SVEN BODO WIRSING

# MAXIMAL NILPOTENTE TEILSTRUKTUREN

Nilradikale und Cartan-Teilalgebren in assoziierten Algebren. Mit 348 Übungsaufgaben

I

disserta Verlag

**Wirsing, Sven Bodo: Maximal nilpotente Teilstrukturen I: Nilradikale und Cartan-Teilalgebren in assoziierten Algebren. Mit 348 Übungsaufgaben. Hamburg, disserta Verlag, 2015**

Buch-ISBN: 978-3-95935-110-2
PDF-eBook-ISBN: 978-3-95935-111-9
Druck/Herstellung: disserta Verlag, Hamburg, 2015
Coverbild: designed by freepik.com

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:**
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

---


Hermannstal 119k, 22119 Hamburg
http://www.disserta-verlag.de, Hamburg 2015
Printed in Germany

**Für Lena, Debbi und Marci**

*Zusammen leben wir nun,*
*Erleben vieles im gemeinsamen Tun,*
*Danke sagen möchte ich Euch mit diesen Zeilen,*
*Daß wir gemeinsam unser Leben teilen.*

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

*Maximal nilpotent sind die Cartan-Teilalgebren*
*Ebenso wie das Nilradikal*
*Beide studieren wir im reichen Tal*
*Der assoziierten Lie-Algebren.*

*(Sven Wirsing, im März 2015)*

In der Mathematik, speziell in der Theorie der Lie-Algebren, werden sog. Cartan-Teilalgebren unter anderem in der Klassifikation der halbeinfachen Lie-Algebren und in der Theorie der symmetrischen Räume verwendet.

Während meiner Promotionszeit an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel hielt Salvatore Siciliano einen anregenden Vortrag im Oberseminar zu Cartan-Teilalgebren in Lie-Algebren assoziiert zu assoziativen Algebren. Dieser Vortrag war für mich der Anreiz, mich näher mit maximal nilpotenten Teilstrukturen der assoziierten Lie-Algebra zu assoziativen Algebren zu beschäftigen. In dem vorliegenden Buch werden wir seine Theorie zu Cartan-Teilalgebren aufarbeiten und auf verschiedene spezielle assoziative Algebren ausdehnen. Zusätzlich werden wir eine zweite maximal nilpotente Teilstruktur, nämlich das Nilradikal, in der assoziierten Lie-Algebra analysieren und beschreiben.

Das erste Kapitel hat einleitenden Charakter und stellt die in diesem Buch verwendeten assoziativen Algebren, Monoide und Gruppen systematisch zusammen. Sie dienen im weiteren Verlauf dieses Buch zur Illustration der erlangten Erkenntnisse allgemeinerer Natur und sollen dem Leser diese Ergebnisse an und ihre Anwendung auf konkrete Strukturen verdeutlichen. Einige Anwendungen auf diese Strukturen werden auch in die zahlreichen Übungsaufgaben verlagert, die am Ende jedes Kapitels bzw. Abschnittes zu finden sind. Diese Aufgaben dienen dem Leser als weitere Vertiefung in die geschilderten Thematiken. Zu Beginn jeder Übungsaufgaben-Serie befinden sich zudem offene Fragestellungen, die dem Leser (aber auch dem Autor) als Basis für weitere Forschungen in diesem Bereich dienen können. Zahlreiche Graphiken verdeutlichen dem Leser zudem die erlangten Ergebnisse in diesem Buch.

Wir fassen in Kapitel 2 einige Resultate über die Thematik von endlichen Untergruppen von Körpern und Divisionsalgebren zusammen. Teilweise geben wir Beweise dieser grundlegenden algebraischen Resultate an, teilweise zitieren wir nur entsprechende Artikel in der Literatur. Einige dieser Aussagen werden wir in an einigen Stellen benutzen, weshalb die aufgeführten Beweise zu einem tieferen Verständnis der entsprechenden Resultate dienen. Dieses Kapitel hat der Autor aber auch aus Eigen-Interesse an den Beweisen der aufgeführten Resultate integriert. Zu nennen sind dabei die Resultate zur Zyklizität endlicher Untergruppen von Körpern, der Satz von Wedderburn über endliche Divisionsalgebren sowie Hersteins und Amitsurs Erkenntnisse zur Klassifikation endlicher Untergruppen von Schiefkörpern.

Ahnlich strukturiert ist auch das Kapitel 3. Hierbei beschäftigen wir uns mit der Normal- und Subnormalteilerstruktur von Einheitengruppen von Divisionsalgebren. Dabei geben wir einen Beweis für den Satz von Cartan-Brauer-Hua zur Normalteiler-Struktur an, stellen das Ergebnis von Scott zu auflösbaren Einheitengruppen ausführlich dar und beenden das Kapitel mit dem Satz von Stuth zur Subnormalteiler-Struktur. Letzteres Ergebnis verallgemeinert die vorherigen Ergebnisse, wird aber ohne Beweis angegeben.

