Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik

Axel Hoppenbrock
Rolf Biehler
Reinhard Hochmuth
Hans-Georg Rück *Hrsg.*

Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase

Herausforderungen und Lösungsansätze

Springer Spektrum

Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik

Die Lehre im Fach Mathematik auf allen Stufen der Bildungskette hat eine Schlüsselrolle für die Förderung von Interesse und Leistungsfähigkeit im Bereich Mathematik-Naturwissenschaft-Technik. Hierauf bezogene fachdidaktische Forschungs- und Entwicklungsarbeit liefert dazu theoretische und empirische Grundlagen sowie gute Praxisbeispiele.
Die Reihe „Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik" dokumentiert wissenschaftliche Studien sowie theoretisch fundierte und praktisch erprobte innovative Ansätze für die Lehre in mathematikhaltigen Studiengängen und allen Phasen der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik.

Axel Hoppenbrock · Rolf Biehler ·
Reinhard Hochmuth · Hans-Georg Rück
Herausgeber

Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase

Herausforderungen und Lösungsansätze

Springer Spektrum

Herausgeber

Axel Hoppenbrock
Institut für Mathematik
Universität Paderborn
Paderborn, Deutschland

Reinhard Hochmuth
Institut für Didaktik der Mathematik und Physik
Leibniz Universität Hannover
Hannover, Deutschland

Rolf Biehler
Institut für Mathematik
Universität Paderborn
Paderborn, Deutschland

Hans-Georg Rück
Institut für Mathematik
Universität Kassel
Kassel, Deutschland

ISBN 978-3-658-10260-9 ISBN 978-3-658-10261-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-10261-6

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort

In mathematikhaltigen Studiengängen sind die ersten Semester oft mit großen Problemen für die Studierenden verbunden. Sie erleben einen großen Unterschied zwischen der Mathematik, die sie aus der Schule kennen und die sie nun ganz anders in der Hochschule erfahren. Dieser „Kulturschock" verbunden mit neuen Anforderungen an eigenverantwortliche Lern- und Arbeitsmethoden ist nicht selten ein entscheidender Grund für die – im Vergleich zu anderen Studiengängen – hohen Abbrecherquoten. Die Hochschuldidaktik Mathematik setzt sich systematisch mit diesen Problemen auseinander, entwickelt Angebote und Konzepte, um die mathematische Hochschullehre zu verbessern sowie Theorien und Methoden, um Problemlagen besser verstehen und analysieren zu können. Die Anzahl fachspezifischer Projekte, die auf Lehrverbesserungen zielen, hat in den letzten 10 Jahren stark zugenommen und durch den im Jahr 2011 vom BMBF gestarteten Qualitätspakt Lehre (www.qualitaetspakt-lehre.de) einen weiteren enormen Schub erfahren.

Um einen Austausch solcher Projekte zu fördern, einen Diskurs auf wissenschaftlicher Ebene zu befördern, und um die Hochschuldidaktik Mathematik (HDM) als wissenschaftliche Disziplin zu formieren, hat das Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (khdm) im Februar 2013 eine Tagung in Paderborn zum Thema „Mathematik im Übergang Schule, Hochschule und erste Studienjahr" organisiert.

Die Tagung fand vom 20.02.2013 bis zum 23.02.2013 an der Universität Paderborn statt und wurde in Verbindung mit zwei gemeinsamen Kommissionen von DMV, GDM und MNU, der „Gemeinsamen Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule" und der „Kommission Lehrerbildung" sowie mit dem vom Verein MNU initiierten Projekt Mathematik „Basiskompetenzen am Ende der Sekundarstufe II" und dem Projekt VEMINT (Virtuelles Eingangstutorium für die MINT-Fächer, ehemals VEMA) durchgeführt.

Der vorliegende Band enthält Ausarbeitungen einer Auswahl der dort gehaltenen Vorträge. Alle Beiträge wurden in einem peer review Verfahren begutachtet.

