

Matthias Müller

Überraschende Mathematische Kurzgeschichten

Ausgewählte Artikel
des jungen Ablegers
der Zeitschrift



 Springer

Überraschende Mathematische Kurzgeschichten

Matthias Müller
(Hrsg.)

Überraschende Mathematische Kurzgeschichten

Ausgewählte Artikel des jungen Ablegers der
Zeitschrift „Die $\sqrt{\text{WURZEL}}$ “

 Springer

Herausgeber

Dr. Matthias Müller
Abteilung für Didaktik der Mathematik und Informatik
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Jena, Thüringen
Deutschland

ISBN 978-3-658-13894-3 ISBN 978-3-658-13895-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-13895-0

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Planung: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

Unter deutschen Jugendlichen ist Mathematik nur für wenige „cool“, T-Shirts mit Mathematik herabsetzenden Aufdrucken – wie „math sucks“ – finden offenbar viele Käufer, und in Filmen sieht man häufig in einer Gruppe von vier oder fünf Jugendlichen den Mathematik- und Naturwissenschafts-Nerd als Besserwisser mit Brille und zugeknöpftem Hemd.

Die Zeitschrift $\sqrt{\text{WURZEL}}$ setzt diesem Klischee seit fünfzig Jahren ein Bild der Mathematik entgegen, das die von ihr ausgehende Faszination wunderbar reflektiert und verstärkt. Durch unterhaltsame und doch anspruchsvolle Artikel über mathematische Probleme und sich um Mathematik rankende Geschichten erreicht die $\sqrt{\text{WURZEL}}$ Schülerinnen und Schüler ebenso wie Studierende.

Die $\sqrt{\text{WURZEL}}$ ist wie ein Lagerfeuer, das in der Ferne stehende, neugierige Interessenten anzieht und den um das Feuer Versammelten Gemeinschaft stiftet.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV) ist zusammen mit der GAMM die einschlägige Fachgesellschaft für Mathematik. Ihrer Satzung gemäß setzt sie sich für die Mathematik ein und für die Interessen derer, die Mathematik machen – und dies umfasst Menschen aller Alters- und Bildungsstufen. Die $\sqrt{\text{WURZEL}}$ und die DMV haben also gemeinsame Ziele, und die $\sqrt{\text{WURZEL}}$ ist aus Sicht der DMV eine wichtige und schöne Zeitschrift, die junge Menschen zur Mathematik führt und sie über Mathematik informiert und sich so für Mathematik einsetzt.

VI Geleitwort

Dieser schöne Sammelband reflektiert die spannende, unterhaltsame und lehrreiche Lektüre in der WURZEL-Rubrik „Der $\sqrt{\text{ABLEGER}}$ “. Dem Herausgeber Matthias Müller und dem Autorenteam danke ich herzlich dafür und stellvertretend für alle Mathematikerinnen und Mathematikern, die sich in den vergangenen Dekaden mit viel Herzblut für die $\sqrt{\text{WURZEL}}$ engagiert haben. Weiterhin danke ich dem Springer-Verlag und seinen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern für die Unterstützung bei der Erstellung dieses Bandes.

