SVEN BODO WIRSING

ENDVERTAUSCHBARE ANORDNUNGEN UND DIE STRUKTUR DER EINHEITENGRUPPEN MODULARER GRUPPENALGEBREN

Mit 167 Übungsaufgaben

disserta Verlag

Wirsing, Sven Bodo: Endvertauschbare Anordnungen und die Struktur der Einheitengruppen modularer Gruppenalgebren. Mit 167 Übungsaufgaben. Hamburg, disserta Verlag, 2015

Buch-ISBN: 978-3-95935-184-3
PDF-eBook-ISBN: 978-3-95935-185-0
Druck/Herstellung: disserta Verlag, Hamburg, 2015

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Meinen Eltern

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **5**

Symbolverzeichnis **9**

1 Herzen und Normalisatoren in Einheitengruppen von Gruppenalgebren **13**

1.1 Erste einfache Reduktion . . . 13
1.2 Herzen . . . 21
1.3 Normalisatoren . . . 24
1.4 Offene Fragen und Übungsaufgaben . . . 30

2 Endvertauschbare Anordnungen **37**

2.1 Erste Eigenschaften endvertauschbarer Anordnungen . . . 37
2.2 Endvertauschbare Anordnungen von Konjugiertenklassen . . . 43
2.3 Ein Nilpotenzkriterium . . . 46
2.4 Der Exponent des Zentrums . . . 50
2.5 Abschätzungen . . . 55
2.6 Offene Fragen und Übungsaufgaben . . . 60

3 Der Exponent des Zentrums für spezielle Gruppenklassen und Gruppenkonstruktionen **65**

3.1 Der maximal mögliche Exponent . . . 65
3.2 Der minimal mögliche Exponent . . . 68
3.3 Direkte Produkte mit vereinigten zentralen Untergruppen . . . 73
3.4 Kranzprodukte . . . 78
3.5 Andere Erweiterungen . . . 86
3.6 Anmerkungen zu den Abschätzungen in 2.5 . . . 90
3.7 Offene Fragen und Übungsaufgaben . . . 91

4 Die Invarianten des Zentrums **95**

4.1 Eine direkte Zerlegung . . . 95
4.2 Kommutative Gruppenalgebren . . . 98
4.3 Die Invarianten . . . 102
4.4 Der Klassengraph . . . 106

4.5 Bestimmung der Invarianten in Beispielen 108
4.6 Offene Fragen und Übungsaufgaben 110

5 Konsequenzen für ausgewählte Typen von Einheitengruppen 119
5.1 Einheitengruppen mit zyklischer Ableitung 119
5.2 Einheitengruppen mit zyklischer p-Potenzuntergruppe 122
5.3 Einheitengruppen im Falle extra-spezieller 2-Gruppen 129
5.4 Offene Fragen und Übungsaufgaben 135

Abbildungsverzeichnis 141

Literaturverzeichnis 143

Index 145

Einleitung

Die Gruppentheorie hat sich über Jahrzehnte zu einem zentralen Gebiet der Algebra entwickelt. Neben spezifisch gruppentheoretischen Methoden werden auch Methoden aus anderen Bereichen der Algebra zur Klärung der Struktur von Gruppen eingesetzt. An vorderer Stelle sind hier etwa die Darstellungstheorie und die damit eng verknüpfte Charaktertheorie zu nennen. Das genaue Studium der Gruppenalgebra ist die Quelle der Einsichten über Moduln und Charaktere, die jene Theorien so überaus erfolgreich machen. Es ist daher seit langem zu einem inhaltsreichen Forschungsgebiet von eigenständigem Interesse innerhalb der Algebrentheorie geworden (S. Jennings [14], 1941 und D.S. Passman [19], 1977). Ob eine Gruppenalgebra über einem Körper K halbeinfach ist oder der modulare Fall vorliegt, läßt sich bekanntlich nach dem Satz von Maschke an der Charakteristik von K erkennen. Die vorliegende Arbeit widmet sich dem Studium der Einheitengruppen von Gruppenalgebren über p-Gruppen und Körpern der Charakteristik p.

Die Struktur der Einheitengruppe der Gruppenalgebra wurde für *abelsche* p-Gruppen und endliche Körper der Charakteristik p von R. Sandling in [22], von A. Albrecht in [1] sowie von A.A. Bovdi und A. Szakacs in [6] behandelt. Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung des *Zentrums* der Einheitengruppe $E(KG) = (1_G + rad(KG)) \times (K \setminus \{0_K\}) \cdot 1_G$ der Gruppenalgebra KG für eine nicht-abelsche p-Gruppe G und einen Körper K der Charakteristik p.

