken, kann die Gl. (1.28) in der vereinfachten Form (Integralform des Faradayschen Induktionsgesetzes)

$$iR = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \quad (1.29)$$

geschrieben werden, in der sich die zeitliche Ableitung nur noch auf die magnetische Flussdichte bezieht.

Die Richtung des Stroms entlang der Kontur C mit dem gerichteten vektoriellen Wegelement $d\vec{s}$ und die Orientierung der von der Leiterschleife aufgespannten Fläche A mit dem vektoriellen Flächenelement $d\vec{A}$ sind entsprechend der Abb. 1.5 im Sinne

Abb. 1.5 Zum Induktionsgesetz von Faraday



einer Rechtsschraube einander zugeordnet. Eine zeitliche Abnahme des magnetischen Flusses ruft einen Strom in der Leiterschleife hervor, der so gerichtet ist, dass das von ihm erzeugte Magnetfeld der Flussänderung durch die Schleife entgegen wirkt. Dieser Zusammenhang ist bekannt als Lenzsche Regel:

► Der in einer Leiterschleife als Folge der induzierten Spannung fließende Strom wirkt der ihn verursachenden Flussänderung entgegen.

Bemerkung: Nicht der Fluss, sondern dessen zeitliche Änderung soll verhindert werden.

Durch Anwendung des Stokesschen Satzes kann das Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke in Gl. (1.29) in ein Flächenintegral über die beliebig über die Kontur C gespannte Fläche A umgewandelt werden. Da die Kontur C und damit die Fläche A beliebig gewählt werden können, gelangt man durch einen Vergleich der beiden Integranden

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} \stackrel{(14.10)}{=} \iint_A \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A} \stackrel{(1.29)}{=} \iint_A -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \quad (1.30)$$

zur Differentialform des Faradayschen Induktionsgesetzes

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.31)$$

1.6 Das Durchflutungsgesetz bei zeitabhängigen Vorgängen

Die Beziehungen (1.3) und (1.4) gelten nur für zeitunabhängige Vorgänge. Für den allgemeinen zeitabhängigen Fall muss die „Konvektionsstromdichte“ \vec{J} um die „Verschiebungsstromdichte“, also die zeitliche Änderung der elektrischen Flussdichte \vec{D} erweitert werden. Damit erhalten wir als Integralform bzw. Differentialform des Durchflutungsgesetzes die Zusammenhänge

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1.32)$$

1.7 Die Maxwell'schen Gleichungen

Die in den beiden letzten Abschnitten angegebenen Gesetzmäßigkeiten stellen Zusammenhänge zwischen den Feldgrößen und den Wirbeln der elektrischen bzw. magnetischen Feldstärke her. Mit den Beziehungen für die Quellen der elektrischen und magnetischen Flussdichte bilden sie die vier Maxwell'schen Gleichungen, deren Differentialform im Folgenden angegeben ist

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{\mathbf{D}} = \rho, \quad \operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0. \quad (1.33)$$

Zusammen mit den Materialgleichungen

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}}, \quad \vec{\mathbf{J}} = \kappa \vec{\mathbf{E}} \quad \text{und} \quad \vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}} \quad (1.34)$$

stellen sie die Grundlage dar für die Berechnung zeitabhängiger elektrodynamischer Probleme. Im Hinblick auf die Berechnung der Hochfrequenzverluste in den Wicklungen der induktiven Komponenten können einige Vereinfachungen vorgenommen werden. Bei diesen Problemen kann der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom vernachlässigt werden, d. h. beim Durchflutungsgesetz entfällt der zweite Term auf der rechten Seite der Gleichung. Da weiterhin keine freien Ladungen berücksichtigt werden müssen, sind alle Feldgrößen quellenfrei und es gelten die vereinfachten Beziehungen

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}}, \quad \operatorname{div} \vec{\mathbf{D}} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0. \quad (1.35)$$

