

# DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE UNIDADES DIDÁCTICAS DE MATEMÁTICAS EN MAD 1

**PEDRO GÓMEZ**

Editor académico y compilador



**DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN  
Y EVALUACIÓN DE UNIDADES DIDÁCTICAS  
DE MATEMÁTICAS EN MAD 1**

Colección en Educación Matemática  
“una empresa docente”, CIFE





**DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN  
Y EVALUACIÓN DE UNIDADES DIDÁCTICAS  
DE MATEMÁTICAS EN MAD 1**

PEDRO GÓMEZ

*Editor académico y compilador*

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
Centro de Investigación y Formación en Educación (CIFE)  
“una empresa docente”

Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1 / Pedro Gómez, editor académico y compilador -- Bogotá: Universidad de los Andes, Centro de Investigación y Formación en Educación, CIFE, Ediciones Uniandes, 2014.

444 p.; 16,5 x 22,5 cm. – (Colección en educación matemática “de una empresa docente”, CIFE)

Otros autores: Oscar José Becerra, Maritza Ruth Buitrago, Sonia Constanza Calderón, Rodrigo Armando Gómez, María C. Cañadas, Ángela Patricia Cifuentes, Luz Estela Dimaté, Aura María Rincón, Javier Ricardo Velásquez, Miryan Patricia Villegas, Pablo Flores, Argeni Serrano, Enny Moreno, Sugey Santoyo, Yolanda Hernández, Yobana Gutiérrez, José Luis Lupiáñez, Mónica Liliana Bernal, Diana Paola Castro, Álvaro Andrés Pinzón, Yerly Fernando Torres, Isabel María Romero, María Fernanda Mora, Eliana Ximena Nieto, Diana Lucía Polanía, Marta Lilia Romero, María José González, Mauricio Becerra, Fredy Arenas, Fredy Morales, Leonardo Urrutia.

ISBN 978-958-695-971-1

1. Educación matemática 2. Planificación curricular 3. Educación secundaria 4. Formación profesional de profesores I. Gómez, Pedro II. Universidad de los Andes (Colombia). Centro de Investigación y Formación en Educación.

CDD 510.7

SBUA

Primera edición: abril de 2014

Colección en Educación Matemática de “una empresa docente”, CIFE

**Director: Pedro Gómez**

© Pedro Gómez

© Universidad de los Andes, Centro de Investigación y Formación en Educación (CIFE)

**Ediciones Uniandes**

Carrera 1.ª núm. 19-27, edificio Aulas 6, piso 2  
Bogotá, D. C., Colombia  
Teléfono: 3394949, ext. 2133  
<http://ediciones.uniandes.edu.co>  
[infeduni@uniandes.edu.co](mailto:infeduni@uniandes.edu.co)

ISBN: 978-958-695-971-1

ISBN e-book: 978-958-695-972-8

Coordinadora de publicaciones del CIFE:

Nidia Vargas

Corrección de estilo:

Gustavo Patiño

Cubierta, diseño y diagramación:

Angélica Ramos

Impresión:

Editorial Kimpres Ltda.

Calle 19 sur núm. 69C-17, Bogotá, D.C.

PBX: 413 6884

Bogotá, D. C., Colombia

Impreso en Colombia – *Printed in Colombia*

Todos los derechos reservados. Esta publicación no puede ser reproducida ni en su todo ni en sus partes, ni registrada en o transmitida por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electro-óptico, por fotocopia o cualquier otro, sin el permiso previo por escrito de la editorial.

# ÍNDICE

## **CAPÍTULO 1**

Análisis didáctico en la práctica de la formación permanente de profesores de matemáticas de secundaria Pedro Gómez	1
--	---

## **CAPÍTULO 2**

Adición y sustracción de números enteros Oscar José Becerra, Maritza Ruth Buitrago, Sonia Constanza Calderón, Rodrigo Armando Gómez, María C. Cañadas, Pedro Gómez	25
--	----

## **CAPÍTULO 3**

Ecuaciones lineales con una incógnita Ángela Patricia Cifuentes, Luz Estela Dimaté, Aura María Rincón, Javier Ricardo Velásquez, Miryan Patricia Villegas, Pablo Flores	85
---	----

## **CAPÍTULO 4**

Ecuaciones lineales con una incógnita Argeni Serrano, Enny Moreno, Sugey Santoyo, Yolanda Hernández, Yobana Gutiérrez, José Luis Lupiáñez	153
---	-----

## **CAPÍTULO 5**

Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales $2 \times 2$ Mónica Liliana Bernal, Diana Paola Castro, Álvaro Andrés Pinzón, Yerly Fernando Torres, Isabel María Romero	213
---	-----

## **CAPÍTULO 6**

Razones trigonométricas vistas a través de múltiples lentes María Fernanda Mora, Eliana Ximena Nieto, Diana Lucía Polanía, Marta Lilia Romero, María José González	275
--	-----

## **CAPÍTULO 7**

Razones trigonométricas Mauricio Becerra, Fredy Arenas, Fredy Morales, Leonardo Urrutia, Pedro Gómez	359
--	-----



## CAPÍTULO 1

# ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA PRÁCTICA DE LA FORMACIÓN PERMANENTE DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

PEDRO GÓMEZ

Este volumen presenta los informes finales de los seis grupos de la primera promoción de MAD, la concentración en Educación Matemática de la maestría en Educación, del Centro de Investigación y Formación en Educación (CIFE), Universidad de los Andes. MAD 1 se realizó entre enero de 2010 y diciembre de 2011, en ocho módulos consecutivos, dos módulos por semestre. Cada módulo —compuesto por cuatro actividades— estuvo a cargo de un formador español. Participaron 26 profesores de matemáticas en ejercicio de colegios de Bogotá y el resto de Cundinamarca. Los tutores y formadores del programa fueron profesores de las universidades españolas de Almería, Cantabria y Granada. El programa tuvo una coordinadora local, profesora de la Universidad de los Andes.

En este capítulo, presento la fundamentación y el diseño de MAD e introduzco los trabajos de los grupos que componen este volumen. En los primeros dos apartados, expongo un resumen del análisis didáctico y muestro su papel en la fundamentación del programa. Después, presento esquemáticamente el diseño del programa y describo su implementación. Finalmente, introduzco los trabajos de los seis grupos. El lector puede encontrar descripciones más detalladas del modelo del análisis didáctico y de su papel en la fundamentación de programas de formación en diversas publicaciones (Gómez, 2006, 2007; Gómez, 2012a; Gómez, 2012b; Gómez 2012; Gómez, Cañadas, Flores, González, Lupiáñez, Marín *et al.*, 2010; Gómez y González, en prensa-a, en prensa-b; Gómez y Restrepo, 2010; Lupiáñez, 2009; Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008).

