SVEN BODO WIRSING

MAXIMAL NILPOTENTE TEILSTRUKTUREN

Eine Korrespondenz in auflösbaren Algebren.
Mit 187 Übungsaufgaben

II

disserta Verlag

Wirsing, Sven Bodo: Maximal nilpotente Teilstrukturen II: Eine Korrespondenz in auflösbaren Algebren. Mit 187 Übungsaufgaben. Hamburg, disserta Verlag, 2015

Buch-ISBN: 978-3-95935-186-7
PDF-eBook-ISBN: 978-3-95935-187-4
Druck/Herstellung: disserta Verlag, Hamburg, 2015

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Hermannstal 119k, 22119 Hamburg
http://www.disserta-verlag.de, Hamburg 2015
Printed in Germany

Für meinen Doktorvater

Prof. Dr. Hartmut Laue

Ob Analysis oder Algebra,
seine Vorlesungen sind stets wunderbar.
Als Student das algebraische Feuer von ihm entzündet,
ist es in diesem Buch über Nilpotenz gemündet?

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **7**

1 Standard-Beispiele und Symbole **13**

2 Radikal-Algebren und der Satz von Du **21**
2.1 Radikal-Algebren und Zentralreihen 21
2.2 Resultate von Stephen Arthur Jennings, Hartmut Laue und Xiankun Du 23
2.3 Standard-Beispiele 26
2.3.1 Dreiecksmatrizen 26
2.3.2 Solomon-Algebren in Charakteristik Null 27
2.3.3 Solomon-Tits-Algebren 27
2.4 Offene Fragen und Übungsaufgaben 31

3 Auflösbarkeit **37**
3.1 Assoziative und Lie-Auflösbarkeit 37
3.2 Assoziative und Auflösbarkeit der Einheitengruppe 41
3.3 Der Satz von Sophus Lie und Borel-Teilalgebren 43
3.4 Standardbeispiele 46
3.4.1 Auflösbarkeit und Gruppenalgebren 46
3.4.2 Dreiecksmatrizen 47
3.4.3 Solomon-Algebren in Charakteristik Null 47
3.4.4 Solomon-Tits-Algebren 47
3.5 Offene Fragen und Übungsaufgaben 54

4 Carter-Untergruppen der Einheitengruppe einer auflösbaren assoziativen Algebra **59**
4.1 Das Pendant in der Lie-Algebra 59
4.2 Die Ermittlung der Carter-Untergruppen durch Torsten Bauer 60
4.3 Zusammenhänge bei endlichen Körpern 64
4.4 Standardbeispiele 66
4.4.1 Gruppenalgebren 66
4.4.2 Dreiecksmatrizen 69
4.4.3 Solomon-Algebren in Charakteristik Null 70

4.4.4 Solomon-Tits-Algebren 70
4.5 Offene Fragen und Übungsaufgaben 73

5 Die Fitting-Untergruppe der Einheitengruppe einer auflösbaren assoziativen Algebra 77
5.1 Das Pendant in der Lie-Algebra 77
5.2 Die Fitting-Untergruppe 77
5.3 Standard-Beispiele 79
5.3.1 Dreiecksmatrizen 79
5.3.2 Solomon-Algebren in Charakteristik Null 79
5.3.3 Solomon-Tits-Algebren 80
5.3.4 Gruppenalgebren 80
5.4 Offene Fragen und Übungsaufgaben 83

6 Maximale Nilpotenz in Lie-Algebren assoziiert zu auflösbaren assoziativen Algebren 85
6.1 Assoziative Abgeschlossenheit 85
6.2 Mehrfach-Zentralisatoren 89
6.3 Futile Algebren 102
6.4 Endlichkeit der Isomorphietypen 109
6.5 Mächtigkeitsbeziehungen 111
6.6 Beispiele 115
6.7 Zusammenfassung 117
6.8 Offene Fragen und Übungsaufgaben 118