Zu einer assoziativen Algebra kann man in natürlicherweise die sog. assoziierte Lie-Algebra ableiten. Wir untersuchen in Kapitel 4, wie sich das Nilradikal (das grösste nilpotente Ideal) dieser Lie-Algebra mit Hilfe der Ausgangsalgebra und deren assoziativer Struktur beschreiben lässt. Es zeigt sich, dass dabei das Zentrum und das Nilradikal der assoziativen Algebra eine Rolle spielen: in vielen Fällen ist das Nilradikal Summe dieser beiden assoziativen Teilstrukturen. Als zusätzliche Voraussetzung fordern wir lediglich die Separabilität der Radikalfaktorstruktur der assoziativen Algebra, um mit Hilfe des Satzes von Wedderburn-Malcev ein Radikalkomplement verwenden zu können.
Strategisch gehen wir so vor, dass wir zunächst die Untersuchungen für auflösbare Algebren durchführen. Dabei verwenden wir Ergebnisse zur Jordan-Zerlegung und behandeln die Gruppenalgebren, die Solomon-Algebren, die Solomon-Tits-Algebren und die Algebren der unteren und oberen Dreiecksmatrizen als Beispiele ausführlich.
Anschliessend übertragen wir Analysen von Herstein zu einfachen Ringen und ihrem assoziierten Lie-Ring auf einfache und halbeinfache Algebren: es stellt sich heraus, dass das Nilradikal mit dem grössten auflösbaren Ideal übereinstimmt und zudem genau das Zentrum der Algebra ist. Dabei beweisen wir zusätzlich, dass das Nilradikal der assoziierten Lie-Algebra von direkten Produkten sich als direktes Produkt der Nilradikale der Faktoren ergibt: es gibt diesbezüglich keine sog. 'Diagonalen'. Mit beiden Resultaten

können wir dann den allgemeinen Fall studieren und lösen.
Das Kapitel wird dadurch abgeschlossen, das bewiesene Resultat auf Algebrenkonstruktionen wie das Tensorprodukt, Adjunktion einer Eins, Matrixalgebren, Teilalgebren etc. möglichst zu übertragen. Dabei steht der Gedanke im Vordergrund, das Nilradikal (der assoziierten Lie-Algebra) dieser abgeleiteten Konstruktionen aus den vorliegenden Ingredenzien zu ermitteln (also z.B. aus den Faktoren eines Tensorproduktes oder der Ausgangsalgebra bei Teilalgebren). Inwieweit hierbei Ergebnisse zu erwarten sind, analysieren und beweisen wir in diesem Abschnitt.

Im vorherigen Kapitel haben wir uns ausführlich mit dem Nilradikal von Lie-Algebren assoziiert zu assoziativen Algebren beschäftigt und analysiert, wie man es mit Hilfe der assoziativen Struktur beschreiben kann. Das Nilradikal gehört zu den maximal nilpotenten Teilstrukturen. Zu diesen gehören auch die sog. Cartan-Teilalgebren, mit den wir uns in diesem Kapitel beschäftigen. Definiert sind die Cartan-Teilalgebren als nilpotente und selbstnormalisierende Teilalgebren in einer Lie-Algebra. Das Ziel dieses Kapitels ist die Analyse, wie die Cartan-Teilalgebren mit Hilfe der assoziativen Struktur beschrieben werden können. Einige der Ergebnisse in diesem Kapitel basieren auf dem Artikel von Salvatore Siciliano [51], andere jedoch sind Weiterentwicklungen seiner Theorie, die wir auf diverse assoziative Algebren (wie etwa Divisionsalgebren, einfache und halbeinfache Algebren, reduzierte Algebren, Algebren mit separabler Radikalfaktorstruktur, etc..) ausdehnen. Ausführlich behandeln wir dabei unsere Standard-Beispiele, insbesondere die Gruppenalgebren, die Dreiecksmatrizen und die Solomon-(Tits)-Algebren, um die entwickelte Theorie zu verdeutlichen.
Das Hauptergebnis dieses Kapitels ist die 1:1-Beziehung zwischen maximalen Tori (maximal kommutative separable Teilalgebren) und Cartan-Teilalgebren. Dabei ist die Bildung der Zentralisatoren der maximalen Tori eine Bijektion auf die Cartan-Teilalgebren. Die Umkehrabbildung ermittelt zu jeder Cartan-Teilalgebren dadurch einen maximalen Torus, indem alle sog. vollseparablen Elemente der Cartan-Teilalgebra gebildet werden.
In vielen Fällen sind beide Mengen (maximale Tori und Cartan-Teilalgebren) identisch, wie z.B. bei halbeinfachen oder separablen assoziativen Algebren. Hierzu zählen auch zentrale Divisionsalgebren, wo sich zeigt, dass maximale Tori und Cartan-Teilalgebren mit den maximal separablen Teilkörpern – welche wiederum mit den separablen maximalen Teilkörpern übereinstimmen – zusammenfallen. Dies ergibt einen neuen Beweis für ein Ergebnis von Emmy Noether. Insbesondere stellt hier die Dimension der maximalen Tori ( = Cartan-Teilalgebren) eine Invariante dar.
Bei auflösbaren Algebren sind die maximalen Tori schlicht die Radikalkomplemente, falls die Radikalfaktorstruktur separabel ist. Dieses Ergebnis, welche schon von Thorsten Bauer in seiner Dissertation [4] sowie von Salvatore Siciliano in [51] bewiesen worden ist, leiten wir mit Hilfe eines anderen An-