## 1. Análisis didáctico: un procedimiento para organizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

MAD se fundamenta en el análisis didáctico, como procedimiento para el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas. Según este procedimiento, en el contexto concreto de la planificación de una hora de clase o de una unidad didáctica, el profesor puede organizar la enseñanza basándose en cuatro análisis (Gómez, 2002b):

- el análisis de contenido, como procedimiento en virtud del cual el profesor identifica y organiza la multiplicidad de significados de un concepto;
- el análisis cognitivo, en el que el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre el concepto cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje;
- el análisis de instrucción, en el que el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la instrucción; y
- el análisis de actuación, en el que el profesor diseña los instrumentos para determinar y establecer las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que manifiestan por la implementación de la unidad didáctica.

El análisis didáctico es un procedimiento cíclico, que incluye estos cuatro análisis; atiende los condicionantes del contexto, e identifica las actividades que idealmente un profesor debería realizar para organizar la enseñanza de un contenido matemático concreto. La descripción de un ciclo del análisis didáctico sigue la secuencia propuesta en la figura 1.

El ciclo del análisis didáctico se inicia con la determinación del contenido que se va a tratar y de los objetivos de aprendizaje que se quieren lograr, a partir de la percepción que el profesor tiene de la comprensión de los escolares, por los resultados del análisis de actuación del ciclo anterior y teniendo en cuenta los contextos social, educativo e institucional en los que se enmarca la instrucción (cuadro 1 de la figura 1). A partir de esta información, el profesor inicia la planificación con el análisis de contenido.

La información que surge del análisis de contenido sustenta el análisis cognitivo, al identificar y organizar los múltiples significados del concepto objeto de la instrucción. A su vez, la realización del análisis cognitivo puede dar lugar a la revisión del análisis de contenido. Esta relación entre los análisis también se

establece con el análisis de instrucción. Su formulación depende y debe ser compatible con los resultados de los análisis de contenido y cognitivo, pero, a su vez, su realización puede generar la necesidad de corregir las versiones previas de estos análisis (cuadro 2 de la figura 1).

En el análisis cognitivo, el profesor selecciona unos significados de referencia y, con base en ellos y en los objetivos de aprendizaje que se ha impuesto, identifica las capacidades que pretende desarrollar en los escolares. También, formula conjeturas sobre los posibles caminos por los que se puede desarrollar su aprendizaje cuando ellos aborden las tareas que conforman la instrucción. El profesor utiliza esta información para diseñar, evaluar y seleccionar estas tareas; por consiguiente, la selección de tareas que componen las actividades debe ser coherente con los resultados de los tres análisis, y la evaluación de esas tareas a la luz de los análisis puede llevar al profesor a realizar un nuevo ciclo de análisis, antes de seleccionar definitivamente las tareas que componen las actividades de enseñanza y aprendizaje (relación entre cuadros 2 y 3 de la figura 1). El profesor pone en práctica estas actividades (cuadro 4 de la figura 1) y, al hacerlo, analiza las actuaciones de los escolares para obtener información que sirve como punto de inicio de un nuevo ciclo (cuadro 5 de la figura 1). El conocimiento didáctico (cuadro 6 de la figura 1) es el conocimiento que el profesor pone en juego durante este proceso.

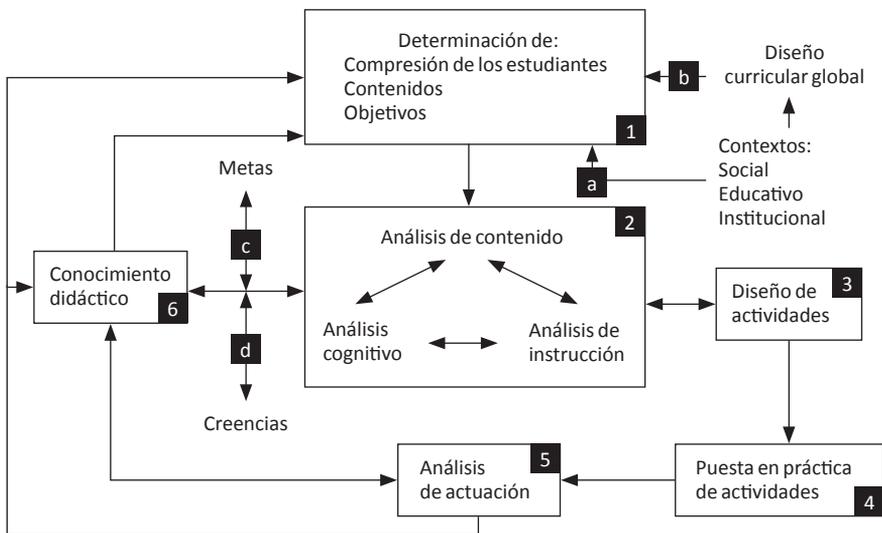


Figura 1. Ciclo de análisis didáctico y sus condicionantes (Gómez, 2007, p. 31)

## 2. Análisis didáctico y formación de profesores

Con el análisis didáctico se pretende proporcionar a los profesores en formación un procedimiento sistemático para el análisis de un tema concreto de las matemáticas escolares, de tal forma que la información que surja de ese análisis les sea útil para diseñar una unidad didáctica, fundamentar y justificar ese diseño, y llevarlo a la práctica (Gómez, 2007). Al describir el procedimiento que, de manera ideal, un profesor realizaría a la hora de diseñar, implementar y evaluar una unidad didáctica, el análisis didáctico precisa, de manera sistemática y secuenciada, las actuaciones de ese profesor ideal. Con base en una visión funcional de la formación de profesores de matemáticas (Gómez y González, 2008), es posible, entonces, identificar los conocimientos y capacidades que son necesarios para realizar esas actuaciones. Estos conocimientos y capacidades caracterizan sus competencias de planificación, implementación y evaluación de unidades didácticas (Gómez, 2006). Este es el conocimiento didáctico que se espera desarrollar en los planes de formación.

Cada uno de los análisis se articula alrededor de unos organizadores del currículo. Por ejemplo, el análisis de contenido incluye los organizadores del currículo Sistemas de representación, Estructura conceptual y Fenomenología, que corresponden a las tres dimensiones del significado de un concepto en el contexto de las matemáticas escolares. Un organizador del currículo (a) es una noción que forma parte del conocimiento disciplinar de la Educación Matemática y (b) permite analizar un tema de las matemáticas escolares con el propósito de producir información sobre el tema que sea útil en el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas (Rico, 1997, pp. 45-46). Desde nuestra perspectiva funcional de la formación de profesores, la actividad del profesor en formación se centra en el uso de los organizadores del currículo como herramientas conceptuales y metodológicas, de las que surgen conjuntos de técnicas que permiten realizar dos tipos de tareas: (a) analizar el tema matemático y (b) usar la información que resulta de ese análisis, ya sea en otros análisis o en la planificación y la implementación de una clase o unidad didáctica.