7 Eine Korrespondenz zwischen maximal nilpotenten Untergruppen und Lie-Teilalgebren 123
7.1 Der Korrespondenz-Satz 123
7.2 Offene Fragen und Übungsaufgaben 127

8 Maximale Nilpotenz in Einheitengruppen auflösbarer assoziativer Algebren 129
8.1 Eine direkte Zerlegung 129
8.2 Mehrfach-Zentralisatoren 130
8.3 Endlichkeit der Isomorphietypen 139
8.4 Mächtigkeitsbeziehungen 140
8.5 Beispiele 144
8.6 Zusammenfassung 146
8.7 Offene Fragen und Übungsaufgaben 147

9 Fischer-Untergruppen, Projektoren und Injektoren 151
9.1 Fischer-Untergruppen 151
9.2 Das Pendant auf der Lie-Seite: die Fischer-Teilalgebren 152
9.3 Nilpotente Projektoren 153

9.4 Das Pendant auf der Lie-Seite: nilpotente Lie-Projektoren . . 154
9.5 Nilpotente Injektoren 155
9.6 Das Pendant auf der Lie-Seite: nilpotenten Lie-Injektoren . . 156
9.7 Offene Fragen und Übungsaufgaben 159

10 Ausblick auf Band III **161**

Tabellenverzeichnis **163**

Abbildungsverzeichnis **165**

Literaturverzeichnis **165**

Index **171**

Eine Korrespondenz zwischen Substrukturen

Vertauschend vom Komplement zum Radikal
und erhöht wieder zurück,
entweichen sie dem Substrukturen-Tal
und stagnieren zum Glück
schon beim zweiten Mal.

Eingebettet von den Extremen,
den Cartan-Teilalgebren und dem Nilradikal,
versuchen wir sie zu zähmen
in endlicher Isomomorphien-Zahl:
sie haben keine Wahl.

In der Korrespondenz zu den Gruppen,
die maximal nilpotenten Untergruppen sich entpuppen.
1:1 im Hin und Her
Einheiten und Erzeugen vertragen sich gar sehr:
ein Zweiklang wie ein Paar im Meer.

Fitting-Untergruppe und Carter-Untergruppen gliedern sich ein,
die extremen maximal nilpotenten Untergruppen zu sein.
Die Klasse der Nilpotenz, die beschreibt der Satz von Du,
die Partner haben diegleiche, das folgt wie im Nu.
Dieses Kapitel ist noch lange nicht zu.

Dies alles in Algebren ist dar,
und auflösbar müssen sie sein,
wo die maximale Nilpotenz wir untersuchen ganz fein,
ist das nicht wunderbar?
Ist alles klar?

(Sven Wirsing, im August 2015)

Einleitung

In Band I dieser Serie wurden zwei Hauptthemen bearbeitet: zum einen die Ermittlung der Cartan-Teilalgebren und zum anderen die des Nilradikals der assoziierten Lie-Algebra A° einer endlich-dimensionalen assoziativen unitären Algebra A. Beide Lie-Teilstrukturen gehören zu den maximal nilpotenten Lie-Teilalgebren von A°. Ist die Radikalfaktorstruktur separabel, so gibt es nach dem Satz von Wedderburn-Malcev ein Radikalkomplement T des Radikals $rad(A)$ von A. Mit Hilfe des Radikalkomplementes konnten wir in Band I in vielen Algebrenklassen die Cartan-Teilalgebren und auch das Nilradikal von A° beschreiben. Speziell im auflösbaren Fall von A (d.h., wenn die Faktoralgebra $A/rad(A)$ und die Teilalgebra T kommutativ sind) haben wir eingesehen, dass die Zentralisatoren der Radikalkomplemente – also $C_A(T)$ – die Cartan-Teilalgebren von A° sind. Dieses Ergebnis wurde orginär von Thorsten Bauer in seiner Dissertation [4] bewiesen. Insbesondere sind die Cartan-Teilalgebren wieder assoziative Teilalgebren. Mit Hilfe des Satzes von Wedderburn-Malcev folgt daraus weiter, dass alle Cartan-Teilalgebren unter der Gruppe $1 + rad(A)$ konjugiert sind. Betrachten wir weiter den zentralen Anteil von T – also $Z(A) \cap T$ – so haben wir in Band I zudem bewiesen, dass erstens $Z(A) \cap T$ das Radikalkomplement des Zentrums von A ist und zweitens die direkte Summe von $rad(A)$ und $Z(A) \cap T$ das Nilradikal von A° ergibt.