Das khdm (www.khdm.de) wurde im Jahr 2010 gegründet und hat sich im Laufe der Jahre als gemeinsame wissenschaftliche Einrichtung der drei Universitäten Paderborn, Kassel und Lüneburg etabliert, eine Ausweitung auf die Universität Hannover ist geplant. Das Ziel des khdm ist es u. a. die HDM als wissenschaftliche Disziplin weiter zu entwickeln und zu etablieren, einen Beitrag zur Verknüpfung von Grundlagenforschung und

Lehrinnovationen zu leisten sowie den Austausch der verschiedenen Akteure auf dem Gebiet der HDM zu fördern. Im khdm angesiedelt sind eine Reihe von eigenen Forschungs- und Lehrinnovationsprojekten, zu denen auch Beiträge in diesem Band zu finden sind. Daneben konnte mit der ersten khdm-Arbeitstagung zu Vor- und Brückenkursen im Jahr 2012 ein Beitrag zum Austausch über Hochschuldidaktikprojekte geleistet werden. Dieser Austausch wurde mit der zweiten khdm Tagung im Jahr 2013 intensiviert und ausgebaut. Die Zahl von ca. 100 Teilnehmern im Jahr 2012 stieg auf über 270 im Jahr 2013.

Die erst beginnende Institutionalisierung der HDM zeigt sich auch im europäischen Raum. Dort, wo längerfristig hochschuldidaktische Forschung betrieben wird, hängt sie in der Regel stark an einzelnen Wissenschaftlern. Fest etabliert ist die HDM im nordamerikanischen Raum durch die Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education (RUME), die sich aus der fachmathematischen Mathematical Association of America (MAA) heraus gebildet hat. In Großbritannien existiert mit dem Mathematics Education Centre der Loughborough University ein Forschungszentrum und mit dem zusammen mit der Coventry University gegründeten Sigma-Network eine Struktur von hochschuldidaktischen Initiativen mit dem Schwerpunkt „student support centres for mathematics". In Norwegen wurde im Jahr 2014 das Centre for Research, Innovation and Coordination of Mathematics Teaching (MatRIC) an der University of Agder gegründet. Dieses fokussiert auf das Lehren und Lernen von Mathematik im Service, vor allem der Ingenieursausbildung. Ende 2014 hat sich Kontext der ERME (European Society for Research in Mathematics Education) die Gruppe INDRUM (***I**nternational **N**etwork for **D**idactic **R**esearch in **U**niversity **M**athematics)* gebildet.

Die HDM hat sich im Schnittbereich mehrerer Disziplinen und Fachgebiete entwickelt wie der Fachmathematik, der schulbezogenen Fachdidaktik der Mathematik, der allgemeinen Hochschuldidaktik, der empirische Bildungsforschung, der (pädagogische) Psychologie und der Erziehungswissenschaften. Jede dieser Disziplinen und Fachgebiete hat eigene Forschungsanliegen, methodische Ansprüche und Institutionen. Am engsten ist die Hochschuldidaktik der Mathematik dabei mit der schulbezogenen Didaktik der Mathematik verwandt und verknüpft. Gemeinsam ist beiden Fachgebieten, dass sie sich zwischen klassischen Disziplinen entwickelt haben und sich auf die spezifische Domäne des Lehrens und Lernens von Mathematik in bestimmten Institutionen beziehen. Zudem stehen ihre Projekte stets im Spannungsfeld zwischen pragmatischer Lehrverbesserung und wissenschaftlich begründeter Theoriebildung.

Mit stärkerem Fokus auf pragmatische Verbesserungen der Lehre wurden in den letzten Jahren an verschiedenen Hochschulen Programme zur Verbesserung der mathematikbezogenen Lehre im MINT-Bereich initiiert. Ein großes Forschungs- und Lehrinnovationsfeld im Bereich der HDM sind die Vor- und Brückenkurse. Diese haben sich an fast allen Universitäten als Einstiegshilfe in den Studienstart mit unterschiedlichen Formaten etabliert. Viele neuere Projekte fokussieren auf das erste Studienjahr, in dem ergänzende Angebote wie Lernzentren, Mentorenprogramme oder Zusatzkurse sowie ganz neue Lehrveranstaltungen kreiert wurden. Ferner gibt es Lehrinnovationen in den üblichen Anfängervorlesungen, z. B. durch fachspezifische Tutorenschulungen, Einsatz von kognitiv aktivierenden Lernmethoden oder neue Akzente in den Inhalten oder Prüfungsformen. Diese Lehrinnovationen werden in unterschiedlichem Maße wissenschaftlich begleitet und evaluiert.