1.8 Die Skingleichung

Eine Reduzierung des Rechenaufwands bei der Lösung der gekoppelten Gleichungen (1.35) lässt sich durch die Einführung von Potentialen erreichen, die wegen der jetzt vorliegenden zeitlichen Abhängigkeit als elektrodynamische Potentiale bezeichnet werden. Zweckmäßigerweise werden diese Potentiale so eingeführt, dass die aus ihnen durch Ableitung berechneten Feldstärken bereits die Maxwell'schen Gleichungen erfüllen. Ausgangspunkt ist die Quellenfreiheit der magnetischen Flussdichte, so dass diese als die Rotation eines elektrodynamischen Vektorpotentials $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ dargestellt werden kann

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} \stackrel{(1.35)}{=} 0 \stackrel{(14.12)}{=} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} \rightarrow \vec{\mathbf{B}} = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}}. \quad (1.36)$$

Nach Einsetzen dieser Gleichung in das Induktionsgesetz erhält man eine Beziehung

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} \stackrel{(1.35)}{=} -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \stackrel{(1.36)}{=} -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} = \operatorname{rot} \left(-\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \right) \rightarrow \operatorname{rot} \left(\vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \right) = \vec{\mathbf{0}}, \quad (1.37)$$

die das Verschwinden der Rotation des Vektorfeldes $\vec{\mathbf{E}} + \partial\vec{\mathbf{A}}/\partial t$ verlangt. Da nach Gl. (14.13) die Wirbel eines Gradientenfeldes verschwinden, muss das betrachtete Vektorfeld durch den Gradienten einer skalaren Ortsfunktion $\varphi = \varphi(\vec{\mathbf{r}}, t)$ darstellbar sein. Diese wird als elektrodynamisches Skalarpotential bezeichnet

$$\vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \stackrel{(1.37)}{=} -\text{grad } \varphi \quad \rightarrow \quad \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \text{grad } \varphi. \quad (1.38)$$

Die beiden aus den vier Gln. (1.35) noch nicht berücksichtigten Beziehungen, nämlich das Durchflutungsgesetz und die Quellenfreiheit der elektrischen Flussdichte werden nun verwendet, um die benötigten Differentialgleichungen abzuleiten, aus denen die beiden Potentiale bestimmt werden müssen. Bei der folgenden Herleitung werden die Materialeigenschaften als ortsunabhängig angesehen. Bildet man die Wirbel der Flussdichte, d. h. die zweifache Rotation des Vektorpotentials, dann folgt aufgrund der nachstehenden Umformung die erste gesuchte Beziehung

$$\text{rot rot } \vec{\mathbf{A}} \stackrel{(1.36)}{=} \text{rot } \vec{\mathbf{B}} = \mu \text{ rot } \vec{\mathbf{H}} \stackrel{(1.35)}{=} \mu \vec{\mathbf{J}} \stackrel{(1.34)}{=} \kappa\mu \vec{\mathbf{E}} \stackrel{(1.38)}{=} \kappa\mu \left(-\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \right), \quad (1.39)$$

in der die beiden Potentiale miteinander verknüpft sind

$$\text{rot rot } \vec{\mathbf{A}} + \kappa\mu \frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t} = -\kappa\mu \text{ grad } \varphi. \quad (1.40)$$

Eine weitere Beziehung erhält man ausgehend von der Quellenfreiheit der elektrischen Flussdichte

$$0 = \text{div } \vec{\mathbf{D}} = \varepsilon \text{ div } \vec{\mathbf{E}} \stackrel{(1.38)}{=} \varepsilon \text{ div } \left(-\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \right) = -\varepsilon \text{ div } \frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \varepsilon \text{ div grad } \varphi, \quad (1.41)$$

die mit dem Laplace-Operator Δ nach Gl. (14.14) auf die resultierende Beziehung

$$\text{div } \frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t} = -\Delta\varphi \quad (1.42)$$

führt. Die ursprünglich vier gekoppelten partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (1.35) sind damit auf die beiden gekoppelten partiellen Differentialgleichungen (1.40) und (1.42) zweiter Ordnung und die beiden Gleichungen (1.36) und (1.38) zur Bestimmung von $\vec{\mathbf{B}}$ und $\vec{\mathbf{E}}$ zurückgeführt.