Der vorliegende Band II führt diese Theorie im auflösbaren Fall von A weiter fort. Die folgenden Leitfragen bilden die Grundlage der Analysen in diesem Buch:

· Wie können im auflösbaren Fall von A **sämtliche** maximal nilpotente Lie-Teilalgebren von A° beschrieben und konstruiert werden?

· Welche besondere Stellung haben das Nilradikal und die Cartan-Teilalgebren unter diesen?

· Was sind die Carter-Untergruppen und was ist die Fitting-Untergruppe der Einheitengruppe $E(A)$ im auflösbaren Fall von A?

· Wie können im auflösbaren Fall von A **sämtliche** maximal nilpotente Untergruppen von $E(A)$ beschrieben und konstruiert werden?

- Welche besondere Stellung haben die Fitting-Untergruppe und die Carter-Untergruppen unter diesen?
- Gibt es strukturelle Beziehungen zwischen den maximal nilpotenten Lie-Teilalgebren und Untergruppen?

In Kapitel 1 stellen wir kurz eine Übersicht der verwendeten Strukturen (wie z.B. KG für die Gruppenalgebra) zusammen. Mit diesen werden wir einerseits die Ergebnisse illustrieren, andererseits dienen sie als Beispielmaterial für die zahlreichen Übungsaufgaben zu jedem Kapitel, in denen der Leser das Erlernte anwenden möge.

Zur Beantwortung der Frage, ob es strukturelle Beziehungen zwischen maximal nilpotenten Untergruppen und Lie-Teilalgebren gibt, werden wir die Hauptaussage des zweiten Kapitels immer wieder in diesem Werk nutzen. Dabei handelt es sich um den Satz von Xiankun Du von 1992, der für Radikalalgebren zeigt, dass die aufsteigenden Zentralreihen der assoziierten Lie-Algebra und der quasiregulären Gruppe – eine Verallgemeinerung der Einheitengruppe – in jedem Schritt übereinstimmen. Insbesondere bedeutet dies, dass die Nilpotenzklassen dieser beiden Struturen übereinstimmen, eine Aussage, die Stephen Arthur Jennings bereits fast 40 Jahre zuvor vermutet hatte und die von Hartmut Laue in den 80iger Jahren teilweise bewiesen worden war. Es ist oft bequemer, die Nilpotenzklasse der Lie-Algebra und nicht die der quasiregulären Gruppe zu berechnen. Zum Beispiel sind Radikale assoziativer Algebren Radikalalgebren. In unserem Kontext werden wir dieses Resultat benutzen, um Beziehungen bzgl. den Nilpotenzklassen maximal nilpotenter Lie-Teilalgebren und Untergruppen herzuleiten. Exkursartig zeigen wir am Ende von Kapitel 2 noch eine weitere Anwendung des Satzes von Xiankun Du. Betrachtet man die aufsteigende Zentralreihe der quasiregulären Gruppe einer Radikalalgebra und dabei sukzessive die Faktorgruppen, dann sind diese per Definition der Zentralreihe abelsche Gruppen. Im Falle einer Radikal-Algebra über einem Körper der Charakteristik p lässt sich mit Hilfe des Satzes von Xiankun Du sogar einsehen, dass diese sukzessiv gebildeten Faktorgruppen sogar elementar-p-abelsch sind. Auf die Gruppenalgebra – für die Adalbert Bovdi dieses Resultat veröffentlich hat – möge der Leser dieses Ergebnis in den Übungsaufgaben zu Kapitel 2 anwenden und erleben.

