

Marianne Freiberger
Rachel Thomas

φ

π

Zahlenreich

∞

\times

ε

τ

$\sqrt{\quad}$

Eine Entdeckungsreise
in eine vertraute,
fremde Welt



Springer

Zahlenreich

Marianne Freiberger und Rachel Thomas sind Herausgeberinnen des *Plus*-Magazins (www.plus.maths.org), einer frei zugänglichen Internetseite, die einer breiten Öffentlichkeit die Tür zur Welt der Mathematik öffnen möchte.

Bevor Marianne Freiberger im Jahr 2005 zu *Plus* kam, hatte sie an der Queen Mary University von London promoviert und dort auch drei Jahre als Postdoc gearbeitet. Sie war außerdem Chefredakteurin der Webseite „Maths Careers“.

Nachdem Rachel Thomas ihren Master in reiner Mathematik an der University of Western Australia abgeschlossen hatte, arbeitete sie als Beraterin für mathematische Fragen für verschiedene Firmen, die Regierung und in der Industrie. Sie war Herausgeberin der „Gazette of the Australian Mathematical Society“ und hat zusammen mit Marcus du Sautoy mathematische Stadtrundgänge durch London und Oxford ins Leben gerufen.

Rachel Thomas und Marianne Freiberger sind die Herausgeber des bekannten Mathematikbuchs *50 Visions of Mathematics* (Oxford University Press 2014).

Marianne Freiberger Rachel Thomas

Zahlenreich

Eine Entdeckungsreise in eine vertraute,
fremde Welt

Aus dem Englischen übersetzt von
Dr. Thomas Filk

 Springer

Autoren

Marianne Freiberger, Plus Magazine, London, UK

Rachel Thomas, Plus Magazine, Perth, Australia

Übersetzt von Dr. Thomas Filk.

Übersetzung der englischen Ausgabe: Numericon von Marianne Freiberger und Rachel Thomas, erschienen bei Quercus Editions Ltd (UK) 2014.

Copyright © 2014 Marianne Freiberger and Rachel Thomas

Published by agreement with Quercus Editions Ltd (UK).

Alle Rechte vorbehalten.

ISBN 978-3-662-47589-8

ISBN 978-3-662-47590-4 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-47590-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Planung: Frank Wigger

Zeichnungen: © William Donohoe (bis auf S. 5, 110, 128)

Satz: EDV-Beratung Frank Herweg, Leutershausen

Einbandentwurf: deblik, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

Inhaltsverzeichnis

	Einleitung	VIII
0	Von Nichts kommt manchmal doch etwas	1
1	Eins ist alles, was man braucht	16
$\sqrt{2}$	Schmetterlinge, Mord und ein Beweis, der nicht an den Rand passte	32
ϕ	Vom Irrationalen zum Göttlichen	44
2	Von primärer Bedeutung	58
e	Natürlich!	73
3	Aller guten Dinge sind drei	90
4	In einer anderen Dimension	105
5	Immer Ärger mit Fliesen	119
6	Die Bienen tun es und wir tun es ...	134
τ	Pi mal Daumen?	149
7	Was ist Ihre Glückszahl?	160
10	Die Skala ist wichtig	166

12	Zum Thema Zeit	175
ε	Es ist eine Wahrheit ...	185
43	Hätten Sie gerne Pommes dazu?	198
60	Eine Abenteuerreise durch Zeit und Raum	206
100 %	Sie können sich dessen (fast) sicher sein	222
16929639 ... 270130176	Der Gipfel der Vollkommenheit	235
Grahams Zahl	Zu groß zum Aufschreiben, doch nicht zu groß für Graham	243
∞	Sind wir endlich da?	259
x	markiert den Punkt	277
i	Imagination ist alles	290
	QED	308
	Könnte ich bitte noch etwas mehr haben?	311
	Index	317

Einleitung

Der Mensch hat einen natürlichen Forschungsdrang. Wir fragen uns unwillkürlich, was sich hinter der nächsten Ecke, dem nächsten Hügel oder jenseits des Horizonts befindet. Das galt für die großen Entdecker ebenso wie für uns, wenn wir uns auf einer Reise zum ersten Mal in einer neuen Umgebung befinden. Im Sinne einer solchen Erkundungsreise möchten wir Sie in ein aufregendes Land entführen, das manchen von uns vertraut aber vielen auch fremd ist. Wir führen Sie zu einigen unserer Lieblingsplätze, zeigen Ihnen erstaunliche Landschaften, wunderbare Aussichtspunkte und wertvolle Schätze. Wir erzählen Ihnen die Geschichten von mutigen Helden, verblüffenden Geheimnissen und genialen Eroberungen. Wir möchten Sie auf eine Reise durch die Welt der Mathematik geleiten.

In diese Welt kann man oft nur schwer eindringen, doch die abstoßenden Symbole und Gleichungen sind nur Zeichen einer anderen Sprache: ein Kode für wunderbare Ideen mit häufig überraschenden Anwendungen in unserer Alltagswelt. Wir möchten Ihnen bei der Übersetzung dieser Sprache helfen und Sie so an einige der berühmtesten Plätze der Mathematik bringen. Wir möchten Sie aber auch zu einigen abgeschiedenen Buchten und exotischen Stränden führen, die wir auf unseren Reisen entdeckt haben. Unsere Führer vor Ort sind jene freundlichen Vertreter der Mathematik, denen wir täglich begegnen: die Zahlen. Jede Zahl ist eine Gelegenheit, bei der es sich lohnt anzuhalten, den Ausblick zu genießen und die Örtlichkeiten zu erkunden. Dabei folgen wir den Pfaden, die wir selbst als besonders reizvoll empfinden.