Während die Wirbel des Vektorpotentials eindeutig die magnetische Flussdichte liefern, sind über die Quellen des Vektorpotentials noch keine Aussagen getroffen. Die freie Wahl von $\text{div } \vec{\mathbf{A}}$, oft als Eichung bezeichnet, lässt nun unterschiedliche Möglichkeiten zu, die elektrodynamischen Potentiale so zu wählen, dass die Lösungen der von ihnen zu erfüllenden Feldgleichungen, ihre Kopplung untereinander sowie die aus ihnen abgeleiteten

Feldstärken auf möglichst einfache Weise berechnet werden können. Zunächst soll jedoch allgemein gezeigt werden, dass beliebig viele elektrodynamische Potentiale existieren, die alle über die Beziehungen (1.36) und (1.38) auf die gleichen Feldgrößen $\vec{\mathbf{B}}$ und $\vec{\mathbf{E}}$ führen. Dazu betrachten wir die mit einem Strich gekennzeichneten neuen Potentiale, die mit den bisherigen Potentialen $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ und $\varphi(\vec{\mathbf{r}}, t)$ aus den Gln. (1.36) und (1.38) über die Beziehungen

$$\vec{\mathbf{A}}' = \vec{\mathbf{A}} + \text{grad } \psi \quad \text{und} \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.43)$$

verknüpft sind. Über die skalare Ortsfunktion $\psi = \psi(\vec{\mathbf{r}}, t)$ wird zunächst keine weitere Aussage gemacht. Wegen der Wirbelfreiheit eines Gradientenfeldes gilt die Gl. (1.36) auch für das neue Vektorpotential $\vec{\mathbf{A}}'(\vec{\mathbf{r}}, t)$

$$\text{rot } \vec{\mathbf{A}}' = \text{rot } \vec{\mathbf{A}} + \text{rot grad } \psi \stackrel{(1.13)}{=} \text{rot } \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}. \quad (1.44)$$

Setzt man die beiden Gln. (1.43) in die Beziehung für die elektrische Feldstärke (1.38) ein, dann stellt man das Verschwinden der Anteile mit $\psi(\vec{\mathbf{r}}, t)$ fest, so dass die Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}$ auch mit den neuen Potentialen aus der gleichen Beziehung berechnet werden kann

$$-\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}'}{\partial t} - \text{grad } \varphi' = -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \text{grad } \frac{\partial \psi}{\partial t} - \text{grad } \varphi + \text{grad } \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \text{grad } \varphi = \vec{\mathbf{E}}. \quad (1.45)$$

Bei der nun vorgeschlagenen Konvention wird der in Gl. (1.43) eingeführte skalare Term ψ dem über die Zeit integrierten ursprünglichen Skalarpotential gleichgesetzt. Für das neue Vektorpotential wird dann mit der Beziehung (1.43) der Ansatz

$$\vec{\mathbf{A}}' = \vec{\mathbf{A}} + \int \text{grad } \varphi \, dt \quad \text{und} \quad \varphi' = \varphi - \varphi = 0 \quad (1.46)$$

gemacht. Es sei angemerkt, dass aufgrund der Festlegung (1.46) für das Skalarpotential ψ das neue elektrodynamische Skalarpotential φ' in Gl. (1.43) verschwindet, d. h. die Feldbeschreibung erfolgt allein mit dem Vektorpotential (1.46). Die elektrische Feldstärke wird direkt aus der negativen zeitlichen Ableitung des Vektorpotentials berechnet

$$\vec{\mathbf{E}} \stackrel{(1.38)}{=} -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \stackrel{(1.46)}{=} -\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\mathbf{A}}' - \text{grad } \int \varphi \, dt \right) - \text{grad } \varphi = -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}'}{\partial t}. \quad (1.47)$$