Wie wir weiter oben beschrieben haben, möchten wir unsere Leitfragen in diesem Werk für auflösbare Algebren beantworten. Innerhalb der Leitfragen sind besonders die strukturellen Beziehungen zwischen assoziativer, assoziierter Lie- und der abgeleiteten Gruppenstruktur in Form der Einheitengruppe von Bedeutung. Bereits bei dem Begriff der Auflösbarkeit selbst ist dieses Phänomen zu beobachten. Wir werden in Kapitel 3 nämlich einsehen, dass der Begriff der Auflösbarkeit für die assoziative Algebra, ihrer assoziierten Lie-Algebra und ihrer Einheitengruppe für endlich-dimensionale assoziative unitäre Algebren (für einen Körper mit mindestens 5 Elementen, in dem $1+1 \neq 0$ gilt) äquivalent ist. Dieses Ergebnis gibt durchaus einen Anstoß dazu, dass es unter diesen Bedingungen noch weitere Beziehungen zwischen diesen Strukturen gibt, und es stellt quasi auch den Grund dafür dar, dass die oben geschilderten Leitfragen im Falle der Auflösbarkeit untersucht werden. Einen ersten Zusammenhang schildern wir bereits noch exkursartig zum Abschluss von Kapitel 3. Dort werden wir einsehen, dass die sog. Borel-Teilalgebren von A° – dies sind die maximal auflösbaren Lie-Teilalgebren – für Körper der Charakteristik Null wieder assoziative unitale Teilalgebren von A sind. Dabei werden uns der Satz von Sophus Lie und ein Ergebnis von Hartmut Laue zum assoziativen Erzeugnis den Beweis liefern. Leider können wir nicht herleiten, dass die zugehörige Einheitengruppe dieser assoziativen unitalen Teilalgebren auch maximal auflösbar – also Borel-Untergruppen – sind. Es gilt aber zumindest die Aussage, dass die Einheitengruppe wieder auflösbar ist und aus jeder Borel-Teilalgebra eine neue Einheitengruppe entsteht. Der Grund dafür ist, dass das K-Erzeugnis der Einheitengruppe die ganze Algebra ist. Dieses Vorgehen – Einheitengruppen- und K-Erzeugnis-Bildung – werden wir im weiteren Verlauf dieses Werkes oftmals anwenden.

Thorsten Bauer hat bereits in seiner Dissertation [4] eine der obigen Leitfragen geklärt, nämlich die Bestimmung der Carter-Untergruppen der Einheitengruppe einer assoziativen auflösbaren Algebra mit separabler Radikalfaktorstruktur. Er zeigt dort das sehr runde Resultat, dass die Carter-Untergruppen (für Körper mit mindestens drei Elementen) genau die Einheitengruppen der Cartan-Teilalgebren der assoziierten Lie-Algebra sind. Die Voraussetzung über den Körper ist deshalb wichtig, da mit dieser die Algebra von ihrer Einheitengruppe K-erzeugt wird. Dementsprechend könnte man deshalb auch so formulieren, dass das K-Erzeugnis der Carter-Untergruppen genau die Cartan-Teilalgebren sind. Schon an dieser Stelle zeigt sich wiederum das Zusammenspiel von Einheitengruppen- und K-Erzeugnis-Bildung. In dem Artikel [5] von Thorsten Bauer und Salvatore Siciliano zu dieser Thematik, verwenden die Autoren ein Resultat, das wir auch im Laufe der Arbeit benutzen werden. Sie zeigen, dass das K-Erzeugnis einer nilpotenten Untergruppe wieder Lie-nilpotent ist.

Das Phänomen des Zusammenspiels von Cartan-Teilalgebren und Carter-Untergruppen zeigt sich auch beim Nilradikal und der Fitting-Untergruppen. Wir werden in Kapitel 5 herleiten, dass diese beiden Strukturen auch über die Einheitengruppen- und K-Erzeugnis-Bildung eindeutig zusammenhängen. Dabei ist das oben erwähnte Resultat von Thorsten Bauer und Salvatore Siciliano von großer Bedeutung.