satzes her. Daraus ergibt sich leicht mit Hilfe des Satzes von Wedderburn-Malcev sowie des Hauptergebnisses zu Cartan-Teilalgebren, dass alle maximalen Tori sowie alle Cartan-Teilalgebren konjugiert sind sowie die Cartan-Teilalgebren genau die Zentralisatoren der Radikalkomplemente sind.
Bei reduzierten Algebren können wir die Ermittlung der Cartan-Teilalgebren auf maximal auflösbare Teilstrukturen reduzieren. Diese lassen sich beschreiben als direkte Summe maximaler Tori mit dem Radikal. Die Zentralisatoren der maximalen Tori der Ausgangsalgebra stimmen mit denen in den maximal auflösbaren Teilalgebren überein. Zudem analysieren wir, wann die Gruppenalgebra reduziert ist. Im modularen Fall zeigt sich, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die Gruppenalgebra auflösbar ist. Im halbeinfach Fall jedoch zeigt sich ein anderes Bild: die unterliegende Gruppe ist hamiltonsch, und die Gleichung $a^2 + b^2 + 1 = 0$ hat in gewissen Körpererweiterungen zu Einheitswurzeln keine Lösung. Für hamiltonsche Gruppen greifen wir auf Kapitel 6 vor und bestimmen die Dimension einer Cartan-Teilalgebra.
Im vorletzten Abschnitt wird verdeutlicht, wie man die Ermittlung der Cartan-Teilalgebren auf die eines Radikalkomplementes reduzieren kann. Die maximalen Tori entsprechen denen der Radikalkomplemente. Da die Radikalkomplemente separabel sind, stimmen für sie maximale Tori und Cartan-Teilalgebren überein. Die Zentralisatoren der Cartan-Teilalgebren der Radikalkomplemente sind genau die Cartan-Teilalgebren der Ausgangsalgebra. Dies führt zu einer Strategie, wie man eine Cartan-Teilalgebra ermitteln kann. Besonders leicht erhalten wir hierdurch erneut einen Beweis im auflösbaren Fall. Des Weiteren illustrieren wir die Strategie an Gruppenalgebren zu Diedergruppen.
Das Kapitel wird dadurch abgeschlossen, das bewiesene Resultat auf Algebrenkonstruktionen wie das Tensorprodukt, Adjunktion einer Eins, Matrixalgebren, Teilalgebren möglichst zu übertragen. Dabei steht derselbe Gedanke im Vordergrund wie bereits beim Nilradikal beschrieben.

Das nächste Kapitel beschäftigt sich mit den Dimensionen der maximalen Tori in Gruppenalgebren. Hierbei geben wir das Resultat von Salvatore Siciliano wieder, dass die Dimension im halbeinfachen Fall der Summe der Grade der irreduziblen komplexen Charaktere entspricht. Dieses Resultat nutzen wir aus, um einerseits diverse Abschätzungen (Involutionenzahl, Gruppenordnung, abelsche Untergruppen, maximaler Grad) für diese Dimension anzugeben und andererseits diese Dimension für diverse Gruppenklassen (wie etwa Frobenius-Gruppen, direkte Produkte, extra-spezielle $p$-Gruppen, diverse lineare Gruppen, ambivalente Gruppen wie etwa Diedergruppen und die symmetrische Gruppe, metazyklische Gruppen, $p$-Gruppen, nilpotente Gruppen, minimal nicht-abelsche $p$-Gruppen, etc.) genau zu berechnen. Dabei nutzen wir sowohl klassische Theoreme wie auch neuere Ergebnisse zur Charaktertheorie von endlichen Gruppen aus.

Kapitel 7 gibt einen Ausblick auf den zweiten Band zu maximal nilpotenten Teilstrukturen. Dort werden wir uns auf den auflösbaren Fall spezialisieren, dabei jedoch nun auch das Zusammenspiel aller maximal nilpotenter Lie-Teilalgebren und Untergruppen betrachten. Eine Graphik illustriert die Fragestellungen zu Band II.

Im Anhang stellen wir eine Klasse von auflösbaren Algebren vor, die wir strukurell untersuchen (insbesondere zur Lie-Nilpotenz) und anschliessend hinsichtlich Isomorphie klassifizieren.