Me baso en los trabajos de González y Gómez para establecer los conocimientos que caracterizan el aprendizaje de los organizadores del currículo por parte de los profesores en formación (Gómez y González, 2009; Gómez, González, Rico y Lupiáñez, 2008; González y Gómez, 2008, en revisión). Nosotros esperamos que, al desarrollar su conocimiento didáctico y en relación con un tema de las matemáticas escolares, los profesores en formación

1. sean capaces de analizar el tema con cada organizador del currículo, con el fin de producir información sobre el tema que sea útil para otros análisis o para el diseño, implementación y evaluación de la unidad didáctica;
2. sean capaces de usar la información producida por otros organizadores del currículo en nuevos análisis o en el diseño de la unidad didáctica; y
3. sean capaces de organizar y relacionar la información recogida para proponer un diseño fundamentado y justificado, y para diseñar y ejecutar los protocolos de implementación y evaluación de la unidad didáctica.

Por consiguiente, cuando los profesores en formación analizan un tema de las matemáticas escolares con un organizador del currículo, se espera que ellos (a) conozcan el organizador del currículo de tal forma que, por ejemplo, sean capaces de distinguir instancias de esa noción respecto a un tema de las matemáticas escolares; (b) desarrollen las técnicas necesarias para usar el organizador del currículo como herramienta de análisis de un tema de las matemáticas escolares y producir información relevante sobre el tema; y (c) desarrollen las técnicas necesarias para usar la información sobre el tema, con el fin de tomar decisiones a la hora de analizar el tema con otro organizador del currículo o para el diseño de la unidad didáctica. Estas expectativas de aprendizaje establecen los tres tipos de conocimiento que un profesor en formación puede desarrollar en relación con un organizador del currículo, que González y Gómez denominan significado, uso técnico y uso práctico, y que se caracterizan de la siguiente manera.

*Significado.* Se refiere al conocimiento disciplinar relacionado con el organizador del currículo que los formadores de ese programa han seleccionado como opción dentro de aquellas disponibles en la literatura.

*Uso técnico.* Se refiere al conjunto de técnicas que los formadores consideran útiles para producir información sobre el tema.

*Uso práctico.* Se refiere al conjunto de técnicas que los formadores consideran que son necesarias para usar la información que surge del uso técnico en los análisis con otros organizadores del currículo o en el diseño de la unidad didáctica.

La figura 2 resume estas ideas. El significado del organizador del currículo que se espera desarrollen los profesores en formación es una opción que los formadores han seleccionado de la literatura en Educación Matemática. Las ideas clave que configuran ese significado dan lugar a técnicas para el análisis del tema —uso técnico—. La información que surge de ese análisis se aplica con propósitos didácticos con base en otras técnicas —uso práctico—.

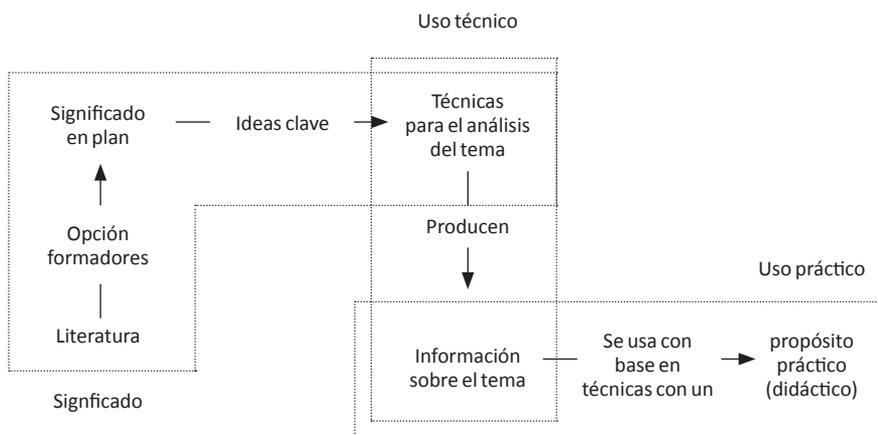


Figura 2. Significado, uso técnico y uso práctico

### 3. Enseñar análisis didáctico. Diseño y desarrollo de MAD

Nos hemos basado en las ideas anteriores para fundamentar el diseño y desarrollo curricular de MAD (Gómez *et al.*, 2010). Describo el diseño del programa atendiendo a las dimensiones del currículo: expectativas de aprendizaje, contenidos, metodología y evaluación.

#### 1. Expectativas de aprendizaje

MAD busca contribuir al desarrollo de las competencias del profesor para planificar, llevar a la práctica y evaluar su actuación en el aula, para un tema concreto de las matemáticas escolares. Se busca que el profesor desarrolle su conocimiento didáctico, como aquel que le permite realizar el análisis didáctico de un tema y que puede activar en su práctica diaria. Esta característica del conocimiento didáctico, como expectativa de aprendizaje, orienta el contenido, la metodología y la evaluación de los programas.

El programa pretende contribuir al desarrollo del conocimiento didáctico de los profesores en formación, al proporcionarles oportunidades para que, al realizar un ciclo de análisis didáctico, puedan

- avanzar en la constatación y la comprensión de la complejidad inherente a las matemáticas escolares,

- identificar y organizar los múltiples significados del tema,
- hacer una previsión de las actuaciones de los escolares al abordar tareas,
- diseñar una unidad didáctica,
- diseñar los instrumentos de observación que permitan evaluar el aprendizaje y la enseñanza,
- implementar el diseño curricular propuesto en su centro,
- evaluar la relevancia y eficacia de la planificación realizada y
- producir un informe sobre la experiencia.

## 2. Contenido

MAD 1 se configuró alrededor de ocho módulos, repartidos en los cuatro semestres del programa. Cada módulo duró dos meses y estuvo compuesto de cuatro actividades. En la tabla 1 presento el contenido de los módulos y los formadores encargados. El programa se concibió en cuatro partes: (a) contexto y noción de currículo —módulo 1—, (b) análisis didáctico —módulos 2 al 5—, (c) implementación y evaluación de la unidad didáctica —módulos 6 y 7—, y (d) informe final —módulo 8—.