In den bisherigen Kapiteln haben wir uns mit prominenten Beispielen zu maximal nilpotenten Teilstrukturen beschäftigt. Wir lösen uns nun von dieser speziellen Sichtweise und beschreiben sowie konstruieren in Kapitel 6 alle maximal nilpotenten Lie-Teilalgebren. Wir zeigen zunächst – in Analogie zu den Borel-Teilalgebren (aber mit gänzlich anderer Begründung) – , dass diese Lie-Teilalgebren wieder assoziative unitale Teilalgebren sind. Das ermöglicht es uns, eine der Aussagen von Band I anzuwenden: die innere Struktur dieser assoziativen Teilalgebren M von A ist die innere direkte Summe ihres Radikals (das wegen der Auflösbarkeit in $rad(A)$ liegt) und des eindeutig bestimmten zentralen Radikalkomplements bestehend aus vollseparablen Elementen – etwa $M = rad(M) \oplus VSEP(M)$ –. Wegen des Satzes von Wedderburn-Malcev liegt $VSEP(M)$ in einem Radikalkomplement T. Wir zeigen anschliessend, dass derartige direkte Summen genau dann maximal Lie-nilpotent sind, wenn die Zentralisator-Bedingungen $C_{rad(A)}(VSEP(M)) = rad(M)$ und $C_T(rad(M)) = VSEP(M)$ gelten. Eine leichte Folgerung hieraus ist, dass maximal nilpotente Lie-Teilalgebren die Doppel-Zentralisator-Bedingungen $C_{rad(A)}(C_T(rad(M))) = rad(M)$ und $C_T(C_{rad(A)}(VSEP(M))) = VSEP(M)$ erfüllen. Um nun sämtliche maximal Lie-nilpotente Teilalgebren zu ermitteln, nutzen wir diese Eigenschaft aus bzw. nehmen sie zum Anlass, wie folgt vorzugehen: Wir starten mit einer unitalen Teilalgebra C von T, ermitteln damit den Doppelzentralisator $C_T(C_{rad(A)}(C))$. Auf diesen wenden wir erneut das Doppel-Zentralisieren an usw. Aufgrund der endlichen Dimension muss diese Bildung stagnieren. Es zeigt sich, dass für die so entstehende Teilalgebra $\hat{C}$ in T die direkte Summe $\hat{C} \oplus C_{rad(A)}(\hat{C})$ maximal Lie-nilpotent ist. Auch die duale Bildung – beginnend mit einer Teilalgebra von $rad(A)$ – führt so zu maximal Lie-nilpotenten Teilalgebren, aber nicht zu weiteren. Es stellt sich sofort die Frage, wann für eine unitale Teilalgebra das Doppel-Zentralisieren stagniert. Die Antwort ist ganz schlicht: nach dem ersten Bilden. Das bedeutet, dass wir auf den unitalen Teilalgebren-Verband von T einmal das Doppel-Zentralisieren anwenden müssen, um anschlissend mit obiger direkter Summen-Bildung sämtliche maximal nilpotenten Lie-Teilalgebren zu erhalten. Dabei erweisen sich das Nilradikal und die Cartan-Teilalgebren als extrem. Beim Nilradikal ist der Anteil von T zentral in A, bei den Cartan-Teilalgebren ist es das ganze Radikalkomplement. Bei allen anderen ist der Anteil zwischen diesen beiden Extremstellen gelegen. Beim Übergang zu einem weiteren Radikalkomplement entstehen (wegen des Satzes von Wedderburn-Malcev) durch unser Verfahren nur isomorphe Kopien. Das bedeutet aber, dass wir die Isomorphietypen maximal Lie-nilpotenter Teilalgebren mit Hilfe der Anzahl der unitalen Teilalgebren von T abschätzen können. Diese Anzahl ist endlich, da T separabel und kommutativ ist. Derartige Algebren heissen futil. Dies leiten wir in einem eigenen Abschnitt in diesem Kapitel her, und wir zeigen zudem, dass wir diese Anzahl durch die Bell-Zahl $B(dim_K(T))$ abschätzen können.