Setzt man nun diese mit einem Strich gekennzeichneten Potentiale (1.46) in die Gl. (1.42) ein

$$\begin{aligned} -\Delta \varphi \stackrel{(1.42)}{=} \text{div } \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \stackrel{(1.46)}{=} \text{div } \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\mathbf{A}}' - \int \text{grad } \varphi \, dt \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{\mathbf{A}}' - \underbrace{\text{div grad } \varphi}_{=\Delta \varphi} \\ \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{\mathbf{A}}' = 0 \quad \rightarrow \quad \text{div } \vec{\mathbf{A}}' = 0, \end{aligned} \quad (1.48)$$

dann stellt man für den Fall der zeitabhängigen Größen die Quellenfreiheit des neuen zeitabhängigen Vektorpotentials fest. Beim Einsetzen dieses Vektorpotentials in die Gl. (1.40) verschwinden mit Gl. (14.13) alle Glieder mit dem Skalarpotential φ

$$\operatorname{rot} \left(\vec{\mathbf{A}}' - \int \operatorname{grad} \varphi \, dt \right) + \kappa \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\mathbf{A}}' - \int \operatorname{grad} \varphi \, dt \right) = -\kappa \mu \operatorname{grad} \varphi \quad (1.49)$$

und man erhält resultierend die Skingleichung

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}}' + \kappa \mu \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}'}{\partial t} = \vec{\mathbf{0}} \quad \xrightarrow{(14.16)} \quad \Delta \vec{\mathbf{A}}' = \kappa \mu \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}'}{\partial t} \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \vec{\mathbf{A}}' = 0 \quad (1.50)$$

für das quellenfreie Vektorpotential sowie die beiden Bestimmungsgleichungen (1.44) und (1.47)

$$\vec{\mathbf{B}} = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}}' \quad \text{und} \quad \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}'}{\partial t}. \quad (1.51)$$

Diese Gleichungen werden bei der Berechnung der Skin- und Proximityverluste in den Wicklungen zugrunde gelegt. Bei den kreisförmigen Windungen fließt der Strom nur in Richtung der Zylinderkoordinate φ , für die elektrische Feldstärke und das Vektorpotential wird dann auch nur eine φ -Komponente angenommen. Da aber zwischen den Windungen ebenfalls Spannungen bestehen, besitzen die beiden Feldvektoren auch Komponenten in ρ - bzw. z -Richtung. Berechnet man die Feldverteilung über den gesamten Querschnitt des Wickelpakets mit Feldberechnungsprogrammen, dann sind diese zusätzlichen Komponenten zu berücksichtigen. Bei der analytischen Lösung in Kap. 4 werden diese Verschiebungsströme infolge der zwischen den Windungen bestehenden Kapazitäten vernachlässigt. Da immer nur ein Einzeldraht, d. h. ein homogener Bereich betrachtet wird, kann auf diese zusätzlichen Komponenten verzichtet werden.

1.9 Die Rechnung mit komplexen Amplituden

Bei zeitlich periodischen Signalformen wird vielfach mit den sogenannten komplexen Amplituden gerechnet. Eine mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ zeitveränderliche Größe

$$u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (1.52)$$

lässt sich nämlich als der Realteil einer komplexen Größe darstellen

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{Re} \{ \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) + j \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) \} = \operatorname{Re} \{ \hat{u} e^{j(\omega t + \varphi_u)} \} \\ &= \operatorname{Re} \{ \hat{u} e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} \} = \operatorname{Re} \{ \underline{\hat{u}} e^{j\omega t} \}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Auf einen in späteren Kapiteln häufig verwendeten Sonderfall soll an dieser Stelle hingewiesen werden. Wird die zeitabhängige Funktion ohne den Phasenwinkel vorgegeben, d. h. es gilt $\varphi_u = 0$, dann entspricht die komplexe Amplitude $\underline{\hat{u}}$ wegen $e^{j\varphi_u} = 1$ der Amplitude der Zeitfunktion \hat{u} .