In Verallgemeinerung eines Resultats von K.R. Pearson [20] zeigen wir im ersten Kapitel für eine beliebige Untergruppe U von G zunächst, daß $Z(G) \cap U$ das Herz von U in $1_G + rad(KG)$ ist (1.2.3). Der Normalisator von U in $1_G + rad(KG)$ ist durch $N_G(U) \cdot C_{1_G+rad(KG)}(U)$ gegeben, wie im Anschluß bewiesen wird (1.3.6). Der Spezialfall $U = G$ findet sich bereits in einer Arbeit von D.B. Coleman ([8]).

Unser Zugang zum Zentrum von $E(KG)$ verwendet das – in dieser Arbeit entwickelte – Konzept der sogenannten ,,endvertauschbaren Anordnung" von Algebren-Elementen, das im zweiten Kapitel vorgestellt wird.

Wir zeigen in 2.3.6, daß eine endliche Gruppe G genau dann nilpotent ist, wenn jede Konjugiertenklasse von G endvertauschbar angeordnet werden kann. Darüber hinaus erhalten wir in 2.1.5 auf einfache Weise für endvertauschbar angeordnete K-Algebren-Elemente $a_1, \ldots, a_n$ die wichtige Identität $(\sum_{i=1}^{n} a_i)^{p^r} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{p^r}$ $(p = char(K), r \in \mathbb{N})$. Für den – auch für unsere Zwecke – besonders interessierenden Fall, daß $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Konjugiertenklasse einer endlichen p-Gruppe G ist, haben A.A. Bovdi und Z. Patay in [3] diese bereits auf andere Weise hergeleitet. Als Anwendung erhalten wir einen Satz derselben Autoren, der zeigt, daß und wie sich der Exponent von $Z(1_G + rad(KG))$ allein durch Berechnungen innerhalb der Gruppe G bestimmen läßt (2.4.8). Schließlich beweisen wir als Vorbereitung auf Kapitel 3 einige Abschätzungen für diesen Exponenten.

Die Zahl $\frac{|G|}{p^2}$ ist der maximal mögliche Wert, den der Exponent von $Z(1_G + rad(KG))$ für eine nicht-abelsche p-Gruppe G annehmen kann (2.5.3). In Abschnitt 1 von Kapitel 3 gelingt es uns, die Gruppen zu beschreiben, bei denen dieser Maximalwert angenommen wird: Entweder ist das Zentrum von G zur zyklischen Gruppe der Ordnung $\frac{|G|}{p^2}$ isomorph oder es gibt eine zyklische maximale Untergruppe in G (3.1.6).
Die Gruppen, für die das Zentrum von $1_G + rad(KG)$ elementar-abelsch ist, können wir andererseits in Abschnitt 2 von Kapitel 3 wie folgt kennzeichnen: Das Zentrum von G ist elementar-abelsch, und für alle $g \in G \setminus Z(G)$ gilt $C_G(g) < C_G(g^p)$ (3.2.1). Zum Beispiel erfüllen die p-Sylow-Untergruppen von $GL(n, GF(p^k))$ diese Bedingungen (3.2.2.6).
In diversen interessanten Fällen ist der Exponent von $Z(1_G + rad(KG))$ einfach gleich dem von $Z(G)$: Wir beweisen dies für p-Gruppen G, für die $exp(G/Z(G)) \leq exp(Z(G))$ gilt (3.2.3) sowie – mit ganz anderer Begründung – für reguläre p-Gruppen (3.2.5).
In den weiteren Abschnitten dieses Kapitels studieren wir das Verhalten des Exponenten unter Gruppenkonstruktionen. Bei direkten Produkten zweier p-Gruppen G, H mit vereinigten zentralen Untergruppen ergibt sich derselbe Exponent wie spezieller beim direkten Produkt, nämlich $max\{exp(Z(1_G + rad(KG))), exp(Z(1_G + rad(KH)))\}$ (3.3.7).
Weiter gelingt es uns, die Berechnung des Exponenten auf die zur Konstruktion des Kranzproduktes $G \wr_\delta H$ verwendeten Ingredienzien G, H und δ zu reduzieren (3.4.11). Insbesondere erhalten wir, daß er sich bei beliebiger Operation δ nach unten durch $exp(Z(1_G + rad(KG)))$ und nach oben durch $exp(Z(1_{G \times H} + rad(G \times H)))$ abschätzen läßt (3.4.18). Die untere Schranke wird zum Beispiel bei treuer (3.4.16) und die obere Schranke zum Beispiel bei trivialer Operation angenommen (3.4.17).
Bei Dieder- und Quaternionengruppen gleicher Ordnung ist der Exponent des Zentrums von $1_G + rad(KG)$ derselbe. In der generellen Situation von Erweiterungen abelscher p-Gruppen bei gleicher Operation erhalten

wir, allerdings nur unter einer geeigneten Zusatz-Voraussetzung, das entsprechende Resultat (3.5.6).