Wir lieben bestimmte Orte aus den unterschiedlichsten Gründen – die Aussichten, das Wetter, die Menschen, das Essen, die Kultur. Ganz entsprechend gibt es vieles, wodurch sich Menschen zur Mathematik hingezogen fühlen. Für viele ist die Mathematik etwas grundsätzlich Schönes. Tatsächlich sind die meisten Mathematiker

mit ihren Ergebnissen unzufrieden, bevor diese nicht eine gewisse Eleganz, Einfachheit und Formschönheit erlangt haben. Andere fühlen sich zur Mathematik wegen ihrer „unerklärlichen Effektivität“ hingezogen, wegen ihrer Fähigkeit, unsere Welt erklären zu können. Manchmal geschieht das erst lange, nachdem ein bestimmter Teil der Mathematik entdeckt wurde und oftmals ist es nicht offensichtlich. Die Mathematik ist die Sprache aller Wissenschaften. Sie führt uns an die vordersten Fronten unseres Wissens, angefangen bei den Grundlagen des Universums bis hin zum Denken selbst, durch das wir überhaupt erst zu diesen Einsichten gelangen.

Als Herausgeber des *Plus*-Magazins (plus.maths.org), einem Internetmagazin, mit dem wir das Tor zur Welt der Mathematik öffnen möchten, hatten wir Gelegenheit, das Land der Mathematik ausgiebig zu erkunden. Dabei konnten wir auch einige der erstaunlichen (und manchmal auch exzentrischen) Personen kennenlernen, die selbst am Bau der Mathematik mitgewirkt haben. Aus diesem Grund möchten wir Sie nicht nur zu unseren mathematischen Lieblingsplätzen führen, sondern Ihnen auch die Geschichten der Leute und Kulturen erzählen, die diese Plätze erschaffen haben. Diese Geschichten sind manchmal lustig, gelegentlich auch seltsam, traurig oder tragisch, und für sich alleine schon wert, erzählt zu werden. Und ähnlich, wie Ihnen vielleicht ein großartiges architektonisches Meisterwerk noch zugänglicher wird, wenn Sie wissen, wer es erbaut hat und weshalb, können diese Geschichten einen Einblick in die erhabenen mathematischen Strukturen geben, denen wir auf unserer Reise begegnen werden.

Dieses Buch ist für uns eine Gelegenheit, das zu tun, was wir am liebsten tun: die Schönheit der Mathematik in all ihrer Pracht zu vermitteln und die mit ihr verknüpften Geschichten zu erzählen. Vielleicht haben Sie schon von einigen der Zielen gehört, die wir besuchen wollen, während Ihnen andere vollkommen neu sind. Vielleicht erleben wir auch einige Überraschungen. In jedem Fall hoffen wir, dass Ihnen die Reise gefallen wird ...

0 Von Nichts kommt manchmal doch etwas

Im Anfang war das Nichts. Nun, das ist nicht ganz richtig. Im Anfang gab es immer etwas. Vielleicht waren es Erbsen, erfolgreiche Jagden, Siege in einer Schlacht. Doch seit Jahrtausenden nutzen Menschen die Mathematik, um Dinge zu beschreiben: sie zu zählen, zu messen, aufzuteilen. Eine mathematische Beschreibung des Nichts, die Null, war lange Zeit nicht in Sicht.

Der Wert des Zählens

Sehr wahrscheinlich haben die Menschen zu Beginn mit ihren Fingern gezählt, ähnlich wie wir es als kleine Kinder lernen. (Es ist ganz bequem, dass wir am Ende unserer Arme bzw. in einer Falte unseres Fells ein paar „Zählstäbchen“ haben.) Einen der frühesten



Die Zahlen 1 bis 5 in einer heute of verwendeten Form der Strichliste.

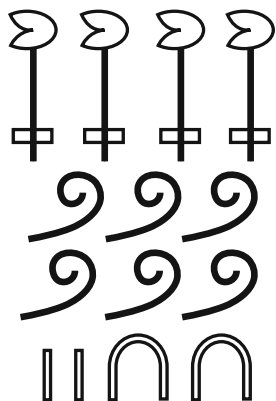
Hinweise auf die Verwendung von Zahlen finden wir in Markierungen auf einem 20.000 Jahre alten Knochen, dem sogenannten *Ishango-Knochen*, der in Afrika im damaligen Belgisch-Kongo, der heutigen Demokratischen Republik Kongo, gefunden wurde. Mit derartigen Strichlisten kann man viele Dinge sehr einfach

abzählen, beispielsweise den Punktestand in einem Spiel oder die Tage, die man in einem Gefängnis verbracht hat. Die Art, wie wir heute mit Strichlisten große Zahlen aufschreiben, hängt eng mit der erwähnten frühen Zählweise zusammen: Wir gruppieren die Zahlen in Fünfergruppen, wie die fünf Finger an unserer Hand. Die ersten vier Striche werden einzeln aufgeschrieben und der fünfte Strich schnei-

det die ersten vier und fügt der Strichliste eine neue vollständige Gruppe hinzu. Es liegt nahe, dass unsere Vorstellung von einer leicht überschaubaren Menge dieselbe Strichzahl umfasst, wie die Anzahl der Finger an unserer Hand.

Wie wir diese Zählmengen nannten oder ob wir überhaupt eigene Worte dafür hatten, ist eine andere Frage. Es gibt auch heute noch Kulturen, beispielsweise die Pirahã und die Mundurukú aus dem brasilianischen Amazonasgebiet, die zwar für sehr kleine Zahlen oder Mengen noch eigene Namen haben, alles größere bezeichnen sie jedoch einfach mit „viel“.

Im Verlauf der Jahrhunderte führten jedoch fast alle Kulturen eigene Bezeichnungen sowie symbolische Zeichen für Zahlen ein, und sie entwickelten Kombinationsformen, sodass sie jede möglicherweise wichtige Zahl auch aufschreiben konnten. Inschriften in über 5000 Jahre alten ägyptischen Gräbern (also aus der Zeit um 3000 v. Chr.) belegen, dass die Ägypter Zahlen durch schöne Hieroglyphen darstellten, beispielsweise Seilrollen, Lotusblüten und Frösche zur Darstellung von 100, 1000 und 100.000. Durch entsprechende Wiederholungen dieser Zeichen konnten sie jede für sie wichtige Zahl aufschreiben. Für manche Zahlen brauchte man allerdings eine sehr große Anzahl von Symbolen.