In Kapitel 7 stellen wir den Zusammenhang zwischen maximal nilpotenten

Lie-Teilalgebren und Untergruppen her. Dabei zeigt sich, dass der Zusammenhang – wie bei den Cartan-Teilalgebren und den Carter-Untergruppen bzw. wie der beim Nilradikal und bei der Fitting-Untergruppe – bei beliebigen maximal nilpotenten Substrukturen wiederfindet: Die Einheitengruppe einer maximal Lie-nilpotenten Teilalgebra ist eine maximal nilpotente Untergruppe und das K-Erzeugnis einer maximal nilpotenten Untergruppe ist eine maximal nilpotente Lie-Teilalgebra. Dieser Zusammenhang ist sogar bijektiv: Die Abbildungen $E(\cdot)$ und $\langle\cdot\rangle_K$ sind invers zueinander. Mit Hilfe des Satzes von Xiankun Du gilt zudem, dass die Nilpotenzklassen der maximal nilpotenten korrespondierenden Partner identisch sind. Dieser Hauptsatz ermöglicht es uns, die Aussagen von Kapitel 6 auf maximal nilpotente Untergruppen zu übertragen, was der Inhalt von Kapitel 8 ist.

Dort beschreiben wir demnach analog zu Kapitel 6

· die innere Struktur der maximal nilpotenten Untergruppen als direktes Produkt unipotenter und zentraler, vollseparabler Elemente,

· die Kennzeichnung maximal nilpotenter Untergruppen mittels Einfach- und Doppelzentralistorbildung,

· die Ermittlung sämtlicher maximal nilpotenter Untergruppen durch die Anwendung des Doppel-Zentraliserens auf den Untergruppenverband von $E(T)$,

· die duale Ermittlung sämtlicher maximal nilpotenter Untergruppen durch die Anwendung des Doppel-Zentraliserens auf den Untergruppenverband von $1 + rad(A)$,

· die Extremstellung der Carter-Untergruppen und der Fitting-Untergruppe unter allen maximal nilpotenten Untergruppen von $E(A)$,

· das Verhalten beim Wechsel zu einem neuen Radikalkomplement und

· die Endlichkeit der Anzahl der Isomorphieklassen maximal nilpotenter Untergruppen, die wir durch dieselbe Bell-Zahl abschätzen.

Im letzten Kapitel beschäftigen wir uns mit weiteren prominenten maximal nilpotenten Untergruppen, nämlich den sog. nilpotenten Injektoren, nilpotenten Projektoren und den Fischer-Untergruppen. Wir sehen ein, dass diese mit den Carter-Untergruppen bzw. der Fitting-Untergruppe zusammenfallen. Schliesslich übertragen wir diese Begriffswelt auf die Lie-Seite (nilpotente Lie-Injektoren, nilpotente Lie-Projektoren und Fischer-Teilalgebren) und beweisen, dass diese mit den Cartan-Teilalgebren und dem Nilradikal übereinstimmen. Postum ergibt sich dadurch auch das Ergebnis, dass die Einheitengruppe der Fischer-Teilalgebra, der nilpotenten Lie-Projektoren und -Injektoren genau die Fischer-Untergruppen und nilpotenten Projektoren und Injektoren sind.

Wie oben erwähnt, illustrieren wir die Ergebnisse mit unseren Standard-Beispielen. Dabei verwenden wir die Gruppenalgebra, die unteren und oberen Dreiecksmatrizen, die Solomon-Algebra und die Solomon-Tits-Algebra im Haupttext, diese und die anderen Konstruktionen für die Übungsaufgaben. Der Leser wird sehen, dass wir in den ersten Kapiteln die Beispiele sehr allgemein halten, in den letzten 4 Kapitel allerdings nur noch exemplarisch vorgehen. Der Grund dafür ist der, dass die Klassifizierung der maximal nilpotenten Teilalgebren für die oben genannten vier Algebrenklassen weitere theoretische Überlegungen verlangt. Um den Leser nicht zu weit von den Leitfragen zu entfernen, hat sich der Autor entschlossen, diese in einem dritten Band darzustellen, was den Ausblick am Ende des Buches rechtfertigt.