# Kapitel 1

# Standard-Beispiele

Dieses Kapitel hat einleitenden Charakter und stellt die in diesem Buch verwendeten assoziativen Algebren, Monoide und Gruppen systematisch zusammen. Sie dienen im weiteren Verlauf dieses Buches zur Illustration der erlangten Erkenntnisse allgemeinerer Natur und sollen dem Leser diese Ergebnisse an und ihre Anwendung auf konkrete Strukturen verdeutlichen. Einige Anwendungen auf diese Strukturen werden auch in die zahlreichen Übungsaufgaben verlagert.

## Gruppen und Monoide

Seien $n \in \mathbb{N}$, $N$ eine Menge, $M$ ein Monoid, $G$ eine Gruppe, $A$ eine assoziative unitäre Algebra und $q$ eine Primzahlpotenz. Folgende Gruppen und Monoide verwenden wir:

· $\mathbb{N}$ - natürliche Zahlen

· $\mathbb{N}_0$ - natürliche Zahlen und Null

· $(P(N); \cap)$ - Potenzmenge von $N$ mit Durchschnitt als Operation

· $(P(N); \cup)$ - Potenzmenge von $N$ mit Vereinigung als Operation

· $(P(N); \delta)$ - Potenzmenge von $N$ mit symmetrsicher Differenz als Operation

· $(P(M); \cdot)$ - Potenzmenge von $M$ mit Komplexprodukt als Operation

· $(P(G); \cdot)$ - Potenzmenge von $G$ mit Komplexprodukt als Operation

· $D_{2n}$ - Diedergruppe der Ordnung $2n$

· $Q_{4n}$ - Quaternionengruppen der Ordnung $4n$

· $SD_{2^n}$ - Semi-Diedergruppe der Ordnung $2^n$

· $S_n$ - symmetrische Gruppe vom Grad $n$

· $A_n$ - alternierende Gruppe vom Grad $n$

· $GL(n, q)$ - generelle lineare Gruppe vom Grad $n$ über $GF(q)$

· $SL(n, q)$ - spezielle lineare Gruppe vom Grad $n$ über $GF(q)$

· $PSL(n, q)$ - projektive spezielle lineare Gruppe vom Grad $n$ über $GF(q)$

· $SP(2n, q)$ - symplektische Gruppe vom Grad $2n$ über $GF(q)$

· $GSP(2n, q)$ - 'general similitudes group'

· $U(n, q)$ - unitäre Gruppe vom Grad $n$ über $GF(q)$

· $C_n$ der auch $Z_n$ - zyklische Gruppe der Ordnung $n$

· $E(A)$ - Einheitengruppe von $A$

· $Q(A)$ - quasireguläre Gruppe von $A$

· $\times$ - direktes Produkt von Gruppen

· $\wr$ - reguläres Kranzprodukt von Gruppen

· $\ltimes$ - semidirektes Produkt von Gruppen.

## Allgemeine Algebren-Konstruktionen

Seien $A$ eine Algebra, $K$ ein Körper, $G$ eine Gruppe, $I$ ein Ideal, $M$ ein Monoid, $n \in \mathbb{N}$ und $T \subseteq A$. Folgende allgemeine Algebren-Konstruktionen benutzen wir:

· $\otimes$ - Tensorprodukt von Algebren

· $\times$ - direktes Produkt von Algebren

· $\oplus$ - innere bzw. äussere direkte Summe von Algebren

· $A/I$ - Faktoralgebra

· $KG$ - Gruppenalgebra

· $KM$ - Monoidalgebra

· $A^{n \times n}$ - Matrizenalgebra

· $A^\circ$ - assoziierte Lie-Algebra

· $\langle T \rangle_K$ - $K$-Raumerzeugnis

· $\langle T\rangle_{\mathcal{A}}$ - Algebrenerzeugnis

· $\langle T\rangle_{\mathcal{A}_1}$ - unitales Algebrenerzeugnis

· $A^K$ - Adjunktion einer Eins

· $A^{op}$ oder auch $A^-$ - Invers-Algebra von oder auch entgegengesetzte Algebra zu $A$

· $(A \times A; \odot)$ - Erweiterung von $A$ um eine Zero-Algebra

· $gl(n, K)$ - entspricht $(K^{n\times n})^\circ$

· $eAe$ - entspricht $\{eae \mid a \in A\}$, wobei $e$ ein Idempotent von $A$ ist

· $Aug(KG)$ - Augmentationsideal von $KG$.

## Kommutative Algebren

Folgende kommutative Algebren benutzen wir:

· $\mathbb{Z}$ - ganze Zahlen

· $K[t]$ - Polynomring über einem Körper $K$ in der Variablen $t$.

## Körper und Schiefkörper

Seien $p$ eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$ und $(K; L)$ eine Körpererweiterung. Folgende Körper, Schiefkörper und Elemente werden in diesem Buch verwendet:

· $\mathbb{Q}$ - rationaler Zahlkörper

· $\mathbb{R}$ - reeller Zahlkörper

· $\mathbb{C}$ - komplexer Zahlkörper

· $\mathbb{H}$ - reelle Quaternionenalgebra

· $GF(p^n)$ - endlicher Körper mit $p^n$ Elementen

· $GF(q)$ - entspricht $GF(p^n)$ mit $q = p^n$

· $A(a, b)$ - allgemeine Quaternionenalgebra

· $K(a)$ - kleinster $a$-enthaltene Teilkörper von $L$ oberhalb von $K$

· $\omega_d$ - primitive $d$-te Einheitswurzel.