Die Zahl 4622, ausgeschrieben in ägyptischen Hieroglyphen.

Frösche zur Darstellung von 100, 1000 und 100.000. Durch entsprechende Wiederholungen dieser Zeichen konnten sie jede für sie wichtige Zahl aufschreiben. Für manche Zahlen brauchte man allerdings eine sehr große Anzahl von Symbolen.

Mit einem ähnlichen Verfahren stellten auch die alten Griechen ihre Zahlen dar. Sie verwendeten dazu Buchstaben aus ihrem Alphabet, beispielsweise stehen α für 1, β für 2, γ für 3, κ für 20, τ für 300. Auch die Römer verwendeten zum Aufschreiben ihrer Zahlen Symbolkombinationen: I für 1, V für 5, X für 10, L für 50, C für 100, D für 500 und M

für 1000. Im Allgemeinen musste man die Werte der Symbole addieren, um die Zahl zu erhalten. So steht beispielsweise XII für 12. Es gab jedoch auch Fälle, bei denen Zahlen subtrahiert wurden; beispielsweise steht IV für die Zahl $5 - 1 = 4$. Noch heute verwenden wir dieses System für die Bezeichnung von Kaisern, Königen oder Königinnen (Heinrich IV. oder Friedrich II.) sowie für die Jahresangaben im Abspann von Filmen oder Fernsehserien.

Doch egal in welcher Sprache, eine Zahl ist immer nur eine Bezeichnung oder ein Symbol für die Menge an Dingen, die gezählt werden. Die Zahl 3 bedeutet immer dasselbe, egal ob sie als Strichliste, in ägyptischen Hieroglyphen oder in römischen oder griechischen Ziffern geschrieben wird. Das Eins-Sein einer Menge, die Eigenschaft nur ein Ding zu enthalten, das Zwei-Sein einer Menge aus zwei Dingen, das Drei-Sein einer Menge aus drei Dingen, dies sind die ersten mathematischen Abstraktionen, die wir intuitiv vornehmen. Die Anzahl der Dinge, die wir zählen, ist unabhängig von der Art dieser Dinge, ob es sich um Katzenjungen oder Kohlköpfe handelt.

Die Summe macht's

Keines der Zahlensysteme, die wir bisher betrachtet haben, enthielt ein Symbol für die Menge, die kein Ding enthält. Das war bei ihnen zunächst auch nicht notwendig. Alle diese Systeme sind *additiv*: Man addiert einfach die Werte der Symbole (oder Symbolblöcke) in der Zahl und erhält so ihren Wert. Manchmal gibt es Vorschriften, wie diese Symbole angeordnet sein müssen, beispielsweise, dass man mit dem größten Block auf der linken Seite beginnt. Gewöhnlich gibt es jedoch keine Mehrdeutigkeiten, denn der Wert der Zahl ist einfach die Summe der einzelnen Teile. (Beispielsweise lässt sich die römische Zahl MCMLXXIV als die Summe von vier Blöcken verstehen: M+CM+LXX+IV, mit der Bedeutung $1000 + 900 + 70 + 4 = 1974$.) Soweit so gut, doch wenn man mit wirklich großen Zahlen

umgehen oder komplizierte Rechnungen ausführen möchte, wird es schwierig.

Betrachten wir beispielsweise die beiden Zahlen MCMLXXIV und XXXIX als römische Ziffern. Die Summe der beiden ist MMXIII. Die tatsächliche Rechnung ist jedoch deutlich schwieriger, als wenn wir unsere heutigen Zahlzeichen 1973 und 39 (mit dem Ergebnis 2013) addieren. Hier werden die auf Strichlisten aufbauenden Zahlen kompliziert. Möchte man mit wirklich großen Zahlen umgehen und gleichzeitig mathematische Berechnungen einfach halten, benötigt man eine geschickte Schreibweise für Zahlen. Und entscheidend für ein solches System ist die Null.

Jede Stelle hat ihren Wert

Vor einigen Jahrtausenden lebten in Mesopotamien zwischen den beiden Strömen Tigris und Euphrat mehrere Hochkulturen. Die ersten, um 3000 v. Chr., waren die genialen Sumerer. Sie verwendeten zur Aufzeichnung ihrer Zahlen weiche Lehmtafeln, in die sie mit dem keilförmigen Ende ihrer Schreibstifte die Zahlensymbole eindrückten. Diese Schreibweise entwickelte sich schließlich zu einem System, mit dem man alle Zahlen zwischen 1 und 59 durch die Anordnung von nur zwei keilförmigen Symbolen darstellen konnte.

Doch statt in dieser Weise fortzufahren und immer neue Anordnungen und Symbole zu erfinden, machten ihre Nachfolger, die Babylonier, vor ungefähr 4000 Jahren einen gewaltigen Sprung: Sie erfanden ein *Stellenwertsystem*, das unserem heutigen System sehr ähnlich ist. Die Zahlen werden in eine Reihe nebeneinander geschrieben, und der *Wert* jeder Zahl hängt davon ab, an welcher *Stelle* in dieser Reihe sie steht.