Am Ende jedes Kapitel finden sich zahlreiche Übungsaufgaben. Diese Aufgaben dienen dem Leser als weitere Vertiefung in die geschilderten Thematiken. Zu Beginn jeder Übungsaufgaben-Serie befinden sich zudem offene Fragestellungen, die dem Leser (aber auch dem Autor) als Basis für weitere Forschungen in diesem Bereich dienen können. Zahlreiche Graphiken verdeutlichen dem Leser zudem die erlangten Ergebnisse in diesem Buch.

Übungsaufgabe 1 *Wie werden die Leitfaden in diesem Werk beantwortet?*

Kapitel 1

Standard-Beispiele und Symbole

Dieses Kapitel hat einleitenden Charakter und stellt die in diesem Buch verwendeten assoziativen Algebren, Monoide und Gruppen systematisch zusammen. Sie dienen im weiteren Verlauf dieses Buches zur Illustration der erlangten Erkenntnisse allgemeinerer Natur und sollen dem Leser diese Ergebnisse und ihre Anwendung auf konkrete Algebren verdeutlichen. Einige Anwendungen werden auch in die zahlreichen Übungsaufgaben verlagert. Des Weiteren stellen wir die benutzten Symbole übersichtsartig zusammen.

Mengen und Zahlen

Seien A, B, T Mengen und $i, n, k \in \mathbb{N}_0$. Folgende mengen- und zahlentheoretischen Symbole nutzen wir:

· $\emptyset$ - die leere Menge

· $A \cap B$ - Durchschnitt der Mengen A, B

· $A \cup B$ - Vereinigung der Mengen A, B

· $A \setminus B$ - Differenz der Mengen A, B

· $A \times B$ - kartesisches Produkt von A, B

· $P(A)$ - Potenzmenge von A

· $\underline{n}$ - die ersten n Zahlen

· $\underline{n}_0$ - die ersten n Zahlen mit Null

· $p(n)$ - Partitionenzahl von n

· $n!$ - Fakultät von n

· $\mid A \mid$ - Element-Anzahl der Menge A

· $S(n,k)$ - k-te Stirling-Zahl zu n

· $B(n)$ - n-te Bell-Zahl

· $\binom{n}{k}$ - n über k

· $\binom{T}{i}$ - i-elementige Teilmengen der Menge T

· $\equiv$ - äquivalent

· $\mod$ - modulo

Gruppen und Monoide

Seien $p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$, N eine Menge, M ein Monoid, G eine Gruppe, N ein Normalteiler von G, $a, b \in G$, $U, V \leq G$, A eine assoziative unitäre K-Algebra, $c \in K$ und q eine Primzahlpotenz. Folgende Gruppen, Monoide und Symbole hierzu verwenden wir:

· $\mathbb{N}$ - natürliche Zahlen

· $\mathbb{N}_0$ - natürliche Zahlen und Null

· D_{2n} - Diedergruppe der Ordnung $2n$

· Q_{4n} - Quaternionengruppe der Ordnung $4n$

· SD_{2^n} - Semi-Diedergruppe der Ordnung 2^n

· S_n - symmetrische Gruppe vom Grad n

· A_n - alternierende Gruppe vom Grad n

· $GL(n,q)$ - generelle lineare Gruppe vom Grad n über $GF(q)$

· C_n oder auch Z_n - zyklische Gruppe der Ordnung n

· $E(A)$ - Einheitengruppe von A

· $Q(A)$ - quasireguläre Gruppe von A

· $\times$ - direktes Produkt von Gruppen

· $\wr$ - reguläres Kranzprodukt von Gruppen

· $\ltimes$ - semidirektes Produkt von Gruppen.