## (Zentral) - einfache assoziative Algebren

Seien $K$ ein Körper, $D$ eine Divisionsalgebra und $n \in \mathbb{N}$. Folgende Algebren benutzen wir:

· $K^{n\times n}$ - $n \times n$-Matrizen über $K$

· $D^{n\times n}$ - $n \times n$-Matrizen über $D$

· $A(a,b)$ - allgemeine Quaternionenalgebra.

## Halbeinfache assoziative Algebren

Folgende Algebren benutzen wir:

· $\times$ - direkte Produkte einfacher Algebren.

## Nilpotente assoziative Algebren

Seien $A$ eine assoziative Algebra, $K$ ein Körper, $p$ eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$ und $G$ eine $p$-Gruppe. Folgende nilpotente Algebren benutzen wir:

· $rad(A)$ - nilpotentes Radikal von $A$

· $J(A)$ - Jacobson-Radikal von $A$

· $s\delta_{u,n}$ - Algebra der strikt unteren Dreiecksmatrizen von $K^{n\times n}$

· $s\delta_{o,n}$ - Algebra der strikt oberen Dreiecksmatrizen von $K^{n\times n}$

· $Aug(KG)$ - Augmentationsideal einer $p$-Gruppe $G$ über $K$ mit $char(K) = p$.

## Auflösbare assoziative Algebren

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $K$ ein Körper. Folgende auflösbare Algebren benutzen wir:

· $K\Pi_n$ - Solomon-Tits-Algebra (siehe z.B. [67])

· $D_n$ - Solomon-Algebra im Falle $char(K) = 0$ (siehe z.B. [4])

· $\delta_{u,n}$ - Algebra der unteren Dreiecksmatrizen von $K^{n\times n}$

· $\delta_{o,n}$ - Algebra der oberen Dreiecksmatrizen von $K^{n\times n}$

· $KG$ - Gruppenalgebra im Falles eines Körpers der Charakteristik $p$ und einer Gruppe mit normaler $p$-Sylow-Untergruppe und abelschem hallschem Komplement.

# Kapitel 2

# Endliche Untergruppen der Einheitengruppe von Körpern und Divisionsalgebren

Wir fassen in diesem Kapitel einige Resultate über die Thematik von endlichen Untergruppen von Körpern und Divisionsalgebren zusammen. Teilweise geben wir Beweise dieser grundlegenden algebraischen Resultate an, teilweise zitieren wir nur entsprechende Artikel in der Literatur. Einige dieser Aussagen werden wir in an einigen Stellen benutzen, weshalb die aufgeführten Beweise zu einem tieferen Verständnis der entsprechenden Resultate dienen. Dieses Kapitel hat der Autor aber auch aus Interesse an den Beweisen der aufgeführten Resultate integriert.

## 2.1 Zyklizität im Falle eines Körpers

Mit $E(A)$ bzw. $K[t]$ bezeichnen wir die Einheitengruppe einer assoziativen unitären Algebra bzw. den Polynomring über einem Körper $K$ in der Variablen $t$. Für eine Gruppe $G$ und einem Element $g$ von $G$ sei $o(g)$ (genauer $o_G(g)$) die Ordnung von $g$ in $G$.

Für den folgenden Satz gibt es in der Literatur viele Beweise. Auf wen dieses Resultat ursprünglich zurückgeht, ist in der Literatur nicht eindeutig geklärt. Wir geben eine Variante unter Zuhilfename des Hauptsatzes über die Struktur endlicher abelscher Gruppen an. Dieser besagt, dass man jede endliche abelsche Gruppe als Produkt von zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung darstellen kann.

**Satz 1** *Jede endliche Untergruppe der Einheitengruppe eines Körpers ist zyklisch. Insbesondere ist die Einheitengruppe eines endlichen Körpers zyklisch.*

**Beweis**. Seien $K$ ein Körper und $U$ eine endliche Untergruppe von $E(K)$. Wir zerlegen zunächst die endliche abelsche Gruppe $U$ nach dem Hauptsatz über die Zerlegung endlicher abelscher Gruppen in Produkt von zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung, etwa

$$U = (G_{1,1} \times \cdots \times G_{1,s_1}) \times \cdots \times (G_{r,1} \times \cdots \times G_{r,s_r}),$$

wobei alle Gruppen $G_{i,j}$ von Primzahlpotenzordnung zur Primzahl $p_i$ sind. Dabei seien die Faktoren so angeordnet, dass stets $G_{i,1}$ die bzgl. der Anzahl der Elemente maximale Faktor von $G_{i,1} \times \cdots \times G_{i,r_i}$ ist. Sei zu jedem $i$ nun $g_i$ ein Erzeuger von $G_{i,1}$. Wir betrachten das Element $g := g_1 \cdots g_r$. Dann hat $g$ die Ordnung $o(g) = o(g_1) \cdots o(g_r)$, denn die Primzahlen sind verschieden. Auf Grund der Konstruktion gilt für alle $u \in U$ nun $u^{o(g)} = 1$.