Die 2. khdm-Arbeitstagung setzte sich unter anderem zum Ziel, Praxisbeispiele vorzustellen, Ergebnisse aus der hochschuldidaktischen Forschung zu präsentieren und den Austausch zwischen den verschiedenen Akteuren der Hochschuldidaktik zu fördern und damit einen Beitrag zur Entwicklung der Hochschuldidaktik der Mathematik als wissenschaftlicher Disziplin zu liefern.

Wir haben diesen Band, den Charakter der verschiedenen Beiträge auf der Tagung widerspiegelnd, in 4 Bereiche gegliedert: nach den 2 Hauptvorträgen folgen „Best-Practice Beispiele", „Wissenschaftliche Beiträge" und „Diskussionsbeiträge". Je nach dem Typ des Beitrags wurden im Begutachtungsverfahren jeweils etwas andere Kriterien zugrunde gelegt. Wir hoffen, dass dieser Band dazu beiträgt, die genannten Bereiche einander näher zu bringen. So erfährt die wissenschaftliche Forschung im Bereich HDM Anregung durch gute Beispiele der Lehrinnovation. Andererseits bedürfen auch auf Anhieb überzeugend erscheinende Praxisbeispiele einer kritischen wissenschaftlichen Reflektion und einer Überprüfung ihrer tatsächlichen Effekte.

Während sich der Hauptvortrag von Sigrid Blömeke mit den empirischen Studien zum mathematikbezogenen Übergang von Schule zur Hochschule beschäftigt, analysiert Lisa Hefendehl-Hebeker die unterschiedliche mathematische Wissenskonstruktion und -organisation in Schule und Hochschule. Das zweite Kapitel „Best-Practice-Beispiele" führt eine Reihe von Lehrinnovationen und deren Evaluation auf. Diese „Best-Practice-Beispiele" reichen auf der inhaltlichen Ebene von Mathematik im Service über Lehrinnovationen in Fachmathematikveranstaltungen bis hin zu Veranstaltungen mit dem speziellen Fokus auf die Lehramtsausbildung und auf der zeitlichen Ebene von Vor- und Brückenkursen bis hin zu Veranstaltungen in den ersten Semestern. Im dritten Kapitel „Wissenschaftliche Beiträge" werden exemplarisch einige interessante Forschungsergebnisse vorgestellt. Abgerundet wird der Tagungsband durch das vierte und letzte Kapitel „Diskussionsbeiträge", das zu weiteren Forschungs- und Lehrinnovationsvorhaben anregen soll.

Das Erstellen eines Tagungsbandes nach einer Konferenz mit solch großer Beteiligung sowie den sehr intensiven und auch kontroversen Diskussionen ist eine ganz besondere Herausforderung und hat u. a. wegen des gründlichen Begutachtungsverfahrens nun auch einige Zeit erfordert. Wir bedanken uns an dieser Stelle zunächst für die Geduld aller Autorinnen und Autoren. Unser Dank gilt den Gutachterinnen und Gutachtern, die im Wesentlichen aus dem Kreis der Autoren und Koautoren dieses Bandes stammen und sehr zum Gelingen des Bandes beigetragen haben, und natürlich allen Autorinnen und Autoren.

Paderborn, Kassel, Hannover im April 2015

Axel Hoppenbrock,
Rolf Biehler,
Reinhard Hochmuth,
Hans-Georg Rück

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Hauptvorträge

1 Der Übergang von der Schule in die Hochschule: Empirische Erkenntnisse zu mathematikbezogenen Studiengängen

Sigrid Blömeke

Zusammenfassung

Der Übergang von der Schule in die Hochschule stellt – wie frühere Übergänge zum Beispiel von der Grundschule in die Sekundarstufe I – eine schwierig zu bewältigende Anforderung dar. Unterschiedliche Denkweisen und Lehrstile an Schule und Hochschule, die unterschiedliche Organisation der Ausbildungsgänge verbunden mit unterschiedlichen Erwartungen an die Lernstrategien und das Selbstmanagement sowie die neue soziale Situation an der Hochschule führen oftmals zu Problemen der Studierenden. In den mathematisch-naturwissenschaftlichen Studiengängen werden diese aufgrund früher und hoher Abbruchquoten besonders deutlich. In diesem Beitrag wird der Forschungsstand zum Übergang Schule – Hochschule mit einem Schwerpunkt auf der Situation in den mathematikbezogenen Studiengängen einschließlich der Lehrerausbildung zusammengefasst. Dabei wird vor dem Hintergrund des Wandels des Bildungsauftrags der Schule zum einen thematisiert, mit welchen Voraussetzungen die Studierenden heute in die Ausbildung an der Hochschule eintreten. Zum anderen geht es darum, Bedingungsfaktoren zu identifizieren, die Studienerfolg vorhersagen, um Konsequenzen für die Gestaltung der Lehre ziehen zu können. Diese werden mit Blick auf die Förderung der Selbstwirksamkeitserwartung in den mathematikbezogenen Studiengängen konkretisiert.