Tabla 1  
*Contenido del programa*

Módulo	Contenido
<b>Semestre 1</b>	
1. Currículo Marta Molina	Introducción al programa Introducción al análisis didáctico Noción de currículo en matemáticas Currículo de las matemáticas de secundaria en Colombia y España Realidad curricular del profesor de matemáticas en Colombia
2. Análisis de contenido María C. Cañadas	Noción de contenido en las matemáticas escolares Estructura conceptual Sistemas de representación Fenomenología
<b>Semestre 2</b>	
3. Análisis cognitivo María José González	Expectativas de aprendizaje (competencias, estándares, objetivos, capacidades) Limitaciones de aprendizaje (errores y dificultades) Hipótesis de aprendizaje (caminos de aprendizaje)

Módulo	Contenido
4. Análisis de instrucción Pablo Flores	Noción de tarea en matemáticas: diseño, análisis y selección Agrupamiento, organización e interacción Materiales y recursos, resolución de problemas Secuenciación de tareas: diseño, análisis y selección
<b>Semestre 3</b>	
5. Análisis de actuación Isabel Romero	Evaluación para el aprendizaje Diseño de instrumentos para la observación del aprendizaje y la enseñanza Secuencia de evaluación Diseño de una unidad didáctica Puesta en práctica de la planificación
6. Análisis de datos Antonio Marín	Diseño de la evaluación de la experiencia en el aula Instrumentos y procedimientos para la recolección y codificación de la información Instrumentos y procedimientos para el análisis de datos sobre el aprendizaje y la enseñanza
<b>Semestre 4</b>	
7. Evaluación de la planificación José Luis Lupiáñez	Resultados del análisis de la puesta en práctica Revisión de la planificación Balance estratégico de los resultados
8. Producción del informe Pedro Gómez	Producción del informe Presentación del trabajo final Perspectivas Conclusiones

El inicio de un ciclo del análisis didáctico supone que el profesor conoce el contexto en el que trabaja. Por lo tanto, MAD inicia con una contextualización curricular teórica y práctica. Esta contextualización se basa en la introducción de la noción de currículo y la puesta en juego de esa noción para describir y analizar la realidad curricular del contexto en el que trabajan los profesores en formación.

Una vez se ha realizado la contextualización, los contenidos de la segunda parte de MAD, de manera secuencial, siguen la lógica de los cuatro análisis del análisis didáctico: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. Esta lógica se basa en la idea de que, en este orden, la realización de uno de los análisis requiere la información que surge de los análisis previos (Gómez, 2002a). En cada uno, el contenido se organiza de acuerdo con los organizadores del currículo que lo configuran.

Los formadores encargados del diseño del programa escogen una opción para el significado de cada organizador del currículo. Ese será el significado de la noción que se espera que los profesores desarrollen en el plan de formación. Los formadores se basan en las ideas clave que caracterizan ese significado para diseñar y seleccionar las técnicas que propondrán dentro del plan de formación para el uso técnico y el uso práctico de cada organizador del currículo.

### 3. Metodología

Las reflexiones que he presentado sobre el aprendizaje de los profesores en formación dan lugar a unas pautas para la organización del aprendizaje en MAD (Gómez y Restrepo, 2010). Estas pautas tienen como propósito promover el desarrollo de las expectativas de aprendizaje. Nuestra experiencia con este tipo de programas, las investigaciones que hemos realizado hasta el momento, el carácter teórico, técnico y práctico del conocimiento didáctico, y la forma simultánea e interdependiente en la que se desarrollan, destacan la conveniencia de organizar a los profesores en formación en grupos de trabajo y promover un entorno que favorezca la participación y la construcción social del aprendizaje.

Dada la relación que existe entre los organizadores del currículo y entre los análisis del análisis didáctico, resulta también oportuno que cada grupo trabaje a lo largo de todo el programa de formación sobre un mismo tema de las matemáticas escolares. Consideramos que los profesores en formación aprenden al

1. poner en práctica los organizadores del currículo para analizar un tema matemático concreto;
2. trabajar a lo largo de todo el programa sobre un mismo tema de las matemáticas escolares;
3. trabajar en grupo y tener que llegar a acuerdos, con motivo de la obligación de presentar los resultados de su trabajo a sus compañeros;
4. tener que contribuir individualmente al trabajo del grupo;
5. reaccionar sistemática y periódicamente a los comentarios de los tutores y los formadores a los borradores y las versiones finales de sus trabajos;
6. observar el trabajo de otros grupos sobre temas matemáticos diferentes, pero usando el mismo organizador del currículo;
7. tener que comentar y criticar el trabajo de otros grupos; y
8. tener que presentar un trabajo final que recoja la experiencia global e identifique sus fortalezas y debilidades, con el propósito de mejorarla.

Nuestra experiencia y algunas de las investigaciones que hemos realizado (Gómez, 2007) muestran que estas pautas metodológicas promueven el interés y el compromiso de los profesores en formación y los grupos por el trabajo que deben realizar, y contribuyen al desarrollo de su conocimiento didáctico. Dentro de estas pautas hay algunas cuestiones que vale la pena resaltar para lograr dichos objetivos. En primer lugar, el análisis de un tema que un grupo de profesores en formación realice con un organizador del currículo difícilmente se puede considerar terminado. Los organizadores del currículo son herramientas de análisis que permiten profundizar tanto como se desee en cada tema. Al realizar las tareas profesionales que se les solicitan, los grupos tienen la sensación de que, con más tiempo disponible, habrían podido mejorar su trabajo. Esta situación da lugar a que compañeros, formadores y tutores puedan contribuir a las producciones de los grupos.

En segundo lugar, al tener que presentar su trabajo ante sus compañeros, en una circunstancia que promueve la interacción y el aprendizaje interdependiente (Gómez y Rico, 2007), se genera una situación de competencia positiva, en la que los grupos pueden darse cuenta, por ellos mismos, de la calidad —comparativa— del trabajo que han realizado. Ellos pueden reconocer las fortalezas y debilidades de su trabajo y del de los demás grupos, para incorporar nuevas ideas en el suyo. En tercer lugar, la interacción con los compañeros y los tutores alrededor de los borradores de cada trabajo resulta trascendental. En particular, hemos constatado que el aprendizaje de los grupos depende fuertemente de la interacción que tienen con sus tutores (Arias y Gómez, 2012; Gómez, 2007; Gómez y Cañadas, 2011, 2012).

La metodología de MAD sigue las directrices anteriores. Los profesores en formación se organizan en grupos de cuatro o cinco personas. Cada grupo trabaja en un tema matemático concreto, y tiene asignado un tutor que lo acompaña a lo largo de todo el programa. Su función es comentar el trabajo del grupo y guiarlo en cada una de las actividades. Los grupos reciben también el apoyo permanente del coordinador local, quien está a cargo de la gestión del programa.

Los temas se seleccionan en función de las asignaturas que los profesores en formación esperan dictar en el segundo año, con el fin de llevar a la práctica su propuesta de diseño curricular. Cada grupo realiza un ciclo de análisis didáctico sobre su tema a lo largo de los dos años del programa. Al final de los primeros cinco módulos, los grupos producen un diseño de la unidad didáctica. Los tres últimos módulos se centran en la implementación de la unidad

didáctica, la recolección y análisis de la información con motivo de esta implementación y la producción del informe de la experiencia global.