Alle Elemente von $U$ sind deshalb Nullstellen des Polynoms $t^{o(g)} - 1$, davon gibt es aber höchstens $o(g)$ verschiedene, es gilt demnach $\mid U \mid \leq o(g)$. Da die $o(g)$-Potenzen von $g$ aber alle verschieden sind, besteht demnach $U$ aus den Potenzen von $g$ und ist damit zyklisch.$\diamond$

## 2.2 Resultate von Wedderburn, Amitsur und Herstein zu Divisionsalgebren

Eine unitäre Algebra ist eine Algebra mit Einselement. Eine unitale Teilalgebra einer unitären Algebra enthält das Einselement der Ausgangsalgebra und ist damit unitär. Eine unitäre Teilalgebra ist schlicht eine Teilalgebra, die als eigenständige Algebra unitär ist. Sie muss nicht unital sein, da ihr Einselement von dem der Ausgangsalgebra verschieden sein kann.
Das Zentrum einer Algebra $A$ bezeichnen wir mit $Z(A)$.
Sind $G$ eine Gruppe, $T$ eine Teilmenge von $G$ und $g \in G$, so seien ${}^{g}$ das Konjugieren mit $g$ und $C_G(T)$ bzw. $N_G(T)$ der Zentralisator bzw. der Normalisator von $T$ in $G$.

Wir steuern zunächst den Satz von Wedderburn über endliche Divisionsalgebren an.

**Proposition 1** *Seien $D$ eine $K$-Divisionsalgebra und $T$ eine unitale endlich-dimensionale Teilalgebra von $D$. Dann ist $T$ eine Divisionsalgebra.*

**Beweis**. Sei $t \in T$ mit $t \neq 0$. Wir betrachten die Abbildungen der Rechts- und Links-Multiplikation mit $t$ auf $T$. Da $D$ eine Divisionsalgebra ist, sind diese Abbildungen injektiv. Da $T$ endlich-dimensional ist, sind sie sogar surjektiv. Insbesondere hat 1 ein Urbild unter beiden Abbildungen. Diese Urbilder sind das Inverse von $t$, welches also in $T$ liegt. $\diamond$

**Proposition 2** *Seien $G$ eine endliche Gruppe und $U$ eine Untergruppe von $G$. Genau dann ist $U = G$, wenn $G$ Vereinigung aller konjugierten Untergruppen von $U$ ist.*

**Beweis**. Ist $U$ ein Normalteiler, so ist die Behauptung offenbar wahr. Sei $U$ eine echte nicht-normale Untergruppe von $G$. Insbesondere gilt $G > N_G(U)$. Die Anzahl der Konjugierten von $U$ ist genau der Index des Normalisators von $U$ in $G$ also $\frac{|G|}{|N_G(U)|}$. Alle Konjugierten haben mindestens das Einselement gemeinsam. Daher folgt:

$$| \bigcup_{g \in G} U^g | \leq 1 + \frac{|G|}{|N_G(U)|} \cdot (| U | -1).$$

Die rechte Seite ist wegen $U \leq N_G(U)$ kleiner oder gleich

$$1 + | G | - \frac{|G|}{|N_G(U)|}.$$

Wegen $G > N_G(U)$ ist dieser Wert echt kleiner als $| G |$.$\diamond$

Wir beweisen den folgenden Satz mit Methoden aus der Theorie der zentral-einfachen assoziativen Divisionsalgebren. Dabei sei $ind(D)$ (genauer $ind_K(D)$) der Index einer zentral-einfachen endlich-dimensionalen assoziativen unitären $K$-Divisionsalgebra, also die eindeutig bestimmte Dimension der maximalen Teilkörper von $D$. Für eine Einführung in diese Theorie verweisen wir den Leser auf [43] und [37].

**Satz 2** *(Wedderburn) Jede endliche Divisionsalgebra ist ein Körper. Insbesondere ist ihre Einheitengruppe zyklisch.*

**Beweis**. Sei $D$ eine endliche Divisionsalgebra, $K := Z(D)$. Dann ist $K$ ein Körper, D eine zentral-einfache endlich-dimensionale assoziative K-Algebra. Da alle maximalen Teilkörper die gleiche Dimension $ind_K(D)$ besitzen, sind sie wegen der Endlichkeit von $D$ von der gleichen Mächtigkeit. Aus der endlichen Körpertheorie ist bekannt, dass gleichmächtige endliche Körper sogar isomorph sind. Nach einem Satz von Skolem-Noether[1]sind sie damit