Wir können das an unserem eigenen Zahlensystem verdeutlichen. Für uns hat die Zahl „4“ in 4622 nicht mehr den Wert 4, sondern ihre Stelle sagt uns, dass unsere Zahl genau 4-mal die 1000 enthält. Ähn-

1		11		61	
2		12		62	
3		13		71	
4		14		100	
5		15		121	
6		20		181	
7		25		301	
8		30		601	
9		40		3000	
10		50		3661	

Babylonische Zahlen. © Pikaia Imaging

lich folgt aus der Stelle der 6, dass die Zahl 6-mal die 100 enthält. Und die beiden Ziffern 2 stellen verschiedene Werte dar: die linke 2 bedeutet, dass die 10 2-mal enthalten ist, und die rechte 2 entspricht 2-mal der 1. Was haben die *Stellenwerte* 1000, 100, 10 und 1 gemeinsam? Sie sind alle *Potenzen* von 10, also Zahlen, die wir durch mehrfache Multiplikation der 10 mit sich selbst erhalten:

$$1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3,$$

$$100 = 10 \cdot 10 = 10^2,$$

$$10 = 10^1,$$

$$1 = 10^0 \text{ nach mathematischer Übereinkunft.}$$

Das System der Babylonier funktionierte ganz ähnlich, außer dass es nicht auf Potenzen von 10, sondern auf Potenzen von 60 beruhte. Einer Ziffer in einer Zahl konnte man entnehmen, wie viele Vielfache von 1, 60, 60^2 (= 3600) und so weiter die Zahl enthielt, je nachdem, an welcher Stelle diese Ziffer stand.

Etwas aus nichts

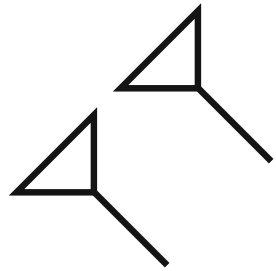
Das Stellenwertsystem war ein großer Fortschritt. Man konnte so sehr große Zahlen aufschreiben, ohne dass man für immer größere Zahlen und Größenordnungen immer neue Symbole erfinden musste. Außerdem wurde es leichter, komplizierte Berechnungen auszuführen: Ein Teil der Arbeit wird uns durch die Art, wie wir Zahlen aufschreiben, abgenommen. Wenn eine Zahl 3-mal die 60 enthält und eine zweite Zahl 4-mal die 60, dann enthält ihre Summe offensichtlich 7-mal die 60. Damit weiß man, welche Zahl man an die Stelle, die für die Vielfachen von 60 steht, schreiben muss. Es tritt lediglich eine Schwierigkeit auf, wenn die Vielfachen von 60 in dieser Zahl größer als 60^2 sind. Dem kann man jedoch durch einen Übertrag zur nächsten Stelle gerecht werden, wie wir das auch aus unserem eigenen Zahlensystem kennen.

Es gab jedoch einen Haken. Was soll man hinschreiben, wenn in der gegebenen Zahl gar kein Vielfaches von 60 oder 60^2 oder irgendeiner anderen Potenz von 60 auftritt? Beispielsweise enthält die Zahl $3601 = 60^2 + 1$ kein Vielfaches von 60, und damit würde an den Stelle solcher Vielfache gar keine Zahl stehen. Ursprünglich kennzeichneten die Babylonier eine solche fehlende Zahl, indem sie etwas Platz ließen. Das erzeugte jedoch eine gewisse Mehrdeutigkeit: Ist dieser leere Platz beabsichtigt oder hatte der Schreiber in diesem Augenblick nur einen Schluckauf? Die Babylonier schienen mit dieser Mehrdeutigkeit zurecht zu kommen, indem sie ein intuitives Gefühl für die Größe der Zahlen entwickelten, mit denen sie es in einer

bestimmten Rechnung zu tun hatten. Im Grunde genommen benötigten sie jedoch einen *Platzhalter*, der die verschiedenen Potenzen von 60 abtrennte.

Um 300 v.Chr. scheint ein solches Symbol in Form von zwei gekippten Keilen in Gebrauch gewesen zu sein. Sah man ein solches Symbol, wusste man, dass eine Potenz von 60 fehlte. Das neue raffinierte Zahlensystem führte zu einer Blüte der babylonischen Mathematik. Nun wurden komplizierte Berechnungen möglich und brachten sehr genaue astronomische Tabellen hervor.

Stellenwertsysteme wurden von mehreren Kulturen erfunden, lange bevor unser heutiges System geboren wurde: von den Chinesen um 300 v. Chr. und von den Mayas, deren Kultur um 2000 v. Chr. begann und um 500 n. Chr. ihren Höhepunkt erreichte. Beide Systeme kannten auch ein Platzhaltersymbol. Die Null hatte ihren unaufhaltsamen Einzug in die Mathematik gefunden.



Das babylonische Platzhaltersymbol zur Trennung der Potenzen von 60.

Nichts ist doch etwas

Keine dieser Kulturen scheint jedoch erkannt zu haben, dass ihr Platzhaltersymbol – ihre Null – selbst eine Zahl ist. Diese Erkenntnis stammt, zusammen mit unserem heutigen Zahlensystem, aus Indien. Schon um 500 n. Chr. verwendeten die Inder ein Stellenwertsystem, das auf der Basis Zehn beruhte. Im Jahr 499 fasste der Mathematiker und Astronom Aryabhata das Wesen dieses Systems in seinem Buch *Aryabhatiya* wunderbar zusammen:

Von einer Stelle zur nächsten erhält man jeweils das Zehnfache der vorherigen.

Um auf die Null zu verweisen, verwendeten die Inder das Sanskritwort für „leer“: *s'ūnya*. Der erste Hinweis auf eine Darstellung der Null durch einen kleinen runden Kreis stammt aus dem Jahr 870. Später wurde daraus das heute verwendete Symbol für die Null.

Besonders wichtig ist jedoch, dass die indischen Mathematiker die Null als eigenständige Zahl behandelten, mit der sie rechnen konnten und die sogar das Ergebnis einer Aufgabe sein konnte.