· $st(G)$ - auflösbare Stufe von G

· $cl(G)$ - Nilpotenzklasse von G

· $Z_n(G)$ - das n-te Glied der aufsteigenden Zentralreihe von G

· $G^{(n)}$ - das n-te Glied der absteigenden Zentralreihe von G

· $\gamma_n(G)$, $G^{[n]}$ - das n-te Glied der absteigenden Kommutatorreihe von G

· $\star$, $\star_c$ - Sternverknüpfung

· $[a, b]$ - Kommutator von a, b

· $[U, V]$ - Kommutatorgruppe von U, V

· a^{-1} - Inverses von a

· a^b - das von a mit b Konjugierte

· $1 + rad(A)$ - die Einseinheiten

· $C_U(V)$ - Zentralisator von V in U

· $N_U(V)$ - Normalisator von V in U

· $\mathcal{G}$ - die Klasse der Gruppen

· G' - die Ableitung von G

· $F^n(G)$ - n-te Fitting-Untergruppe von G

· G/N - Faktorgruppe von G nach N

· $\mathcal{SU}_{E(A)}$ - Menge der auflösbaren Untergruppen von $E(A)$

· Π_n - geordnete Mengenpartitionen

· $\wedge_n$ - Verknüpfung auf Π_n

· $exp(G)$ - der Exponent von G

· $U_{\mathcal{U}}$ - unipotenter Faktor von U

· $U_{\mathcal{V}}$ - vollseparabler Faktor von U

· $O_p(G)$ - das p-Herz von G

· $\mathcal{G}(U), \mathcal{U}_{E(T)}$ - Untergruppen mit Doppel-Zentralisator-Eigenschaft in $E(T)$

· U_T - Anzahl von $\mathcal{G}(U)$

· $\mathcal{G}_{DJ}$ - Untergruppen mit Doppel-Zentralisator-Eigenschaft in $1 + rad(A)$

· $\mathcal{G}_{UT}$ - maximal nilpotente Untergruppen von $E(A)$ bzgl. $E(T)$

· $\mathcal{G}_U$ - maximal nilpotente Untergruppen von $E(A)$

· $\mathcal{E}(\mathcal{A})_M$ - die Menge der maximal nilpotenten Untergruppen von $E(A)$

· a^- - quasireguläres Inverses

· $x^{(a)}$ - quasireguläres Konjugiertes

Allgemeine Algebren-Konstruktionen

Seien A eine Algebra, $S \subseteq A$, S endlich, K ein Körper, G eine Gruppe, I ein Ideal, M ein Monoid, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in S_n$ und $T \subseteq A$. Folgende allgemeine Algebren-Konstruktionen und Symbole benutzen wir:

· $dim_K(A)$ - Dimension von A

· $\otimes$ - Tensorprodukt von Algebren

· $\times$ - direktes Produkt von Algebren

· $\oplus$ - innere bzw. äussere direkte Summe von Algebren

· A/I - Faktoralgebra von A nach I

· KG - Gruppenalgebra von G über K

· $A^{n\times n}$ - $n \times n$-Matrizenalgebra über A

· A° - assoziierte Lie-Algebra

· $\langle T\rangle_K$ - K-Raumerzeugnis

· $\langle T\rangle_{\mathcal{A}}$ - Algebrenerzeugnis

· $\langle T\rangle_{\mathcal{A}_1}$ - unitales Algebrenerzeugnis

· A^K - Adjunktion einer Eins

· A^{op} oder auch A^- - Invers-Algebra zu A

· $(A \times A; \odot)$ - Erweiterung von A um eine Zero-Algebra

· $gl(n, K)$ - entspricht $(K^{n\times n})^\circ$

· eAe - entspricht $\{eae \mid a \in A\}$, wobei e ein Idempotent von A ist

· $Aug(KG)$ - Augmentationsideal von KG

· $\mathcal{A}$ - Klasse der assoziativen Algebren

· $\mathcal{A}_1$ - Klasse der assoziativen unitären Algebren