Prof. Dr. Volker Bach
DMV-Präsident, TU Braunschweig
Braunschweig, Deutschland

Inhaltsverzeichnis

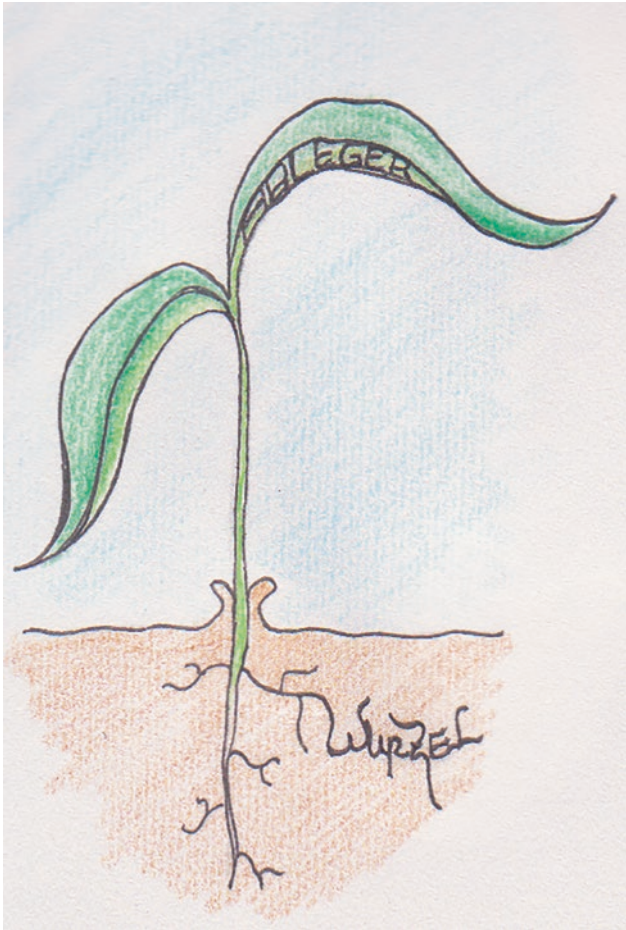
1	Einleitung	1
	<i>Matthias Müller</i>	
2	Achilles und die Schildkröte – Kann man unendlich oft anhalten, wenn man jemanden überholen will?	5
	<i>Matthias Müller</i>	
3	MineSweeper – Kann man mit der Analyse von Computerspielen Millionen verdienen?.	11
	<i>Matthias Müller</i>	
4	Turnierformen beim sportlichen Wettkampf	17
	<i>Matthias Müller</i>	
5	Eine kleine Übersicht zu weiteren Turnierformen	21
	<i>Tim Fritzsche</i>	
6	Hilbert und das unendliche Hotel – Wie schwierig ist eigentlich die Arbeit eines Hotelportiers?	27
	<i>Kinga Szücs</i>	
7	Punkt, Satz und Sieg – Oder doch nicht?	33
	<i>Matthias Müller</i>	

8	Origami: Regelmäßige Drei- und Sechsecke aus Papierstreifen.	39
	<i>Michael Schmitz</i>	
9	Jenseits der Abzählbarkeit.	49
	<i>Kinga Szücs</i>	
10	Aus Drei mach Vier – Vom Dreieck zum Tetraeder	55
	<i>Matthias Müller</i>	
11	Die Würfel sind gefallen, Davy Jones	61
	<i>Matthias Müller und Tim Fritzsche</i>	
12	Robin Hood und die Steuer bei Matrixspielen	67
	<i>Marlis Bärthel</i>	
13	Fußball – Das ist reine Glückssache?	77
	<i>Matthias Müller</i>	
14	Fußball und Mathematik – die Auswärtstor-Regel	85
	<i>Christian Hercher</i>	
15	Wann ist weniger mehr? Der optimale Winkel beim Kugelstoßen.	93
	<i>Matthias Müller</i>	
16	Über Tische und Bänke.	99
	<i>Matthias Müller</i>	
17	Nicht euklidische Geometrien: Wie viele Parallelen gibt es eigentlich zu einer Geraden?	109
	<i>Kinga Szücs</i>	
18	Das Nim-Spiel – Gewinnen gegen den Wirtschaftsminister.	117
	<i>Marlis Bärthel</i>	
19	Duell zu dritt.	127
	<i>Stefan Schwarz</i>	
20	Roulette – Der sicherste Weg zum Erfolg.	133
	<i>Stefan Schwarz</i>	
21	Eine Ergänzung zum Satz von Haga.	141
	<i>Michael Schmitz</i>	

1

Einleitung

Matthias Müller



M. Müller (✉)

Abteilung für Didaktik der Mathematik und Informatik,
FSU Jena, Jena, Deutschland

E-Mail: matthias.mueller.2@uni-jena.de

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

M. Müller (Hrsg.), *Überraschende Mathematische Kurzgeschichten*,
DOI 10.1007/978-3-658-13895-0_1

„Liebe Leser, obwohl es unser Ziel ist, eine Zeitschrift für Mathematik-Interessierte jeglichen Alters ≥ 15 herauszugeben, schleichen sich immer wieder Artikel ein, deren Niveau für Schüler zu hoch ist. Als Ausgleich dafür wollen wir an dieser Stelle eine neue Rubrik einführen. In ihr werden in Zukunft in loser Folge Artikel veröffentlicht, die vom Anspruch her besonders für Schüler geeignet sind.“

Mit diesen einleitenden Sätzen eröffnete der damalige Chefredakteur der Mathematikzeitschrift „Die $\sqrt{\text{WURZEL}}$ “ die neue Rubrik „Der $\sqrt{\text{ABLEGER}}$ “. In diesem kurzen Abschnitt sind Ziele, Inhalte und Anspruch der Reihe gut umrissen.