[1]Albert Thoralf Skolem (geboren 23. Mai 1887 in Sandsvaer; gestorben 23. März 1963 in Oslo) war ein norwegischer Mathematiker, Logiker und Philosoph. Seine Arbeiten lieferten grundlegende Resultate zur mathematischen Logik, insbesondere zu den Bereichen Modelltheorie und Berechenbarkeit. Aber auch zur mathematischen Grundlagenforschung wie Prädikatenlogik, Klassenlogik, Rekursionstheorie, Mengenlehre und Grundlagen der Arithmetik leistete er wesentliche Beiträge, wie auch in der Algebra und Zahlentheorie. Skolem war ein Lehrersohn und studierte ab 1905 in Kristiania (ab 1925 Oslo genannt). Ab 1909 arbeitete er für den Physiker Kristian Birkeland (bekannt für seine Untersuchungen des Nordlichts), mit dem er auch 1913 eine Expedition in den Sudan unternahm. Skolems

sogar in $D$ konjugiert. Jedes Element $d$ von $D$ liegt in einem maximalen Teilkörper, da die von $\{d, 1\}$ erzeugte Teilalgebra von $D$ ein Teilkörper ist (siehe Proposition 1). Somit ist $D$ Vereinigung aller maximalen Teilkörper von $D$. Daraus folgern wir, dass die Einheitengruppe von $D$ Vereinigung der konjugierten Einheitengruppen eines maximalen Teilkörpers von $D$ ist.

---

Dissertation Undersokelser innenfor logikkens algebra (Untersuchungen über die Algebra der Logik) fand viel Beachtung und wurde sogar dem norwegischen König berichtet. 1915 reiste er nach Göttingen, wo er während des Wintersemesters studierte. 1916 kehrte er nach Kristiania zurück und trat unter Axel Thue eine Forschungsstelle an der Universität an, wo er sich zunächst mit dem dort ebenfalls wirkenden Viggo Brun darauf einigte, nicht auf den Doktorgrad hin zu arbeiten. 1918 wurde Skolem Dozent für Mathematik in Kristiania und wurde im selben Jahr Mitglied der Norwegischen Akademie der Wissenschaften. 1926 reichte Skolem eine Dissertation (Einige Sätze über ganzzahlige Lösungen gewisser Gleichungen und Ungleichungen) über Zahlentheorie ein (eigentlich hatten er und sein Freund Viggo Brun beschlossen darauf zu verzichten, da sie das in Norwegen nicht für nötig hielten). Sein eigentlicher Doktorvater, der bekannte Zahlentheoretiker Axel Thue, war damals allerdings schon seit vier Jahren verstorben. 1927 heiratete Skolem Edith Wilhelmine Hasvold und arbeitete weiter an der Universität Oslo, bis er 1930 mit seiner Frau nach Bergen ging, um als Forscher am Christian Michelsen Institut zu arbeiten. Dort arbeitete er bis 1938, als er einem Ruf nach Oslo folgte und dort einen Lehrstuhl für Mathematik übernahm, den er bis zu seiner Emeritierung 1957 behielt. Er hielt nur gelegentlich Vorlesungen über sein eigentliches Gebiet der mathematischen Logik und begründete in Norwegen auch keine Schule. Da er meist in norwegischen Zeitschriften veröffentlichte, blieben einige seiner Ergebnisse unbeachtet, bis andere sie wiederentdeckten. Beispielsweise schrieb er schon 1912 einen Aufsatz über die Theorie der Verbände und charakterisierte 1927 die Automorphismen einfacher Algebren, was später von Emmy Noether wiederentdeckt wurde (Skolem-Noether Theorem). Skolem blieb bis zu seinem Tod wissenschaftlich aktiv. 1954 wurde Skolem vom norwegischen König zum Ritter geschlagen. 1962 erhielt er die Gunnerus-Medaille der Königlichen Norwegischen Gesellschaft der Wissenschaften. Er war Präsident der norwegischen mathematischen Gesellschaft und langjähriger Herausgeber der Norsk Matematisk Tidsskrift und Mathematica Scandinavica. 1962 war er Invited Speaker auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Stockholm (A theorem on recursively enumerable sets) und 1950 in Cambridge (Massachusetts) (Remarks on the foundation of set theory). Mittels der nach ihm benannten prädikatenlogischen Normalform (Skolemform) hat er für den Satz von Löwenheim (1915), dass jeder erfüllbare Ausdruck des Prädikatenkalküls schon in einem höchstens abzählbaren Bereich erfüllbar ist, 1920 einen überschaubaren Beweis gegeben, so dass dieser Satz heute Satz von Löwenheim und Skolem genannt wird. Skolem wies auch 1922 auf die scheinbar paradoxen Konsequenzen dieses Satzes in der axiomatischen Mengenlehre hin ('Skolem-Paradox'). 1929 gab er die erste präzise prädikatenlogische Formalisierung der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre an. Durch Skolem wurde in der Axiomatisierung der Mengenlehre der Schlusspunkt gesetzt, indem er mit den Mitteln der Formalisierung dem Komprehensionsaxiom seine heute übliche Fassung gab. Auf Skolem geht der heute übliche Begriff der primitiv-rekursiven Funktion zurück (1923). Er zeigte, dass die Peano-Arithmetik nicht endlich axiomatisierbar ist. Skolem leistete ferner eine Reihe von Beiträgen zum Entscheidungsproblem. Von ihm stammte der erste Versuch, eine axiomatische Mengenlehre mit uneingeschränktem Komprehensionsaxiom auf der Grundlage einer mehrwertigen Logik aufzubauen. 1933 konstruierte er ein Nichtstandard-Modell der Arithmetik. Im Bereich der Algebra veröffentlichte er 1927 ein heute als Satz von Skolem-Noether bezeichnetes Theorem, wonach je zwei Einbettungen einer einfachen Algebra in eine zentral-einfache Algebra sich nur um die Konjugation mit einem invertierbaren Element unterscheiden. Dieses Resultat wurde unabhängig hiervon auch von Emmy Noether bewiesen.