En la primera semana de cada módulo, con motivo de la visita del formador español encargado de este, los estudiantes tienen clases presenciales todos los días. En estas sesiones, el formador presenta las ideas clave y establece las actividades que los grupos deberán realizar en el resto del módulo. Durante las siguientes ocho semanas, los estudiantes se reúnen en la Universidad de los Andes, viernes en la tarde y sábado en la mañana.

Cada módulo se configura alrededor de cuatro actividades en las que los grupos interactúan con formadores y tutores en la realización de su trabajo. El trabajo de los estudiantes y los grupos en las dos semanas de una actividad se organiza como se muestra en la tabla 2. Al final de la sesión del sábado de la semana anterior, los grupos organizan su trabajo para la actividad. Del lunes al jueves de la primera semana, los miembros de cada grupo trabajan individualmente e interactúan virtualmente. A cada estudiante se le ha asignado un grupo, que trabaja sobre un tema matemático diferente al suyo, al cual debe reaccionar sistemática y periódicamente al observar su trabajo final. Al comienzo de la sesión del viernes de la primera semana, cada estudiante introduce, en un foro virtual, sus comentarios y críticas a la presentación de la actividad anterior del grupo que le fue asignado. Durante el resto de esta sesión y la mayor parte de la sesión del sábado, los grupos preparan su borrador de la actividad, que envían a su tutor y al formador encargado del módulo.

Tabla 2  
*Dos semanas de una actividad*

Semana anterior	Semana 1			Semana 2		
Sábado	Lunes a jueves	Viernes	Sábado	Lunes a jueves	Viernes	Sábado
		Envío comentario individual en foro actividad i-1	Trabajo en grupo	Trabajo individual	Trabajo en grupo	Envío actividad i a tutor y formador
	Trabajo individual					Presentación y discusión
Organización trabajo actividad i		Trabajo en grupo	Envío borrador a tutor			Organización trabajo actividad i+1

Al comienzo de la semana siguiente, cada grupo recibe los comentarios de su tutor al borrador enviado. Los estudiantes trabajan individualmente de lunes a jueves a partir de estos comentarios y el viernes se reúnen para preparar su presentación. El sábado, cada grupo hace una presentación de 10 minutos a todos sus compañeros y al coordinador local. Los formadores españoles pueden asistir virtualmente a estas presentaciones o ver posteriormente el video.

#### 4. Evaluación

En este apartado destaco la evaluación formativa en MAD. Como resalté en el apartado anterior, los profesores en formación y los grupos aprenden al abordar tareas profesionales que involucran a los organizadores del currículo, y al interactuar con compañeros, formadores y tutores en la realización de esas tareas. La interacción con formadores y tutores configura, entonces, una parte importante de los procesos de evaluación. Esta interacción tiene lugar usualmente en cinco ámbitos del diseño metodológico del programa.

1. En clase, cuando el formador introduce el organizador del currículo, y los estudiantes y los grupos realizan ejercicios relacionados con su tema u otro tema.
2. Durante el tiempo en el que los grupos trabajan produciendo borradores o versiones finales del análisis de su tema con un organizador del currículo.
3. En las reacciones formales de formadores y tutores a los borradores y versiones finales del trabajo de los grupos.
4. En la discusión que tiene lugar cuando los grupos presentan su trabajo a los demás grupos.
5. En la producción y revisión del documento final.

En todos estos ámbitos tiene lugar el mismo proceso: los grupos tienen una tarea que deben realizar y para la que deben presentar un resultado; los grupos producen propuestas de solución a la tarea; y los formadores y tutores estudian estas propuestas y reaccionan a ellas. La actuación de formadores y tutores es naturalmente variada en forma y contenido. Estos pueden constatar cuestiones que consideran relevantes del trabajo de los grupos; sugerir cambios o estrategias para mejorar el trabajo; complementar o aclarar información; o valorar el trabajo de los grupos (Arias, 2011). No obstante, esta actuación se concreta en un propósito central: aprovechar la tarea profesional para contribuir al aprendizaje de los estudiantes y los grupos a través de promover el desarrollo del significado, el uso técnico y el uso práctico de los organizadores del currículo.

La evaluación sumativa del aprendizaje de los organizadores del currículo tiene como referentes el significado y las herramientas para el uso técnico y el uso práctico que los formadores seleccionan y proponen durante la instrucción. Esto es lo que se espera que aprendan los profesores en formación sobre el organizador del currículo. Estos pueden también crear técnicas propias que los formadores deben valorar desde la perspectiva de su validez, de su eficacia y eficiencia para producir información sobre el tema analizado y de su relevancia para la planificación y la implementación. El uso práctico desempeña un papel central en la evaluación del diseño y la implementación de la unidad didáctica. Se espera que los grupos justifiquen el diseño y el desarrollo de la unidad didáctica en términos de su adaptación al contexto en el que será implementada y con base en la información que surge del análisis didáctico del tema y de la puesta en práctica de la unidad didáctica.

El tutor produce un documento con comentarios al borrador de su grupo en cada una de las actividades. El grupo se basa en estos comentarios para mejorar su presentación. Adicionalmente, el tutor produce, para cada actividad, un comentario de evaluación del borrador y la presentación de su grupo. Cada grupo recibe, al final de la actividad, estos comentarios, junto con los comentarios del coordinador local, y los comentarios y la nota asignada por el formador encargado del módulo. Este documento y la interacción entre el tutor y el grupo constituyen la base de la evaluación formativa dentro del programa.

La evaluación sumativa de los grupos en cada actividad tiene en cuenta los siguientes aspectos:

- borrador de la actividad,
- documento final sobre la actividad, y
- presentación de la actividad al grupo de clase y los formadores.

La evaluación individual tiene en cuenta la evaluación del grupo para las cuatro actividades del módulo, junto con los comentarios individuales del estudiante al trabajo del grupo que tiene asignado para cada una de las actividades.

#### 4. Implementación de MAD 1

La primera promoción de MAD se implementó de acuerdo con el diseño descrito en el apartado anterior. Participaron 26 profesores de matemáticas en ejercicio de colegios de Bogotá y el resto de Cundinamarca. Dos terceras partes de los profesores en formación eran mujeres. La mayoría de ellos (77%) estaban trabajando en colegios públicos, y más de la mitad (58%) estaban vinculados

con colegios del departamento de Cundinamarca. La mayoría de los estudiantes eran licenciados en Matemáticas y Física o en Matemáticas. Una quinta parte de ellos eran licenciados en educación básica con énfasis en Matemáticas. Los estudiantes obtuvieron su título en una diversidad de universidades, aunque la mitad de ellos eran egresados de la Universidad Distrital o de la Universidad de Cundinamarca. Casi dos terceras partes eran menores de 30 años y todos eran menores de 40 años. Todos ellos se graduaron hacia al menos 10 años. La mayoría de ellos tenían al menos cinco años de experiencia docente.