Um den Ansprüchen gerecht zu werden, werden die mathematischen Inhalte in den Artikeln mit kleinen Erzählungen verbunden, sodass „mathematische Kurzgeschichten“ entstehen. Dabei werden die Leser auf Streifzüge durch die Geschichte genauso mitgenommen, wie auch aktuelle ja alltägliche Problemstellungen diskutiert. Des Weiteren sind die Artikel mit Comic-Zeichnungen illustriert und werden durch zusätzliche Online-Materialien wie Bilder, Videos und Programme ergänzt. Dafür kann man den entsprechenden QR-Codes folgen. Die Reihe zeichnet sich dadurch aus, dass der Leser direkt angesprochen wird. Er wird aufgefordert, kleine Aufgaben selbstständig zu bearbeiten und wird eingeladen, sich mit der vorgestellten Problematik tiefergehend auseinanderzusetzen. In diesem Zusammenhang werden auch weitere Lesetipps gegeben.

Anlässlich des 50-jährigen Jubiläums der Mathematikzeitschrift „Die $\sqrt{\text{WURZEL}}$ “ wurde ein Sammelband mit 50 verschiedenen Artikeln aus den letzten 5 Dekaden zusammengestellt, die die gesamte Bandbreite der Zeitschrift verdeutlichen. Während der Arbeiten kristallisierte sich immer mehr heraus, dass es wertvoll ist, die einzelnen Beiträge der Jugendseite der $\sqrt{\text{WURZEL}}$ daher die Artikel-Rubrik „Der $\sqrt{\text{ABLEGER}}$ “ in einem eigenen Band zusammenzuführen. Eine vollständige Sammlung aller Ableger-Artikel stellt das vorliegende Buch dar. Dabei wurde dieses um korrespondierende Wurzel-Artikel und Kommentare ergänzt, um ein möglichst umfassendes Bild zu zeichnen. Beide Bücher stehen stellvertretend für die vielen guten Artikel, Aufgaben und Inhalte die über die vergangenen Jahre in der „ $\sqrt{\text{WURZEL}}$ “ erschienen sind.

Es sei vorweggenommen, dass die Mathematik in allen Artikel immer noch im Mittelpunkt steht und daher auf einige Formeln nicht verzichtet werden kann. All diese Abschnitte können mit dem Wissen aus dem Schulunterricht erschlossen werden und werden auch innerhalb der Artikel motiviert bzw. erklärt. Die Artikel wurden nach aufsteigendem Schwierigkeitsgrad geordnet, sodass ein differenziertes Lesen und evtl. „Lernen“ möglich wird. Es liegt in der Natur der Sache, dass die Artikel sich

unterscheiden, da sie von verschiedenen Autoren geschrieben wurden. Sie bieten somit zum einen verschiedene Zugänge zu den mathematischen Themen und verdeutlichen zum anderen die Vielseitigkeit der Mathematik. In der Unterschiedlichkeit liegt eine Stärke begründet, die den Bogen von dem pragmatischen Handeln in der alltäglichen Problemstellung bis hin zum logischen Beweisen innermathematischer Sachverhalte spannt.

Wie schon erwähnt, beinhalten die Artikel Aufgaben und Knocheleien, die den Leser zur Eigentätigkeit anregen sollen. Gemäß der Intention der Zeitschrift werden die Antworten und Lösungen nicht unmittelbar gegeben, damit jedem Leser eine wirkliche Chance gegeben wird, die Problemstellung selbst zu durchdenken. Nach Möglichkeit soll allerdings keine Frage unbeantwortet bleiben¹ und daher werden Lösungsideen und Erläuterungen online auf der Produktseite des Buches unter springer.com zur Verfügung gestellt.