Der Mathematiker und Astronom Brahmagupta formulierte in seinem um 628 veröffentlichten Buch *Brahmasphutasiddhanta* die heute bekannten Rechenregeln. Soweit es die Arithmetik betrifft, erfasste er auch in diesem Zusammenhang das Wesen des Nichts-Seins der Null. Heute würden wir das folgendermaßen ausdrücken:

Wird die Null zu einer Zahl addiert oder von einer Zahl subtrahiert, bleibt diese Zahl unverändert:

$$b + 0 = 0 + b = b, \quad b - 0 = b.$$

Null ist die einzige Zahl, für die dies zutrifft: Keine andere Zahl lässt ihren Additions- oder Subtraktionspartner derart unbeeinflusst. Angenommen, es *gäbe* eine weitere solche Zahl, die wir mit u (für „unbekannt“) bezeichnen wollen. Da u zu jeder anderen Zahl addiert werden kann, ohne dass sich diese Zahl ändert, muss gelten:

$$0 = 0 + u.$$

Und da wir auch 0 zu jeder Zahl addieren können, ohne dass sich diese Zahl ändert, gilt ebenso:

$$0 + u = u.$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen zusammensetzen, erhalten wir

$$0 = 0 + u = u.$$

Also ist u dasselbe wie 0!

Nebenbei bemerkt ist dies unser erstes Beispiel für einen mathematischen Beweis, also ein Argument, mit dem zweifelsfrei nachgewiesen werden kann, dass etwas wahr sein muss. Das Konzept des Beweises gehört zur Mathematik wie der Fisch in das Wasser. Es wird uns im Folgenden noch häufig begegnen.

Eine weitere von Brahmaguptas Regeln betrifft das Verhalten von Null bei einer Multiplikation:

Null multipliziert mit irgendeiner Zahl ist Null.

Diese kleine Zahl mag in Bezug auf die Addition unauffällig und bescheiden sein, doch im Zusammenhang mit der Multiplikation verschlingt sie alles.

Und was lässt sich über die Null in Bezug auf die Division sagen? Was ist 5 geteilt durch 0 oder 0 geteilt durch 0? Diese Fragen erwiesen sich als sehr schwierig, und aus ihnen entwickelte sich Jahrhunderte später die Form von Mathematik, wie wir sie heute kennen. Brahmagupta legte sich in seiner Antwort zur ersten Frage nicht so ganz fest, doch hinsichtlich der zweiten Frage behauptete er steif und fest, 0 geteilt durch 0 (also $\frac{0}{0}$) müsse 0 sein. Nach unserer heutigen Sichtweise lag er hier falsch. Es zeigte sich, dass ein anderer indischer Mathematiker – Bhaskara II. – in dieser Hinsicht die tieferen Einsichten hatte.

Väterliche Liebe

Bhaskara II. lebte im zwölften Jahrhundert, und für viele ist er der größte indische Mathematiker und Astronom des Mittelalters. Doch sein bekanntester Beitrag zur Mathematik scheint seinen Ursprung in etwas zu haben, das heute eher als böse Zwillingschwester der Astronomie gilt: die Astrologie. Nach einer Legende soll Bhaskara dem Horoskop seiner geliebten Tochter entnommen haben, dass sie

kinderlos und unverheiratet bleiben werde. Er wollte sich diesem Schicksal aber nicht beugen und berechnete einen günstigen Zeitpunkt, zu dem ihre Hochzeit stattfinden sollte. Um ganz sicher zu gehen, dass dieser Zeitpunkt nicht verpasst würde, konstruierte er eine Wasseruhr. Doch seine Tochter mit dem wunderschönen Namen Lilavati konnte ihre Neugier nicht zurückhalten und betrachtete die Uhr aus der Nähe. Dabei fiel eine Perle von ihrem Brautkleid in den Wasserkanal der Uhr und verstopfte ihn. So verpasste man den günstigen Augenblick und die Hochzeit fand nicht statt! Zum Trost versprach der verzweifelte Bhaskara seiner Tochter, in ihrem Namen ein Buch zu schreiben, das ewigen Bestand haben sollte. Zum Glück für sie (und uns) handelte es sich um ein Mathematikbuch.

Das *Lilavati* ist nur ein Teil eines größeren Werks mit der Bezeichnung *Siddhānta Shiromani*, übersetzt aus Sanskrit *Krone der Abhandlungen*. Es behandelt eine erlesene Auswahl mathematischer Fragen und enthält viel Arithmetik, aber auch Geometrie und Algebra. Einige Fragen sind direkt an Lilavati „mit ihren Rehkitzaugen“ gerichtet, und viele davon werden in einer dichterischen Sprache formuliert, von der unsere Lehrbücher nur träumen können. Hier ein Beispiel:

Die Quadratwurzel der Hälfte der Bienen eines Schwarms ist zu einem Jasminstrauch geflogen, ebenso wie acht Neuntel des gesamten Schwarms: Eine weibliche Biene schwirrt zu einem zurückgebliebenen Männchen, das summend gefangen ist in einer Lotusblüte, deren Duft es in der Nacht angezogen hatte. Sage mir, liebe Frau, die Anzahl der Bienen.

Falls Sie die Antwort nicht wissen, finden Sie sie in der Fußnote*.

* Antwort zur Bienenfrage an Lilavati:

Es sei x die Anzahl der Bienen. Dann ergibt sich aus der Beschreibung die Gleichung $\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2 = x$, woraus nach einigen Umformungen $\frac{1}{81}x^2 - \frac{17}{18}x + 4 = 0$ folgt. Die Lösung lautet $x = 72$.

Im *Lilavati* nennt Bhaskara auch einige Regeln zum Rechnen mit null, unter anderem auch eine, die sich folgendermaßen deuten lässt: Für jede Zahl a ist

$$\frac{a \cdot 0}{0} = \frac{0}{0} = a.$$

Diese Regel scheint anzudeuten, dass $\frac{0}{0}$ alles sein kann – jede beliebige Zahl a . Einen Nachhall davon werden wir gleich noch sehen. Bhaskaras große Erkenntnis finden wir jedoch in einer weniger bekannten Arbeit, der *Vija-Ganita*. Hier untersucht er, was $\frac{a}{0}$ sein könne:

Man bestimme den Quotienten $\frac{3}{0}$. Dieser Bruch, dessen Nenner Null ist, muss eine unendliche Größe sein. In dieser Größe ... gibt es keinen Wandel, unabhängig davon, wie viel man hinzugibt oder wegnimmt, denn im unendlichen und unwandelbaren Gott findet keine Veränderung statt.