Los profesores en formación se organizaron en cuatro grupos de cuatro personas y dos grupos de cinco personas. Cada grupo escogió un tema de las matemáticas escolares sobre el que realizó un ciclo de análisis didáctico a lo largo de los dos años del programa. Los temas escogidos fueron los siguientes: adición y sustracción de números enteros, ecuaciones lineales con una incógnita (dos grupos), método gráfico para resolver ecuaciones lineales  $2 \times 2$  y razones trigonométricas (dos grupos).

El programa se inició el 10 de enero de 2010, con el primer módulo, a cargo de la profesora Marta Molina, de la Universidad de Granada. Los profesores en formación abordaron la noción de currículo y la utilizaron para describir su realidad curricular y compararla con la española.

El segundo módulo de MAD se inició el lunes 15 de marzo de 2010, a cargo de la profesora María C. Cañadas, de la Universidad de Granada. Los profesores en formación lograron los objetivos inicialmente propuestos para este módulo: identificar y organizar los significados de su tema desde la perspectiva de los tres organizadores del currículo del análisis de contenido, y constatar la complejidad inherente al contenido de cualquier tema de las matemáticas escolares. No obstante, se apreciaron diferencias en las aproximaciones de los diferentes grupos. Algunas de estas dificultades estuvieron asociadas con la terminología empleada en los tres organizadores que conforman el análisis de contenido, en las relaciones que se establecen entre los elementos de un mismo organizador del currículo y en las relaciones entre diferentes organizadores del currículo.

El módulo 3, sobre análisis cognitivo, a cargo de la profesora María José González, de la Universidad de Cantabria, se realizó entre el 2 de agosto y el 9 de octubre de 2010. Este módulo se centró en la dimensión cognitiva del currículo. Se trataba de hacer una descripción de las expectativas del profesor sobre lo que se espera que el alumno aprenda sobre el contenido matemático en cuestión y sobre el modo en que el alumno va a desarrollar ese aprendizaje.

Algunas de las dificultades identificadas estuvieron asociadas con el grado de detalle para definir las capacidades y con el papel de las tareas en los diferentes análisis. Los grupos se hicieron conscientes del carácter cíclico del trabajo y produjeron sistemáticamente mejoras en cada actividad.

El módulo 4, sobre análisis de instrucción, a cargo del profesor Pablo Flores, de la Universidad de Granada, se realizó entre el 11 de octubre y el 11 de diciembre de 2010. Este módulo se centró en la dimensión formativa del currículo. Se trataba de hacer una descripción de los medios que puede poner en práctica el profesor para lograr sus expectativas de aprendizaje. Hay que resaltar la creatividad y el esfuerzo que manifestaron los grupos en sus trabajos sobre materiales y recursos. Por ejemplo, uno de los grupos diseñó materiales propios de carácter muy innovador para su tema.

El módulo 5, sobre análisis de actuación, a cargo de la profesora Isabel Romero, se realizó entre el 17 de enero y el 17 de marzo de 2011. Este módulo se centró en la dimensión social del currículo. Su propósito era establecer los instrumentos en virtud de los cuales los profesores en formación iban a recoger información durante la implementación de la unidad didáctica. Adicionalmente, en este módulo los grupos finalizaron ese diseño curricular. A diferencia de los módulos anteriores, en este módulo la formadora no proporcionó técnicas ni formatos concretos para realizar las actividades. Con base en ejemplos —rúbricas de tareas especiales, diseño de examen, ejemplos de entradas de diarios de alumnos—, ella invitó a los grupos a crear sus propias técnicas y formatos, basándose en particular en su experiencia como docentes.

El módulo 6, sobre análisis de datos, a cargo del profesor Antonio Marín, de la Universidad de Granada, se realizó entre el 21 de marzo y el 28 de mayo de 2011. Este módulo se centró en la organización de los datos recogidos durante la implementación de la unidad didáctica. Su propósito era establecer instrumentos y procedimientos para el registro y organización de la información que cada grupo produjo para activar, durante la implementación, los instrumentos de recolección de información propuestos en el módulo 5.

El módulo 7, a cargo del profesor José Luis Lupiáñez, de la Universidad de Granada, se realizó del 1 de agosto al 8 de octubre de 2011. Este módulo centró su atención en el análisis estratégico de los resultados obtenidos con motivo del diseño, la puesta en práctica y la evaluación de la unidad didáctica, con el objetivo de proponer y justificar una serie de recomendaciones de planificación y actuación futuras. Su desarrollo se concentró en cuatro actividades: (a) el balance de la planificación realizada y de su justificación; (b) la descripción de la

implementación de la unidad didáctica; (c) la exploración de uno de los temas de profundización de análisis de resultados delimitados en el módulo 6; y (d) el balance estratégico de todo el proceso.

El módulo 8, a mi cargo, se realizó entre el 10 de octubre y el 10 de diciembre de 2011. En este módulo, los grupos redactaron el informe final de la unidad didáctica. Para ello, los grupos y estudiantes conocieron y pusieron en práctica las normas de redacción de documentos, las herramientas informáticas para producir informes técnicos y los métodos para producir la estructura de informes técnicos; produjeron los borradores del informe e hicieron las revisiones correspondientes; y elaboraron la versión final del informe de la unidad didáctica, junto con los materiales complementarios que estimaron necesarios.

Durante los dos años y las 32 actividades del programa, Ángela María Restrepo, coordinadora local de la maestría, acompañó a los grupos en su trabajo semanal en la Universidad de los Andes, evaluó sus presentaciones y gestionó todas las cuestiones académicas y no académicas que surgieron en su implementación. MAD finalizó con una sesión pública el 10 de diciembre de 2011. En esta sesión, los grupos presentaron el informe final.

Estamos realizando y tenemos previsto realizar diversos proyectos de investigación que buscan evaluar el impacto de MAD. Por ejemplo, en una tesis de maestría de la Universidad de Granada se caracterizó la actuación de los tutores al comentar los borradores de sus grupos (Arias, 2011). Estamos realizando tres proyectos que exploran y caracterizan el aprendizaje de los grupos respecto a organizadores del currículo específicos —fenomenología (Gómez y Cañadas, 2011), errores y dificultades, y caminos de aprendizaje (Suavita, 2012)—. Hemos venido analizando el impacto del programa en los procesos curriculares de los colegios a los que pertenecen los estudiantes de MAD (Gómez y Restrepo, 2012). Finalmente, esperamos realizar un proyecto que evaluará el impacto del programa en términos del rendimiento de los escolares en las pruebas del Estado. Estos proyectos buscan evaluar el programa desde la perspectiva de las opiniones y el aprendizaje de los participantes, el impacto en la institución y los efectos en el aprendizaje de los escolares.