Der Name der Rubrik „Der $\sqrt{\text{ABLEGER}}$ “ symbolisiert die enge Verbundenheit zur Mathematikzeitschrift „Die $\sqrt{\text{WURZEL}}$ “. Ohne die $\sqrt{\text{WURZEL}}$ gäbe es auch keinen $\sqrt{\text{ABLEGER}}$. Nicht zuletzt daher erinnern die obigen einleitenden Sätze auch an die ersten Sätze in der $\sqrt{\text{WURZEL}}$ von 1967:

„Liebe Leser!

Sie halten heute zum ersten Mal diese Zeitung in der Hand. Vielleicht werden Sie im weiteren zu unseren ständigen Lesern zählen und Freude daran finden, aufgeworfene Probleme zu lösen und selbst welche zu stellen.

Unser Anliegen, das wir mit dem Herausgeben dieser Zeitung verbinden, ist, das mathematische Klima an den Schulen weiter zu verbessern und Sie zur Beschäftigung mit der Mathematik anzuregen, beziehungsweise Sie beim Erarbeiten mathematischer Theorien zu unterstützen.

Nachdem wir 1964 im Stadtgebiet Jena begonnen hatten, durch die Gründung von Schülerzirkeln die außerunterrichtliche Beschäftigung der Schüler mit der Mathematik zu fördern, waren wir bestrebt, auch über den örtlichen Bereich hinaus wirksam zu werden. Ein Ausdruck dessen sind die seit 1965 für Schüler des gesamten Bezirkes Gera regelmäßig durchgeführten Mathematik-Spezialistenlager. Da die Zeitdauer und die Teilnehmerzahl dieser Lager beschränkt sind, wollen wir mit der Herausgabe dieser Zeitung eine kontinuierliche Anleitung für einen großen Interessentenkreis erreichen.

¹Die Formulierung ist aus mathematischer Sicht interessant, da es durchaus mathematische Fragestellungen gibt, die „unentscheidbar“ und damit nicht zu beantworten sind. Das Spannende ist, dass die Existenz solcher unentscheidbaren Probleme mathematisch bewiesen werden kann (vgl. Gödelsche Unvollständigkeitssätze). Die in diesem Band gestellten Fragen sollten allerdings nicht dazu gehören. ©

Vielleicht werden Sie, liebe Leser, sogar so viel Freude an der Mathematik gewinnen, dass Sie sich entschließen, sich später weiter dieser schönen Wissenschaft zu widmen.

Wir werden regelmäßig kleine Gebiete der Mathematik abhandeln. Es soll Ihnen dadurch ermöglicht werden, die eine oder andere Aufgabe besonders geschickt zu lösen, aber es soll auch dazu dienen, Ihnen einen größeren Überblick über die verschiedenen Gebiete der Mathematik und ihrer Anwendungsbereiche zu geben.“

Auch heute ist es das Anliegen der Zeitschrift und des Vereins, ein möglichst großes Publikum mit der Begeisterung für die Mathematik anzustecken, sowie insbesondere mathematisch interessierte Jugendliche zu fördern und damit die Kreativität zum Problemlösen zu wecken.

Aus diesem Grund findet nach wie vor zweimal jährlich ein „Spezialistenlager“ statt, auch wenn es jetzt „Schülerakademie Mathematik (SAM)“ oder einfach MaLa heißt. Die steigende Zahl von Anmeldungen zeigt, dass ein sehr großer Bedarf an solchen Angeboten besteht. Gäste und Gastvortragende, die zu den Veranstaltungen eingeladen werden, berichten immer wieder von einer inspirierenden Arbeitsatmosphäre.

Die Zeitschrift richtet sich seit über 300 Ausgaben an Schüler und Lehrer der gymnasialen Oberstufe, an Studenten, Professoren und alle mathematisch Interessierten. Die $\sqrt{\text{WURZEL}}$ enthält Artikel zu verschiedensten Teilgebieten der Mathematik, zu Olympiaden und mathematischen Wettbewerben sowie z. B. Arbeiten aus dem Wettbewerb „Jugend forscht“. Dabei erhebt Die $\sqrt{\text{WURZEL}}$ übrigens gar nicht den Anspruch, eine mathematische Forschungszeitschrift zu sein, da es eben in erster Linie um den Spaß und die Begeisterung für die Mathematik geht.