Nach Bhaskara sollte das Ergebnis der Teilung durch null also unendlich sein. Diese Zahl identifiziert er mit einem unveränderlichen Gott, da unendlich sich bei der Addition oder Subtraktion endlicher Zahlen nicht ändert. Heute würden viele Mathematiker dem widersprechen, doch man kann leicht nachvollziehen, wie Bhaskara zu dieser Vorstellung kam. Unterteilt man einen Streckenabschnitt in immer kleinere Teilstücke, wird die Anzahl der Teilstücke immer größer. Und wenn die Länge der einzelnen Stücke gegen null geht, wird ihre Anzahl eben unendlich.

Von oben und unten

Unter gewöhnlichen Umständen verhält sich die Division schön kontinuierlich. Teilt man 1 durch eine Folge von Zahlen, die sich immer

mehr der 2 nähern, nähert sich das Ergebnis zunehmend $\frac{1}{2} = 0,5$:

$$\frac{1}{1,9} = 0,5263\dots,$$

$$\frac{1}{1,99} = 0,5025\dots,$$

$$\frac{1}{1,999} = 0,5003\dots$$

und so weiter. Teilen wir jedoch eine Zahl durch eine Folge von Zahlen, die sich immer mehr der 0 nähern, erhalten wir:

$$\frac{1}{0,001} = 1000,$$

$$\frac{1}{0,0001} = 10.000,$$

$$\frac{1}{0,000\ 01} = 100.000,$$

$$\frac{1}{0,000\ 001} = 1.000.000.$$

Diese Zahlen werden immer größer und nähern sich bzw. gehen gegen unendlich. Es scheint also, dass man unendlich erhält, wenn man eine Zahl durch 0 teilt.

Doch ganz so einfach ist es leider nicht. Denken wir an die Zahl 0 auf einem Thermometer: Die positiven Temperaturen stehen oberhalb und die negativen unterhalb. Wir markieren die Zahlen, durch die wir oben geteilt haben, auf dem Thermometer. Das Ergebnis ist eine Folge von Zahlen, die sich auf dem Thermometer von der Seite der positiven Temperaturen der 0 nähert. Wir hätten uns aber ebenso gut im negativen Temperaturbereich der 0 nähern können. Dann hätten wir durch negative Zahlen geteilt, beispielsweise durch $-0,001$, $-0,0001$, $-0,000\ 01$, $-0,000\ 001$ und so weiter. Teilen wir eine po-

sitive Zahl, z. B. 1, durch eine negative, so ist das Ergebnis negativ, in diesem Fall:

$$\frac{1}{-0,001} = -1000,$$

$$\frac{1}{-0,0001} = -10.000,$$

$$\frac{1}{-0,00001} = -100.000,$$

$$\frac{1}{-0,000001} = -1.000.000.$$

Auch diese Folge geht irgendwie gegen unendlich, doch dieses Unendlich scheint in der entgegengesetzten Richtung zu liegen! Statt auf dem Thermometer immer höher zu klettern, fallen wir immer tiefer. Gibt es so etwas wie minus unendlich? Das sind schwierige Fragen. Die moderne Mathematik lässt sich auf diese Diskussion erst gar nicht ein: Sie legt einfach fest, dass das Ergebnis einer Teilung durch 0 *nicht definiert* ist.

Zu den Grenzen

Doch was ist mit 0 geteilt durch 0? Nichts geteilt durch etwas ist immer noch nichts. Das ist unbestritten, wie schon Brahmagupta festgestellt hatte. Wenn wir also Null durch eine Folge von Zahlen teilen, die sich null nähern, erhalten wir immer 0:

$$\frac{0}{0,1} = 0,$$

$$\frac{0}{0,01} = 0,$$

$$\frac{0}{0,001} = 0.$$

Dasselbe gilt, wenn wir durch die negativen Zahlen teilen:

$$\frac{0}{-0,1} = 0$$

$$\frac{0}{-0,01} = 0$$

$$\frac{0}{-0,001} = 0$$

und so weiter. Sollten wir also doch in Übereinstimmung mit Brahmagupta festlegen, dass $\frac{0}{0} = 0$?

Doch auch hier gibt es wieder einen Haken. Wir können zwei Zahlenfolgen betrachten, die sich beide null nähern, z. B.

$$0,01, 0,001, 0,0001, \dots$$

und

$$0,02, 0,002, 0,0002, \dots$$

Was erhalten wir nun, wenn wir entsprechende Terme durcheinander teilen? Wir erhalten

$$\frac{0,02}{0,01} = 2$$

$$\frac{0,002}{0,001} = 2$$

$$\frac{0,0002}{0,0001} = 2$$

$$\frac{0,000\ 02}{0,000\ 01} = 2$$

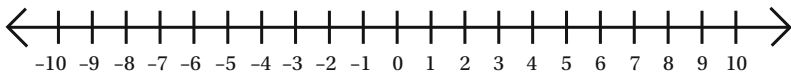
und so weiter. Beide Folgen, sowohl die oberhalb des Bruchstrichs als auch die unterhalb, gehen gegen null. Kann man hieraus schließen, dass $\frac{0}{0}$ gleich 2 ist? Hätten wir jedoch umgekehrt geteilt, also die Zahlen in der ersten Folge durch die Zahlen der zweiten, hätte dasselbe

Argument ergeben, dass $\frac{0}{0}$ gleich $\frac{1}{2}$ sein sollte! Es zeigt sich, dass man beide Folgen immer so wählen kann, dass für $\frac{0}{0}$ jedes beliebige Ergebnis herauskommen kann. Deshalb enthalten sich die Mathematiker auch in diesem Fall. Offiziell ist die Antwort zu $\frac{0}{0}$ nicht definiert. Nichts geteilt durch nichts geht nicht!