Aunque aún no tenemos resultados definitivos de estos proyectos de investigación, sí tenemos resultados preliminares de algunas de nuestras indagaciones. Desde la perspectiva del trabajo realizado y el aprendizaje logrado, podemos constatar que los grupos y estudiantes de MAD satisficieron plenamente las expectativas de los formadores encargados de los ocho módulos.

## 5. Análisis didáctico en la práctica: los trabajos de los grupos

Los seis grupos de profesores en formación realizaron 32 actividades a lo largo de los dos años del programa. La última actividad consistió en la entrega de la versión final del informe sobre el diseño, implementación y evaluación de la unidad didáctica. Estos son los documentos que componen los capítulos de este volumen. Son ejemplos del análisis didáctico en la práctica. Presentan, de manera detallada y por primera vez, un ciclo completo del procedimiento, incluyendo la implementación y la evaluación del diseño curricular.

Los documentos comparten una estructura similar compuesta de tres partes. En la primera parte, se fundamenta, describe y justifica el diseño de la unidad didáctica; para ello, los grupos atienden a las características curriculares, socioeconómicas y académicas del contexto institucional en el que prevén que van a implementar la unidad didáctica; realizan el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación de su tema; con base en la información que surge de esos análisis, proponen el diseño de su unidad didáctica; y justifican ese diseño al mostrar, de manera sistemática, que este se adapta a los contextos previamente establecidos y que la secuencia de tareas propuesta puede contribuir eficientemente al logro de las expectativas de aprendizaje previstas.

En la segunda parte, los grupos describen la implementación de la unidad didáctica, indicando aquellas modificaciones que, sobre la marcha, realizaron al diseño original. En la tercera parte, los grupos evalúan el diseño e implementación de la unidad didáctica y, con base en esa evaluación, proponen un nuevo diseño. En la figura 3 describo este proceso.

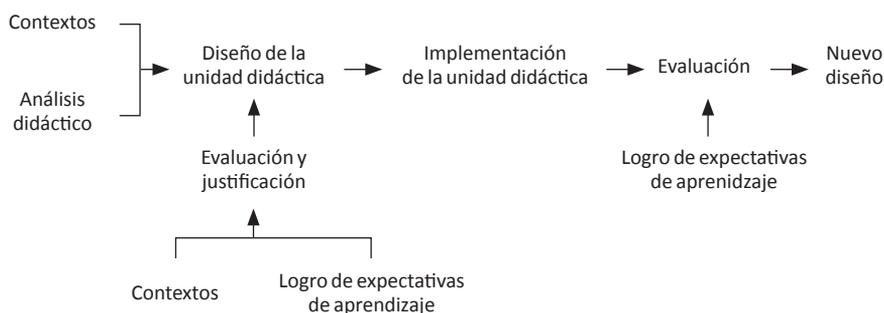


Figura 3. Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas

Aunque la evaluación del diseño y la implementación de la unidad didáctica implican diversos criterios y procedimientos, en la figura 4 he destacado el énfasis que se aprecia en los trabajos en relación con las expectativas de aprendizaje. Este énfasis sigue la propuesta de John, en la que “el núcleo [de la planificación] está fijado por los propósitos y objetivos del plan” (2006, p. 491). Los grupos utilizaron los caminos de aprendizaje para establecer en qué medida el diseño de la unidad didáctica atendía a los objetivos de aprendizaje que habían establecido. Para ello, se basaron en la información que recogieron en el análisis de contenido e identificaron las capacidades que caracterizaban los objetivos, junto con los errores en los que los escolares podían incurrir y las dificultades que daban lugar a esos errores.

En el análisis de instrucción, analizaron las tareas con base en estos elementos; así, pudieron identificar sus cualidades y deficiencias, con el fin de mejorarlas. Y en el análisis de actuación, se basaron en estas ideas para diseñar los instrumentos con los que iban a recoger y analizar la información que surgiera de la implementación. La evaluación de la implementación se fundamentó en la comparación entre aquello que los grupos previeron en su diseño (los caminos de aprendizaje previstos) y aquello que constataron a partir de la información que recogieron y analizaron en la práctica.

Algunas de las tareas que se encuentran en las propuestas de los grupos son innovadoras. Otras lo son menos, en el sentido de que son adaptaciones de tareas que se encuentran en los libros de texto o en internet; no obstante, los trabajos de los seis grupos son innovadores en otro sentido más importante. Sus propuestas no son sencillamente el fruto de la intuición o de la experiencia no justificada. Estos documentos son el fruto de un trabajo sistemático, en el que los grupos analizaron en profundidad su tema, se basaron en esa información para fundamentar, diseñar y justificar su unidad didáctica, y recogieron y analizaron la información que surgió de la implementación, para evaluarla y mejorarla. El carácter innovador de estas propuestas se encuentra en mostrar cómo, en la práctica, el análisis didáctico puede fundamentar un conocimiento teórico, técnico y práctico que le permite al profesor en ejercicio abordar su práctica docente de manera eficaz y eficiente.

## **6. Teoría de la Educación Matemática y práctica del profesor**

Este no es un libro sobre teoría de la Educación Matemática. Su contenido tampoco pretende que el lector adquiera una visión de la Educación Matemática

como disciplina o que profundice en todos los aspectos de algunos temas de las matemáticas escolares. El libro recoge el trabajo que seis grupos de profesores en ejercicio realizaron con motivo de su participación en un programa de formación. Este fue un trabajo de diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas en temas concernientes a las matemáticas escolares. Los grupos realizaron un proceso sistemático de indagación fundamentado en la teoría, a partir del modelo del análisis didáctico. Este modelo aborda de manera analítica el proceso de enseñanza de las matemáticas en la escuela y se fundamenta en nociones clave de la Educación Matemática —los organizadores del currículo—. Dichas nociones (por ejemplo, sistemas de representación, expectativas de aprendizaje o tarea) son, en el contexto de las matemáticas escolares, aspectos que pertenecen a la literatura de la Educación Matemática.

En este libro no se presentan, describen o analizan estas nociones. No obstante, los trabajos de los grupos sí muestran cómo, a partir de un programa de formación que las organiza alrededor de un modelo concreto, los profesores en formación las ponen en juego en su práctica docente y las utilizan para indagar sistemáticamente sobre esa práctica.

## 7. Agradecimientos

La primera promoción de MAD fue posible gracias al apoyo de diversas personas e instituciones. La Gobernación de Cundinamarca apoyó con casi el 40% de la matrícula de 15 profesores del departamento. La Fundación SM contribuyó con un tercio de la matrícula de estos 15 profesores. La Fundación Compartir proporcionó una beca para un profesor de los colegios a su cargo. La Fundación Carolina, el ICETEX, Colciencias, la Universidad de Granada y la Universidad de Cantabria aportaron fondos para los viajes de algunos de los formadores españoles.