Da das Vorzeichen des Imaginärteils keine Rolle spielt, kann die zeitabhängige Größe auch mithilfe der durch einen hochgestellten Stern gekennzeichneten konjugiert komplexen Amplitude auf folgende Weise dargestellt werden

$$u(t) = \operatorname{Re} \{ \hat{u} e^{j\omega t} \} = \operatorname{Re} \{ \hat{u}^* e^{-j\omega t} \} = \frac{1}{2} [\hat{u} e^{j\omega t} + \hat{u}^* e^{-j\omega t}]. \quad (1.54)$$

Für das Produkt zweier Größen erhält man entsprechend der nachstehenden Ableitung ein Ergebnis

$$\begin{aligned} u_1(t)u_2(t) &= \frac{1}{2} [\hat{u}_1 e^{j\omega t} + \hat{u}_1^* e^{-j\omega t}] \frac{1}{2} [\hat{u}_2 e^{j\omega t} + \hat{u}_2^* e^{-j\omega t}] \\ &= \frac{1}{4} [\hat{u}_1 \hat{u}_2^* + \hat{u}_1^* \hat{u}_2] + \frac{1}{4} [\hat{u}_1 \hat{u}_2 e^{j2\omega t} + \hat{u}_1^* \hat{u}_2^* e^{-j2\omega t}] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \hat{u}_1 \hat{u}_2^* \} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \hat{u}_1 \hat{u}_2 e^{j2\omega t} \}, \end{aligned} \quad (1.55)$$

in dem der erste Ausdruck einem zeitunabhängigen konstanten Mittelwert entspricht, der von einem mit doppelter Kreisfrequenz schwingenden Pendelanteil überlagert ist.

Die komplexe Amplitude \hat{u} enthält die Informationen über die Amplitude der Zeitfunktion und die Phasenverschiebung φ_u gegenüber einem Bezugswert. Der Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ ist für alle zeitabhängigen Größen identisch und bleibt bei der Rechnung zunächst unberücksichtigt. Nachdem alle Größen allein mit den komplexen Amplituden berechnet wurden, erfolgt der Übergang zu den zeitabhängigen Verläufen, indem entsprechend Gl. (1.53) von den mit dem Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ multiplizierten komplexen Amplituden der Realteil gebildet wird.

Die zeitliche Ableitung einer komplexen Größe entspricht gemäß

$$\frac{d}{dt} (\hat{u} e^{j\omega t}) = j\omega \hat{u} e^{j\omega t} \quad (1.56)$$

einer Multiplikation mit dem Faktor $j\omega$. Verzichten wir zur Vereinfachung der Schreibweise in den folgenden Kapiteln auf den hochgestellten Strich beim quellenfreien Vektorpotential nach Abschn. 1.8, dann können die Gleichungen (1.50) und (1.51) mit den komplexen Amplituden in der folgenden Form zur Behandlung der Skineffektprobleme innerhalb homogener Bereiche verwendet werden

$$\Delta \hat{\underline{\mathbf{A}}} = j\omega \kappa \mu \hat{\underline{\mathbf{A}}}, \quad \operatorname{div} \hat{\underline{\mathbf{A}}} = 0, \quad \hat{\underline{\mathbf{B}}} = \operatorname{rot} \hat{\underline{\mathbf{A}}} \quad \text{und} \quad \hat{\underline{\mathbf{E}}} = -j\omega \hat{\underline{\mathbf{A}}}. \quad (1.57)$$

1.10 Der Poyntingsche Vektor

In diesem Abschnitt soll eine Betrachtung zur Leistung bzw. zur Energie im elektromagnetischen Feld angestellt werden. Üblicherweise geht man von den Maxwell'schen Gleichungen (1.33) aus, wobei man die Differenz aus der mit $\vec{\mathbf{E}}$ multiplizierten zweiten