Trotz dieser Schwierigkeiten und dank der anfänglichen Bemühungen von Bhaskara und seinen Zeitgenossen sind wir heute froh, Null sowohl als Platzhalter in unserem Zahlensystem als auch als eine eigenständige Zahl verwenden zu können. Und in unserem heutigen digitalen Zeitalter wurde die Null sogar noch wertvoller. Um jedoch das Geheimnis von Information lüften zu können, müssen wir die Macht der Null mit der Zahl 1 kombinieren.

1 Eins ist alles, was man braucht

Versuchen wir es noch einmal: Im Anfang war die 1. Und 1 ist alles, was man braucht. Denken wir an die natürlichen Zahlen: 1, 2, 3 und so weiter. Wir erhalten sie durch wiederholte Addition von 1, z. B.: $2 = 1 + 1$, $4 = 1 + 1 + 1 + 1$, $7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Das ist zwar langweilig aber einfach. Und wenn wir in Gedanken für jede 1, die wir addieren, einen Schritt entlang einer Geraden machen, können wir sämtliche natürlichen Zahlen immer mit demselben Abstand 1 nebeneinander aufreihen.



Die Zahlengerade.

Dieses Konzept einer Zahlengeraden ist erstaunlich nützlich. Die Addition wird einfach zu einer Bewegung nach rechts: Wollen wir 4 zu 6 addieren, beginnen wir bei 6 und spazieren 4 Schritte weiter. Hätten wir bei 4 begonnen und 6 Schritte nach vorne gemacht, wären wir bei derselben Stelle gelandet. Das erscheint sinnvoll, da die Reihenfolge bei der Addition keine Rolle spielt – sie ist *kommutativ*.

Subtraktion bedeutet, dass man zurückgeht: $6 - 4$ bedeutet, von 6 aus vier Schritte nach links zu gehen. Das ist einfach! Auf diese Weise kommen auch die negativen Zahlen ins Spiel. Gehen wir von der 0 aus 6 Schritte zurück, landen wir bei -6 , und gehen wir von 4 aus 8 Schritte nach links, gelangen wir zu -4 . Ebenso gut hätten wir von -8 vier Schritte nach vorne gehen können, was uns zeigt, dass $4 - 8 = -8 + 4 = -4$. Auch die Subtraktion ist kommutativ, wenn wir sie uns als die Addition einer negativen Zahl vorstellen.

Selbst die Multiplikation beugt sich der Macht der 1 und ihrer Wiederholungen: $2 \cdot 4$ bedeutet, dass man von 0 aus zweimal vier Schritte nach vorne geht, oder, was das Gleiche ist, viermal zwei Schritte nach vorne (die Multiplikation ist ebenso wie die Addition kommutativ). Die Multiplikation $2 \cdot -4$ bedeutet, dass man zweimal vier Schritte zurück geht, also zu -8 . Wir hätten ebenso auch viermal zwei Schritte zurückgehen können; das verdeutlicht $2 \cdot -4 = -2 \cdot 4 = -8$. Das haben wir auch in der Schule gelernt: „plus mal plus ist plus“ und „plus mal minus ist minus“.

Es bleibt jedoch noch ein etwas haariger Fall: Was ergibt „minus mal minus“? Wie wir aus jedem Schulbuch wissen, ist das Ergebnis positiv – doch weshalb? Lehrer sagen oft, so sei es halt. Es sei so festgelegt worden, damit die Rechenregeln widerspruchsfrei bleiben. Doch die Zahlengerade gibt uns eine gewisse Intuition, weshalb diese Festlegung sinnvoll ist. Ein Minuszeichen zeigt eine Richtungs-umkehr an: $-2 \cdot 3$ bedeutet „mache dreimal 2 Schritte nach hinten“, es kann aber auch interpretiert werden als: „mache zweimal drei Schritte, aber mache sie zurück statt nach vorne“. Allgemeiner lässt sich $-2 \cdot \text{irgendeine Zahl } n$ deuten als: „Mache zweimal n Schritte, aber in die umgekehrte Richtung als die durch n vorgegebene“. Wenn also die Zahl n negativ ist, beispielsweise $-2 \cdot -3$, dann sollte man 6 Schritte nach vorne gehen: $-2 \cdot -3 = 6$.

Ein oder Aus?

Mit der 1 gelangen wir also überall hin, soweit es die ganzen Zahlen und ihre Rechenregeln betrifft. Doch das Leben ist etwas komplizierter. Der Alltag stellt uns oft vor eine Wahl zwischen mehreren Möglichkeiten, mindestens zwei: links oder rechts, Tee oder Kaffee, Hund oder Katze. Für Maschinen ist eine besondere Alternative von besonderer Bedeutung: „ein“ oder „aus“, was wir als 0 (aus) und 1 (ein) schreiben können. Es zeigt sich, dass diese grobe Alternative

alles ist, was man wirklich braucht: Die *binäre* Welt ist der Motor in unserem digitalen Leben.

Um das einzusehen, beginnen wir mit Zahlen. Wie wir im Kapitel 0 gesehen haben, hängt unsere Darstellung der Zahlen von zwei Dingen ab: den zehn Symbolen 0 bis 9 und ihrer Stelle in einer Zahl, aus der wir ihren Wert ablesen. Die 7 in 7325 steht für $7 \cdot 1000$, die 3 für $3 \cdot 100$, die 2 für $2 \cdot 10$ und die 5 für $5 \cdot 1$. Was ist an 10, 100, 1000 usw. so speziell? Es sind alles Potenzen von 10: $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$. Selbst 1 ist eine Potenz von 10, denn in der Mathematik wurde festgelegt, dass $10^0 = 1$ ist. Wir haben ein *dezi- males* Stellenwertsystem, bei dem also die Zahl 10 die Basis ist.