Das Konzept der endvertauschbaren Anordnung erlaubt neben der Berechnung des Exponenten von $Z(1_G + rad(KG))$ auch die Beschreibung der p-Potenz-Struktur von $Z(1_G+rad(KG))$ und damit – in dem Fall eines endlichen Körpers – die Ermittlung der Invarianten dieser abelschen p-Gruppe. Dieses Problem reduziert sich auf das entsprechende für den direkten Faktor $1_G + rad(KZ(G))$ und den Kofaktor $1_G + \langle\{ \sum\limits_{x\in g^G} x \mid g \in G \setminus Z(G)\}\rangle_K$ des Zentrums von $1_G + rad(KG)$ (4.1.5). Die Invarianten des ersten Faktors sind – wie eingangs erwähnt – vollständig bekannt, und die des zweiten Faktors beschreiben wir auf zweierlei Weisen allein durch Berechnungen in der Gruppe G und in dem Körper K (4.3.1.3, 4.3.2.6). Eine weitere Beschreibung findet sich in der Arbeit von A.A. Bovdi und Z. Patay in [4]. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels berechnen wir die Invarianten in einigen Beispielen. Dabei zeigt sich u.a., daß die Zentren von $1_G + rad(KG)$ für die Quaternionen-, Dieder- und Semidiedergruppen gleicher Ordnung und einem endlichen Körper der Charakteristik 2 isomorph sind (4.5.2.2).

Im letzten Kapitel dieser Arbeit beweisen wir zunächst, daß die Ableitung von $1_G + rad(KG)$ nur für abelsches G zyklisch ist (5.1.4). Unerwartet aufwendiger ist der anschließend bewiesene Satz, daß $(1_G + rad(KG))^p$ genau dann zyklisch ist, wenn entweder G elementar-abelsch ist oder G abelsch ist und $p = \mid G^2 \mid = \mid K^2 \mid = 2$ gilt (5.2.11).
Leicht läßt sich einsehen, daß die Gruppe $1_G + rad(KG)$ nur für eine extra-spezielle 2-Gruppe G speziell sein kann (5.3.9). Für eine solche stimmt das elementar-abelsche Zentrum von $1_G + rad(KG)$ stets mit der Frattini-Untergruppe von $1_G + rad(KG)$ überein (5.3.2, 5.3.3). Die vollständige Klärung der Frage, für welche extra-speziellen 2-Gruppen G und Körper K der Charakteristik 2 die Gruppe $1_G + rad(KG)$ eine spezielle 2-Gruppe ist, erfolgt im Rahmen dieser Arbeit nicht. In dem kleinsten relevanten Fall besitzt die Ableitung von $1_G + rad(KG)$ genau den Index 2 in $Z(1_G + rad(KG))$ (5.3.10).

Symbolverzeichnis

Wir listen die in der vorliegenden Arbeit benutzten Symbole kapitelweise auf. Dabei geben wir zu jedem Symbol eine Kurzdefinition an, und die Nummern hinter dieser Definition besagen, in welchem Abschnitt und auf welcher Seite dieser Arbeit das Symbol zum ersten Mal erscheint.