1.1 Ausgangslage

Der Übergang von der Schule in die Hochschule stellt – wie frühere Übergänge zum Beispiel von der Grundschule in die Sekundarstufe I – eine schwierig zu bewältigende Anforderung dar. Unterschiedliche Denkweisen und Lehrstile an Schule und Hochschule,

Sigrid Blömeke ✉
University of Oslo, Centre for Educational Measurement (CEMO), Oslo, Norwegen
e-mail: sigribl@cemo.uio.no

A. Hoppenbrock et al. (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase*, Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-10261-6_1

die unterschiedliche Organisation der Ausbildungsgänge verbunden mit unterschiedlichen Erwartungen an die Lernstrategien und das Selbstmanagement sowie die neue soziale Situation an der Hochschule führen oftmals zu Problemen der Studierenden.

Im Fach Mathematik werden diese Probleme besonders deutlich. Die mathematikbezogenen Studiengänge weisen laut Bildungsbericht 2012 mit 55 % der Anfängerinnen und Anfänger in einem Bachelor-Studiengang die höchste Abbruchquote aller Studiengänge auf (zum Vergleich: die mittlere Abbruchquote aller Bachelor-Studiengänge an der Universität beträgt 35 %, Autorengruppe Bildungsberichterstattung 2012). Als Hauptgründe für den Studienabbruch geben die Studierenden zum einen eine Überforderung in leistungsmäßiger Hinsicht und zum anderen eine fehlende Sinnkonstruktion an (Heublein et al. 2010). Es fällt ihnen schwer, eine Verbindung der an der Hochschule präsentierten mathematischen Inhalte und Methoden mit späteren beruflichen Anforderungen zu erkennen. Unter motivationalen Gesichtspunkten kann sich eine solch fehlende Verbindung negativ auf das Durchhaltevermögen und letztlich die Studienleistungen auswirken.

Die didaktische Vermittlung mathematischer Inhalte wird für mathematikbezogene Studiengänge entsprechend schlechter beurteilt als für alle übrigen Studiengänge, nur 40 % der Studierenden zeigen sich zufrieden (Autorengruppe Bildungsberichterstattung 2012). Besonders viele Studienabbrüche erfolgen im ersten Jahr und von weiblichen Studierenden (Dieter 2012). Das heißt, dass es sich bei dem Studienabbruch in den mathematikbezogenen Studiengängen zum einen um ein Problem des Übergangs von der Schule in die Hochschule handelt und zum anderen um ein geschlechtsspezifisches Problem. Ersteres erfordert spezifische Anpassungsleistungen, die Hochschulen unterstützen können (Details s. u. im Abschnitt „Was tun? Erfolgreiche Interventionen“). Die geschlechtsspezifischen Probleme sind unter dem Gesichtspunkt der Chancengerechtigkeit und einer optimalen Ressourcenausschöpfung nicht optimal.

Im Zuge der so genannten Bologna-Reform erfolgte auch für die mathematikbezogenen Studiengänge die Umstellung von grundständigen Studiengängen mit einem Diplom oder Staatsexamen als Abschluss auf die mehrstufige Bachelor-Master-Struktur mit Modulen. Allerdings ergab sich nicht – wie erhofft – eine Verbesserung der Abschlussquoten und eine Verringerung des Anteils an Studienabbrüchen und Fachwechseln, sondern die Abbruchquote hat sich im Gegenteil erhöht (Autorengruppe Bildungsberichterstattung 2012). Die Verdichtung der Anforderungen und die höhere Verbindlichkeit der Lehrangebote haben zwar generell zu einer Verkürzung der mittleren Studienzeit beigetragen, gleichzeitig aber die Bereitschaft erhöht, das Fach Mathematik nicht weiter zu verfolgen.