En el terreno personal, quiero reconocer el interés, entusiasmo y esfuerzo de María C. Cañadas, María José González, Isabel Romero, Pablo Flores, Antonio Marín y José Luis Lupiáñez, los formadores y tutores españoles, quienes se embarcaron en este proyecto sin conocer con claridad su rumbo y sus implicaciones, y dedicaron una proporción importante de su tiempo para sacarlo adelante. Este volumen es una evidencia de su calidad como formadores de profesores de matemáticas. El entusiasmo, compromiso y esfuerzo de los 26 estudiantes de MAD fueron el motor que permitió avanzar a lo largo de estos dos años y 32 actividades. Ellos fueron nuestra motivación, y confirmaron que,

cuando se trabaja con profesores comprometidos como ellos, es posible y gratificante contribuir a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Colombia.

Finalmente, quiero agradecer particularmente a dos personas sin cuyo interés y dedicación este proyecto no habría sido posible. A Ángela María Restrepo, coordinadora local del programa, quien fue la responsable de que MAD llegara a buen puerto, al acompañar semanalmente a los estudiantes de MAD y resolver todos los inconvenientes que surgieron sobre la marcha. Y a Luisa Gómez, quien estuvo en el origen de este proyecto y lo apoyó de múltiples formas a lo largo de su realización.

## 8. Referencias

- Arias, M. (2011). *Actuación de tutores en un programa de formación de postgrado para profesores de matemáticas*. Departamento de didáctica de la matemática (Tesis de maestría no publicada, Universidad de Granada, Granada). Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/1771/>
- Arias, M., & Gómez, P. (2012). Núcleo común y perfiles de la actuación de tutores de profesores de matemáticas en formación. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en educación matemática Xvi* (pp. 123-134). Jaén: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Recuperado de <http://tinyurl.com/d8nc4tc>
- Gómez, P. (2002a). Análisis del diseño de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En M. C. Penalva, & G. Torregosa (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 341-356). Alicante, España: Universidad de Alicante. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/370/>
- Gómez, P. (2002b). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/375/>
- Gómez, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En P. Bolea, M. J. González, & M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática* (pp. 15-35). Huesca, España: Instituto de Estudios Aragoneses. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/1278/>
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/444/>

- Gómez, P. (2012a). Análisis didáctico en la práctica de la formación permanente de profesores de matemáticas de secundaria. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 1-18). Bogotá: Universidad de los Andes. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/1889/>
- Gómez, P. (2012b). *Formación permanente de profesores de matemáticas de secundaria: ¿para qué, qué y cómo?* Trabajo presentado en Encuentro Internacional Educación 2012-2013, Iberoamérica. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/1962/>
- Gómez, P. (2012). *Investigación sobre el aprendizaje del análisis didáctico*. Trabajo presentado en Ciclo de Conferencias en Educación Matemática de Gemad, Bogotá. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/1888/>
- Gómez, P., & Cañadas, M. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y silencios: Revista Latinoamericana de Educación*, 2(especial), 78-89. Recuperado de <http://vys.uniandes.edu.co/index.php/vys/article/view/89/215>
- Gómez, P., & Cañadas, M. C. (2012). Dificultades manifestadas por profesores en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en educación matemática XXI* (pp. 303-312). Baeza, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/1882/>
- Gómez, P., Cañadas, M. C., Flores, P., González, M. J., Lupiáñez, J. L., Marín, A., et al. (2010). Máster en educación matemática en Colombia. En M. T. González, M. Palarea, & A. Maz (Eds.), *Seminario de investigación de los grupos de trabajo pensamiento numérico y algebraico e historia de la educación matemática de la SEIEM* (pp. 7-25). Salamanca, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/646/>
- Gómez, P., & González, M. J. (2008). *Mathematics knowledge for teaching within a functional perspective of preservice teacher training*. Trabajo presentado en ICME 11 Topic Study Group 27, Monterrey. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/418/>
- Gómez, P., & González, M. J. (2009). Conceptualizing and exploring mathematics future teachers' learning of didactic notions. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación*, Monografía XII, 223-235. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/431/>
- Gómez, P., & González, M. J. (En prensa-a). *Diseño de planes de formación de profesores de matemáticas basados en el análisis didáctico*. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, & M. Molina (Eds.). Recuperado de <http://tinyurl.com/c89p9t5>
- Gómez, P., & González, M. J. (En prensa-b). Papel del análisis didáctico en el diseño de planes de formación de profesores de matemáticas. En *Memorias del 13er Encuentro*

- Colombiano de Matemática Educativa*. Medellín: Asocolme. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/1953/>
- Gómez, P., González, M. J., Rico, L., & Lupiáñez, J. L. (2008). Learning the notion of learning goal in an initial functional training program. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Joint Meeting of the International Group For the Psychology of Mathematics Education (IGPME 32) and North American Chapter (PME-NA XXX)* (vol. 3, pp. 81-88). Morelia: Cinvestav-Umsnh. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/420/>
- Gómez, P., & Restrepo, A. (2012). Procesos de planificación en matemáticas y autonomía escolar. En Ascofade, Universidad de Antioquia, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Universidad Pedagógica Nacional, Universidad del Valle y Universidad Pedagógica Nacional de México (Eds.), *Memorias del III Congreso Internacional y VIII Nacional de Investigación en Educación, Pedagogía y Formación Docente* (pp. 1386-1399). Bogotá: Editor. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/1592/>
- Gómez, P., & Restrepo, Á. M. (2010). Organización del aprendizaje en programas funcionales de formación de profesores de matemáticas. En G. García (Ed.), *11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 22-32). Bogotá, Colombia: Cengage Learning. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/644/>
- Gómez, P., & Rico, L. (2007). Learning within communities of practice in preservice secondary school teachers education. *PNA*, 2(1), 17-28. Recuperado de <http://www.pna.es/numeros2/pdf/gomez2007learning.pdf>
- González, M. J., & Gómez, P. (2008). Significados y usos de la noción de objetivo en la formación inicial de profesores de matemáticas. *Investigación en educación matemática* 12, 425-434. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/1211/>
- González, M. J., & Gómez, P. (En revisión). *Conceptualizing and describing teachers' learning of pedagogical concepts*. Recuperado de <http://tinyurl.com/bnlngs4>
- John, P. D. (2006). Lesson planning and the student teacher: re-thinking the dominant model. *Journal of Curriculum Studies*, 38(4), 483-498.
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Didáctica de la matemática* (Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, Granada, España). Recuperado de <http://tinyurl.com/8k4wt9j>
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ICE-Horsori. Recuperado de <http://tinyurl.com/cyrkdrq>