Kapitel 1

$*$	die Sternverknüpfung; 1.1.1, 13
$cl(A)$	Nilpotenzklasse einer Algebra; 21, 33
$Q(A)$, A^*	die Einheitengruppe des Monoids $(A;*)$; 1.1.3, 13
a'	das Inverse zu $a \in Q(A)$; 1.1.3, 13
$E(A)$	die Einheitengruppe einer assoziativen unitären Algebra A; 1.1.3, 13
(I,T)	eine semidirekte Zerlegung einer Algebra; 1.1.6, 14
(N,U)	eine semidirekte Zerlegung einer Gruppe; 1.1.6, 14
$S+T$	$:= \{s+t \mid (s;t) \in S \times T\}$; 1.1.8, 15
$s+T$	$:= \{s\} + T$; 1.1.8, 15
$\overline{M}$	$:= \sum\limits_{m \in M} m$; 1.1.9, 15
n_K	$:= \sum\limits_{i=1}^{n} 1_K$; 1.1.9, 15
$\mid T \mid$	die Mächtigkeit einer endlichen Menge T; 1.1.9, 15
e_H	$:= \frac{1}{\mid H \mid}\overline{H}$; 1.1.9, 15
KM	der freie K-Modul mit K-Basis M ; 1.1.9, 15
$Z(A)$	das Zentrum einer Algebra A; 1.1.10, 16
$\cong_K$	die Isomorphie von K-Vektorräumen; 1.1.11, 16
$\langle \ldots \rangle_K$	das K-Erzeugnis in einem K-Vektorraum; 1.1.11, 16
$\mathcal{A}$	die Klasse der assoziativen Algebren; 1.1.11, 16
$\mathcal{A}_1$	die Klasse der assoziativen unitären Algebren; 1.1.11, 16
$\mathcal{L}$	die Klasse der Lie-Algebren; 1.1.11, 16
$\mathcal{G}$	die Klasse der Gruppen; 1.1.11, 16
$\cong_{\mathcal{K}}$	die Isomorphie innerhalb einer Klasse $\mathcal{K}$; 1.1.11, 16
$\langle \ldots \rangle_{\mathcal{K}}$	das Erzeugnis innerhalb einer Klasse $\mathcal{K}$; 1.1.11, 16
$\mathbb{N}$	die Menge der natürlichen Zahlen; 1.1.11, 16
$\mathbb{H}$	reelle Quaternionen; 3, 31

$\underline{n}$	$:= \mathbb{N}_{\leq n}$; 1.1.11, 16
$\underline{n}_0$	$:= \underline{n} \cup \{0\}$; 1.1.11, 16
$Aug_B(V)$	$:= \langle\{b_1 - b_2 \mid b_1, b_2 \in B\}\rangle_K$; 1.1.12, 16
$aug_B(\sum\limits_{b\in B} k_b b)$	$:= \sum\limits_{b\in B} k_b$; 1.1.12, 16
$Aug(KM)$	$:= Aug_M(KM)$; 1.1.12, 16
$aug(x)$	$:= aug_M(x)$, $x \in KM$; 1.1.12, 16
aug	die Augmentationsabbildung; 1.1.13, 16
$Kern\,\alpha$	der Kern der Abbildung α; 1.1.13, 16
G/N	die Faktorgruppe von G modulo N; 1.1.14, 17
Ng	ein Element von G/N; 1.1.14, 17
p_N	die Linearisierung von $g \mapsto Ng$; 1.1.14, 17
$T \cdot S$	$:= \langle\{ts \mid (t,s) \in T \times S\}\rangle_K$; 1.1.14, 17
$rad(A)$	das Nilradikal einer assoziativen Algebra A; 1.1.15, 18
$o(g)$	die Ordnung eines Elementes g einer Gruppe; 1.1.15, 18
$Z(G)$	das Zentrum einer Gruppe G; 1.1.15, 18
$char(K)$	die Charakteristik eines Körpers K; 1.1.15, 18
Q_n	die Quaternionengruppe der Ordnung n; 1.1.19, 20
$core_G(U)$	das Herz von U in G; 1.2.1, 21
g^h	$:= h^{-1}gh$; 1.2.2, 21
T^h	$:= \{t^h \mid t \in T\}$; 1.2.2, 21
$Abb(M,N)$	die Menge der Abbildungen von M in N; 1.3.1, 24
$\overline{\delta}$	die Linearisierung von δ; 1.3.3, 24
$\hat{\delta}$	die erweiterte Gruppenoperation bezüglich δ; 1.3.3, 24
$\alpha_{\vert T}$	die Einschränkung von α auf T; 1.3.2, 24
$N_G(U)$	der Normalisator von U in G; 1.3.6, 25
$C_G(U)$	der Zentralisator von U in G; 1.3.6, 25
$[g,h]$	der Kommutator von g mit h; 1.3.8, 27
$c(G)$	die Klassenzahl einer Gruppe G; 1.3.8, 27
$U \oplus_K W$	die innere direkte Summe der K-Teilräume U und W; 1.3.9, 27
$dim_K(V)$	die Dimension des K-Vektorraums V; 1.3.9, 27
$C_{KM,\delta}(U)$	der Zentralisator von U in KM bezüglich δ; 1.3.11, 29
κ_g	die Konjugation mit g; 1.3.13, 29
κ	die Abbildung $g \mapsto \kappa_g$; 1.3.13, 29