Doch die Auszeichnung der 10 ist willkürlich. Wir können ebenso nur zwei Symbole wählen, 0 und 1, und mit Potenzen von 2 arbeiten. Die Zahl 2, die von der Form $1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ ist, wird als *binäre Zahl* zu 10. Die Zahl 3 ist $1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ und wird in der binären Darstellung zu 11. Vier entspricht $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ und hat somit 100 als binäre Form. Es folgen alle Zahlen von null bis zehn in ihrer binären Darstellung:

0	null
1	eins
10	zwei
11	drei
100	vier
101	fünf
110	sechs
111	sieben
1000	acht
1001	neun
1010	zehn

Auf diese Weise lassen sich alle positiven Zahlen als binäre Folge aus 0en und 1en darstellen. Mit einer zusätzlichen Ziffer an der Spitze

einer solchen Folge, die das Vorzeichen festlegt, kann man auch negative Zahlen einbeziehen (dafür gibt es verschiedene Konventionen). Möchte man auch Zahlen darstellen, die nicht ganzzahlig sind, wiederholt man dasselbe mit Potenzen von $\frac{1}{2}$. So steht der binäre Ausdruck 0,111 für $1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,875$ in dezimaler Schreibweise. Und der binäre Ausdruck 11,01 bedeutet

$$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + 1 + \frac{1}{4},$$

was dasselbe ist wie die Dezimalzahl 3,25.

Jede Zahl, die man als Dezimalzahl schreiben kann, lässt sich auch als Folge von 0en und 1en ausdrücken. Und genau dies ist die Darstellung von Zahlen in Computern.

Wahr oder falsch?

Könnte man jedoch mit Computern nur Zahlen manipulieren, wären sie nichts anderes als bessere Taschenrechner. Ihre eigentliche Stärke liegt in ihrer Fähigkeit, aufwendige und komplexe Aufgaben erledigen zu können, sodass ich über sie meinen Urlaub buchen oder eine langweilige Teambesprechung überleben kann, indem ich verbotener Weise Minesweeper spiele. Computer können solche Aufgaben lösen, weil sie auf einer grundlegenden Annahme aufbauen: Alles ist entweder wahr oder falsch. Im Alltag ist das nicht immer richtig, in der Mathematik (meistens) schon. Dies veranlasste den Mathematiker George Boole (1815–1864) im 19. Jahrhundert, ein ganzes System der Logik zu formulieren.

Boole'sche Logik beruht auf der Idee, dass Aussagen mit Worten wie UND oder ODER aneinandergereiht werden können. Ob eine derart zusammengesetzte Aussage wahr oder falsch ist, hängt davon ab, ob ihre Bestandteile wahr oder falsch sind. Angenommen, Sie wissen, dass die Aussage „Jim kommt auf mich zu“ wahr ist. Wird

dadurch auch die Aussage „Jim kommt auf mich zu UND Jim ist tot“ wahr? Nein, natürlich nicht. (Es sei denn, Jim ist ein Zombie, und dann nichts wie weg!) Eine zusammengesetzte Aussage P UND Q ist nur dann wahr, wenn beide Teilaussagen P und Q wahr sind. Es reicht nicht, wenn nur eine der Teilaussagen wahr ist. Und sind sogar beide Teilaussagen falsch, ist ihre Zusammensetzung natürlich auch falsch.

Wir können dies in einer *Wahrheitstabelle* für den UND-Operator zusammenfassen. Diese Tabelle enthält sämtliche Kombinationen von wahr und falsch für die beiden Teilaussagen P und Q und nennt uns das entsprechende Ergebnis für P UND Q .

P	Q	P UND Q
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch
falsch	falsch	falsch

Wahrheitstabelle für UND.

Der ODER-Operator ist etwas freizügiger. Die zusammengesetzte Aussage P ODER Q , beispielsweise „Jim kommt auf mich zu ODER Jim ist tot“ ist wahr, wenn eine der beiden Teilaussagen wahr ist.

P	Q	P ODER Q
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
falsch	falsch	falsch

Wahrheitstabelle für ODER.

Neben UND und ODER definierte Boole noch einen NICHT Operator, der nur eine einzelne Aussage als Eingabe verlangt.

Wenn die Aussage „Jim kommt auf mich zu“ wahr ist, dann ist offensichtlich „Jim kommt NICHT auf mich zu“ falsch und umgekehrt. NICHT vertauscht also einfach den Wahrheitswert einer Aussage.

P	NICHT P
wahr	falsch
falsch	wahr

Wahrheitstabelle für NICHT.

Mit UND, ODER und NICHT lassen sich alle möglichen Kombinationen von komplizierten Aussagen zusammenstellen, und indem man sich stur durch die Wahrheitstabellen durcharbeitet, kann man auch immer entscheiden, ob die zusammengesetzten Aussagen wahr oder falsch sind.

Logische Berechnungen

Das Durchhackern solcher Wahrheitstabellen klingt kompliziert und langweilig, doch indem wir es als mathematisches Problem formulieren, können wir uns die Arbeit vereinfachen. Boole hatte genialerweise erkannt, dass sich binäre logische Operationen sehr ähnlich verhalten wie unsere gewöhnlichen Rechenoperationen, mit ein paar kleinen Abwandlungen.

Zunächst sind die Variablen unserer neuen Form der Arithmetik (die man *Boole'sche Algebra* nennt) logische Aussagen (etwas vereinfacht sind das Sätze, die entweder wahr oder falsch sein können, wie „Jim ist ein Zombie“). Da diese nur zwei Werte annehmen können, schreiben wir 0 für eine falsche Aussage und 1 für eine richtige Aussage. Dann wird ODER zu einer Art der Addition von Nullen und Einsen:

$0 + 0 = 0$ (da „ P ODER Q “ falsch ist, wenn sowohl P als auch Q falsch sind),

$1 + 0 = 0 + 1 = 1$ (da „wahr ODER falsch“ und „falsch ODER wahr“ beide wahr sind),

$1 + 1 = 1$ (da „wahr ODER wahr“ wahr ist).

UND wird zu einer Form der Multiplikation:

$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ (da sowohl „falsch UND wahr“ als auch „wahr UND falsch“ falsch sind),