Mit der vorherigen Proposition 2 folgt nun, dass $D$ mit diesem maximalen Teilkörper übereinstimmt. Der Zusatz folgt aus Satz 1.$\diamond$

Ist $V$ ein $K$-Vektorraum und $T$ eine Teilmenge von $V$, so sei $\langle T\rangle_V$ das $K$-Raumerzeugnis von $T$ in $V$. Mit $GF(p^n)$ bzw. $GF(q)$ bezeichnen wir einen endlichen Körper der Ordnung $p^n$ bzw. $q$ (Galois-Feld).

Aus den bisherigen Ergebnissen erhalten wir zwei Sätze von Herstein:

**Satz 3** *(Herstein) Jede endliche abelsche Untergruppe der Einheitengruppe einer Divisionsalgebra ist zyklisch.*

**Beweis**. Sei $G$ eine endliche abelsche Untergruppe einer Divisionsalgebra $D$. Sie ist zugleich eine $Z(D)$-Algebra. Wir betrachten das $Z(D)$-Erzeugnis von $G$ in $D$. Dieses ist nach obiger Proposition 1 wegen der Endlichkeit von $G$ eine endlich-dimensionale unitale $Z(D)$-Divisionsalgebra. Da $G$ kommutativ ist, liegt sogar ein Körper vor, und $G$ ist eine endliche Untergruppe der Einheitengruppe dieses Körpers. Nach dem vorherigen Satz 1 ist $G$ zyklisch.$\diamond$

**Satz 4** *(Herstein) Jede endliche Untergruppe der Einheitengruppe einer Divisionsalgebra in positiver Charakteristik ist zyklisch.*

**Beweis**. Seien $D$ eine Divisionsalgebra, $P$ der zu $GF(p)$ isomorphe (und zentrale) Primkörper und $G$ eine endliche Untergruppe von $E(D)$. Wir betrachten die unitale $P$-Teilalgebra $\langle G\rangle_P$ der $P$-Divisionsalgebra $D$. Diese ist wegen der Endlichkeit von $G$ nun endlich-dimensional und damit nach Proposition 1 eine Divisionsalgebra über $P$. Da auch $P$ endlich ist, ist diese Divisionsalgebra endlich, und daher nach dem Satz 2 von Wedderburn ein Körper. Nach dem Satz über Körper 1 ist $G$ als endliche Untergruppe daher zyklisch.$\diamond$

**Bemerkung 1** Der vorherige Satz 4 ist in Charakteristik Null falsch. In der reellen Quaternionenalgebra ist die Quaternionengruppe eine endliche, nicht-zyklische Untergruppe.$\diamond$

Herstein und Amitsur[2] haben die endlichen Untergruppen von Divisionsalgebren klassifiziert. Ein erstes rundes Ergebnis hierzu ist das folgende Resultat. Dabei nennen wir eine Gruppe metazyklisch, wenn sie einen zyklischen

[2]Shimshon Avraham Amitsur, geboren als Shimshon Kaplan am 26. August 1921 in Jerusalem, gestorben am 5. September 1994 in Jerusalem) war ein israelischer Mathematiker, der sich mit Algebra befasste. Amitsur wuchs in Tel Aviv auf und begann noch vor dem Zweiten Weltkrieg an der Hebrew University bei Jakob Levitzki zu studieren. Während des Zweiten Weltkriegs diente er als Freiwilliger bei den Jüdischen Brigaden in der Britischen Armee und kämpfte kurz darauf für die Unabhängigkeit des Staates Israel, während er gleichzeitig 1945 sein Diplom machte und 1948 promovierte. Um 1948 änderte er seinen Namen von Kaplan in Amitsur. Er wurde Professor an der Hebrew University und war nach dem Tod seines Lehrers Levitzki der führende Algebraiker in Israel. 1989 wurde er emeritiert. Er engagierte sich auch in der Reform des Mathematikunterrichts an