Kapitel 2

$EA(T)$	die Menge der endvertauschbaren Anordnungen von T; 2.1.1, 37
S_n	die symmetrische Gruppe auf $\underline{n}$; 2.1.2, 37
D_n	die Diedergruppe der Ordnung n; 2.1.2, 37
$C_A(T)$	der Zentralisator von T in A; 2.1.5, 38
$Aut(G)$	die Automorphismengruppe von G; 2.1.8, 40
$Stab_G(m)$	der Stabilisator von m in G; 2.1.8, 40
$Inn(G)$	die innere Automorphismengruppe von G; 2.1.9, 41

V_4	die Kleinsche Vierergruppe; 2.1.9, 41
$G^{'}$	die Ableitung von G; 2.2.1, 43
$\Phi(G)$	die Frattini-Untergruppe von G; 2.2.1, 43
$F(G)$	die Fitting-Untergruppe von G; 2.3.4, 47
$\mathbb{C}$	der komplexe Zahlkörper; 2.3.8, 49
φ_T	die monotone Bijektion von $\mid T \mid$ auf T; 2.4.1, 50
$\binom{T}{i}$	die Menge der i-elementigen Teilmengen von T; 2.4.2, 51
$\mathbb{N}_0$	$:= \mathbb{N} \cup \{0\}$; 2.4.2, 51
$\binom{n}{i}$	$:=\mid \binom{\underline{n}}{i} \mid$; 2.4.4, 51
G^n	$:= \langle\{g^n \mid g \in G\}\rangle_{\mathcal{G}}$; 2.4.5, 51
K^{p^n}	$:= \{k^{p^n} \mid k \in K\}$, K Körper; 2.4.5, 51
$exp(G)$	der Exponent einer Torsionsgruppe G; 2.4.5, 51
$max\,T$	das Maximum einer endlichen Teilmenge T von $\mathbb{N}$; 2.4.7, 52
$min\,T$	das Minimum einer endlichen Teilmenge T von $\mathbb{N}$; 2.4.8, 53
$C_G(g)$	$:= C_G(\{g\})$; 2.4.8, 53
$a \circ b$	$:= ab - ba$; 2.4.9, 54
A°	die zu A assoziierte Lie-Algebra; 2.4.9, 54
$\mathcal{K}(G)$	die Menge der Konjugiertenklassen von G; 2.5.1, 55

Kapitel 3

SD_n	die Semidiedergruppe der Ordnung n; 3.1.2, 65
Z_n	die zyklische Gruppe der Ordnung n; 3.1.6, 67
$GL(n, K)$	die generelle lineare Gruppe; 3.2.2.1, 68
$GF(p^k)$	der endliche Körper mit p^k Elementen; 3.2.2.1, 68
P_n	eine p-Sylow-Untergruppe von $GL(n, GF(p^k))$; 3.2.2.1, 68
$K^{n\times n}$	$:= K^{\underline{n}\times\underline{n}}$; 3.2.2.1, 68
$E_{i,j}$	ein Basisvektor von $K^{n\times n}$; 3.2.2.2, 68
$su(n, K)$	die Menge der strikt unteren Dreiecksmatrizen von $K^{n\times n}$; 3.2.2.2, 68
$PGL(n, K)$	die projektive lineare Gruppe; 3.2.2.6, 70
$SL(n, K)$	die spezielle lineare Gruppe; 3.2.2.6, 70
$PSL(n, K)$	die projektive spezielle lineare Gruppe; 3.2.2.6, 70
$G \times H$	das direkte Produkt der Gruppen G, H; 3.3.1, 73
D_μ, D	$:= \{(u; (u\mu)^{-1}) \mid u \in U_1\}$; 3.3.1, 73
$G_1 \curlyvee_\mu G_2, G_1 \curlyvee G_2$	das direkte Produkt von G_1 und G_2 mit vermöge μ vereinigten zentralen Untergruppen; 3.3.1, 73
A^B	$:= Abb(B, A)$; 3.3.9, 76
$a \equiv b \, mod \, c$	c teilt $a - b$; 3.3.11, 76
φ^s, $\tilde{s}$	zwei spezielle Abbildungen; 3.4.1, 78
$H \wr_\delta S$, $H \wr_X S$	das Kranzprodukt der Gruppen H und S bezüglich δ bzw. X; 3.4.2, 78
$H \wr S$	das reguläre Kranzprodukt von H mit S; 3.4.2, 78
$\alpha \equiv h$	die mit dem Wert h konstante Abbildung; 3.4.4, 78