Matthias Müller (Hrsg.)

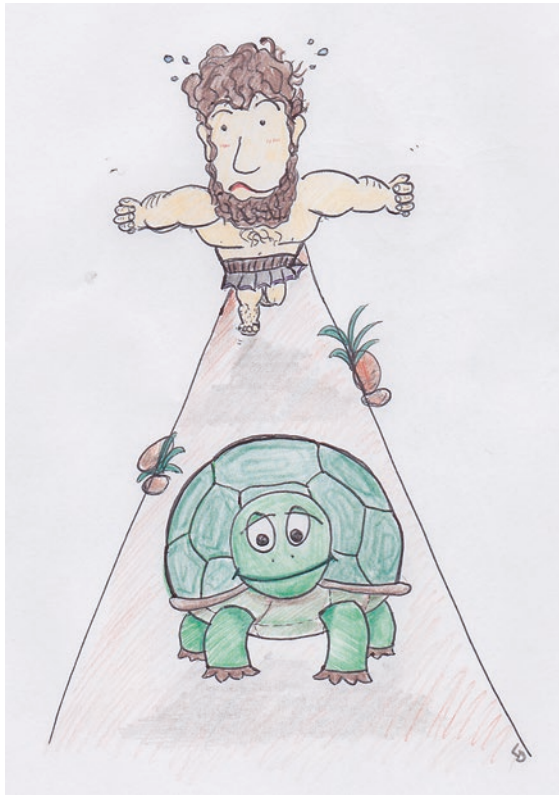
QR-CODE: SPRINGER



2

Achilles und die Schildkröte – Kann man unendlich oft anhalten, wenn man jemanden überholen will?

Matthias Müller



M. Müller (✉)

Abteilung für Didaktik der Mathematik und Informatik,

FSU Jena, Jena, Deutschland

E-Mail: matthias.mueller.2@uni-jena.de

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

M. Müller (Hrsg.), *Überraschende Mathematische Kurzgeschichten*,

DOI 10.1007/978-3-658-13895-0_2

Der tapfere Achilles ist einer der größten Helden der griechischen Mythologie. Er ist ein wichtiger Hauptcharakter in Homers Ilias, die von der Belagerung der Stadt Troja durch die Griechen berichtet.

Der Film „Troja“ von Roland Emmerich hält sich nur in wenigen Teilen streng an die Vorlage von Homer, aber es gibt eine Szene, die im Film gut dargestellt wird. Achilles spricht in dieser Szene mit seiner Mutter und fragt sie, ob er nach Troja in den Krieg ziehen soll. Die Mutter antwortet ihm, dass, wenn Achilles in Griechenland bleibt, er eine Familie gründen und ein langes Leben führen, Kinder und Enkelkinder haben wird und diese sich seiner erinnern werden, wenn er tot ist. Aber wenn die letzten Enkel gestorben sind, wird niemand mehr seinen Namen kennen. Wenn Achilles nach Troja geht, sagt die Mutter, dann wird er ewigen Ruhm erlangen und noch in Tausenden von Jahren wird man seine Heldentaten besingen, aber er wird vor Troja fallen.

Achilles wird schließlich vom schlaunen Odysseus überredet in den Krieg zu ziehen, denn Odysseus weiß, was Achilles Schwäche ist, nämlich sein Stolz. Genau dieser Stolz hatte Achilles einst in eine vertrackte Situation gebracht.

Diese Geschichte wird vom alten griechischen Philosophen Zenon von Elea erzählt: Achilles wurde einmal von einer Schildkröte zum Wettrennen herausgefordert und da Achilles die Herausforderung nicht ausschlagen konnte, aber die Schildkröte nicht ernst nahm, sagte er dem Wettkampf zu und gab der Schildkröte einen gewaltigen Vorsprung.

Nun berichtet Zenon von dem Rennen auf die folgende Art und Weise: Achilles und die Schildkröte laufen los. Achilles ist viel schneller als die Schildkröte und erreicht den Startpunkt der Schildkröte nach einer gewissen Zeit. Die Schildkröte hat aber in dieser Zeit auch eine gewisse Strecke zurückgelegt. Achilles hat die Schildkröte also noch nicht erreicht, deswegen läuft er weiter. Als er die Strecke überwunden hat, die die Schildkröte gerade zurückgelegt hatte, ist diese wieder ein Stück voran gekommen und er hat sie immer noch nicht erreicht.

A1

A2

A3

A4

S1

S2

S3

S4

A ... Standort des Achilles zu einem gewissen Zeitpunkt

S ... Standort der Schildkröte zu einem gewissen Zeitpunkt

So geht das noch eine ganze Weile weiter und Achilles kommt der Schildkröte immer näher, aber erreicht sie nie.

Das ist eine paradoxe Situation: Wir wissen doch, dass Achilles die Schildkröte locker überholen müsste, doch wenn wir die obige Sichtweise verwenden, dürfte Achilles die Schildkröte nie erreichen. **Wo ist da der Fehler? Oder gibt es da überhaupt einen Fehler?**

Dieses Problem war für die alten Griechen eine knifflige Angelegenheit und deswegen wurde es auch als das Zenon-Paradoxon bezeichnet. Einige Mathematikhistoriker meinen, dass die Mathematik der Griechen an dieser Stelle an ihre Grenzen gestoßen ist. Erst die Mathematiker im 16. und 17. Jahrhundert konnten dieses Problem auflösen.



Allerdings hatte der große Archimedes von Syrakus von einer Summe berichtet, die er ausrechnen konnte. Die Summe, die er meinte, sieht wie folgt aus:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots$$

Dabei handelt es sich um eine Summe mit unendlich vielen Summanden, deren Ergebnis Archimedes trotzdem ermitteln konnte. Wie hat er das gemacht?

Er führt folgende Begründung an. Mehr als 2 kann die Summe nicht sein, denn wenn ich endlich viele Teile dieser Summe addiere, ist die Summe immer kleiner als 2. Auch wenn ich alle unendlich vielen Summanden aufaddiere, ist diese Summe nicht größer als 2, denn der nachfolgende Summand eines beliebigen Summanden ist immer nur halb so groß wie sein Vorgänger. Aber weniger als 2 kann diese Summe S auch nicht sein. Für jede natürliche Zahl n gilt nämlich

$$2 - S < 2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}$$

also $2 - S < \frac{1}{2^n}$ bzw. $S > 2 - \frac{1}{2^n}$.

Damit kann die Summe nicht mehr und nicht weniger als 2 sein. Das bedeutet:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \cdots = 2$$

Siehst du die Verbindung zwischen dem Wettrennen des Achilles und der Summe des Archimedes? Überholt Achilles die Schildkröte und wenn ja, an welchem Punkt wird das sein?

Ob das die Grenze der griechischen Mathematik darstellt, bleibt offen. Allerdings haben die Griechen sich mit dieser Art von Problemen schwer getan, was daran liegen kann, dass sie stetig bemüht waren, den Begriff der Unendlichkeit in mathematischer Sicht zu vermeiden.

Auch die oben schon erwähnten Mathematiker des 16./17. Jahrhunderts haben sich mit dieser Summe beschäftigt. Dabei hat der deutsche Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz den folgenden Beweis vorgelegt:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \cdots$$

$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

$$S = 2S - S = 2 + 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \cdots = 2$$

Das scheint ein eleganter Beweis dafür zu sein, dass diese Summe gleich 2 ist. Doch Leibniz ist einfach von einer bestimmten Voraussetzung ausgegangen. **Findest du die Schwäche in der Argumentation von Leibniz?**

Du kannst diesen Beweis ja einmal für die Summe der Potenzen der Zahl 2 (das sind die Reziproken der Summanden der oberen Summe) ausprobieren, dann bekommst du vielleicht eine Idee, wo das Problem liegen könnte.

Für diese eben angestellten Überlegungen und Probleme wie das Zenon-Paradoxon muss man sich genauer mit dem Begriff der Unendlichkeit im