$G/_r U$	die Menge der Rechtsnebenklassen von U in G; 3.4.6, 79
$[A, B]$	$:= \langle\{[a, b] \mid a \in A, b \in B\}\rangle_{\mathcal{G}}$; 3.4.7, 80
$Fix_X(g)$	$:= \{x \mid x \in X, xg = x\}$; 3.4.7, 80
α_h	die mit dem Wert h konstante Abildung; 3.4.9, 81
$C(2n, q)$	die symplektische Gruppe; 3.4.15, 83
$U(n, q^2)$	die unitäre Gruppe; 3.4.15, 83
$O_D(n, q)$	die orthogonale Gruppe; 3.4.15, 83
$(H \times N; \cdot_{\alpha, N(\cdot;\cdot)})$	die Erweiterung von H und N zum Faktorensystem $N(\cdot\,;\cdot)$ und den Automorphismen $\alpha(h)$; 3.5.2, 87
$N_R(\cdot\,;\cdot)$	das Faktorensystem zum Repräsentantensystem R; 3.5.1, 86
$\alpha_R(h)$	die Automorphismen zum Repräsentantensystem R; 3.5.1, 86

<u>Kapitel 4</u>

$\overline{\mathcal{K}(G)}$	$:= \langle\{\overline{g^G} \mid g \in G \setminus Z(G)\}\rangle_K$; 4.1.6, 97
nG	eine andere Bezeichnung für $G^{\underline{n}}$; 4.2.1.1, 98
$\overline{k(G)}_{p^i}$	die Dimension von $(\overline{\mathcal{K}(G)}^*)^{p^i}$; 4.3.1.2, 103
$soc_n(G)$	der n-te Sockel von G; 4.3.2.1, 104
$\sim_n$	eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{K}(G) \setminus \{\{z\} \mid z \in Z(G)\}$; 4.3.2.4, 104

<u>Kapitel 5</u>

A^n	$:= \langle\{a_1 \ldots a_n \mid a_i \in A\}\rangle_K$; 5.1.2, 119
$a_1 \circ \cdots \circ a_n$	$:= (\ldots(a_1 \circ a_2) \circ \ldots) \circ a_n$; 5.2.1, 122
$cl(G)$	die Nilpotenzklasse einer Gruppe G; 5.2.2, 123
$cl(L)$	die Nilpotenzklasse einer Lie-Algebra L; 5.2.2, 123
$Z_n(G)$	das n-te Zentrum einer Gruppe G; vor 5.2.5, vor 124
$Z_n(L)$	das n-te Zentrum einer Lie-Algebra L; vor 5.2.5, vor 124
$L \circ L$	$:= \langle\{a \circ b \mid a, b \in L\}\rangle_K$; 5.2.6, 125
U_{even}	eine Untergruppe von $E(KG)$; 5.3.7, 131

Kapitel 1

Herzen und Normalisatoren in Einheitengruppen von Gruppenalgebren

1.1 Erste einfache Reduktion

In dieser Arbeit verwenden wir die Sprechweise „K-Algebra" für eine Algebra über einem kommutativen unitären Ring K.

1.1.1 Definition

Ist A eine K-Algebra, so definieren wir für alle $a, b \in A$

$$a * b := a + b + ab$$

und nennen, B.L. van der Waerden folgend, $*$ die Sternverknüpfung auf A.$\diamond$

1.1.2 Bemerkung

Für jede assoziative K-Algebra A gelten:

(i) $(A; *)$ ist ein Monoid mit neutralem Element 0_A.

(ii) Ist A unitär, so ist die Abbildung $A \to A$, $a \mapsto 1_A + a$ ein Monoidisomorphismus von $(A; *)$ auf $(A; \cdot)$.$\diamond$

1.1.3 Definition

Ist A eine assoziative K-Algebra, so bezeichnen wir mit $Q(A)$ die Einheitengruppe des Monoids $(A; *)$ und für jedes $a \in Q(A)$ mit $a^{'}$ das Inverse von a in $Q(A)$. Die Elemente von $Q(A)$ nennen wir sternregulär (oder auch quasi-regulär) und die Gruppe $Q(A)$ die Sterngruppe von A. Ist zusätzlich