Allerdings zeigt der aktuelle Bildungsbericht, dass sich diese Negativentwicklung für die mathematikbezogenen Studiengänge möglicherweise zu drehen beginnt. Die Studienbedingungen werden unter Betreuungsgesichtspunkten und im Hinblick auf den Umfang des Angebotes neuerdings besser beurteilt als in den übrigen Studiengängen – und die didaktische Qualität scheint ebenfalls zu steigen (Autorengruppe Bildungsberichterstattung 2012). Möglicherweise schlagen sich hier bereits die Anstrengungen nieder, die das Fach in den letzten Jahren aus eigener Initiative unternommen hat, um seine Erfolgsquote und Qualität zu steigern.

1.2 Schule im Spannungsfeld von Allgemeinbildung, Kompetenzorientierung, sozialer Öffnung und Wissenschaftspropädeutik

Die hochschulische Mathematik-Ausbildung baut auf einer Reihe von vorlaufenden Prozessen auf, die aus gesellschaftlichen Gründen nicht rückgängig gemacht werden können oder sollten. So ist die Abiturientenquote innerhalb von 40 Jahren von 6 auf 40 % gestiegen. Insgesamt haben wir – die Allgemeine und die fachgebundenen Hochschulreife zusammengenommen – in den letzten Jahren eine Zunahme auf 50 % Studienberechtigte einer Alterskohorte zu verzeichnen. Festzuhalten ist auch, dass mittlerweile rund ein Drittel der Hochschulzugangsberechtigten nicht von einem allgemeinbildenden Gymnasium kommt (Autorengruppe Bildungsberichterstattung 2012). Diese Veränderungen sind mit Chancen auf höhere Bildung für eine eher untypische Gymnasialklientel verbunden, was die soziale Herkunft angeht, und bedeuten eine Demokratisierung des Schulwesens im Hinblick auf Bildungsgerechtigkeit und Chancengleichheit.

1.2.1 Wandel des Bildungsauftrags des Gymnasiums

Zugleich hat sich der Bildungsauftrag des Gymnasiums in den letzten Jahrzehnten sukzessive gewandelt. Zum einen bringen die dargelegten demographischen Veränderungen – der Ausbau des Anteils an Gymnasialschülerinnen und -schülern einer Alterskohorte und die Herkunft eines substanziellen Anteils von beruflichen Gymnasien – zwangsläufig eine verstärkte Heterogenität mit sich. Parallel und möglicherweise mit diesen Veränderungen zusammenhängend ist die Übergangsquote in ein Studium von früher über 90 % der Studienberechtigten auf unter 70 % zurückgegangen, sodass statt *Tiefe* im Interesse von Wissenschaftspropädeutik als Ziel der gymnasialen Bildung *Breite* im Interesse von Allgemeinbildung stärker in den Mittelpunkt gerückt ist.

Diese Veränderung ging in einigen Bundesländern zu Lasten des Stellenwertes der Mathematik als Unterrichtsfach. Hier ist insofern kritisch zu hinterfragen, was *Allgemeinbildung* bzw. *Breite* in der Schule meinen kann bzw. muss. Es ließe sich beispielsweise argumentieren, dass die Sinus-Funktion genauso zur Allgemeinbildung gehört wie beispielsweise das Lesen klassischer deutscher Literatur, die Erarbeitung historischer Prozesse oder naturwissenschaftlicher Gesetze.

Zum anderen hat der „PISA-Schock“ im Jahr 2001 das Vertrauen der breiten Öffentlichkeit und der Bildungspolitik in die Leistungsfähigkeit des traditionellen deutschen Schulwesens untergraben, indem sich für Deutschland in Bezug auf das Fach Mathematik insbesondere Probleme mit Modellieren und kumulativem Lernen gezeigt haben. Eine Folge war, dass – in Orientierung am konzeptionellen Rahmen der internationalen Vergleichsstudien, für die die PISA-Studien zum bekanntesten Synonym geworden sind – statt kanonisiertem Faktenwissen die Kompetenzorientierung als neues Leitideal der Allgemeinbildung diskutiert wurde.

Parallel wurden für den öffentlichen Sektor neue Steuerungsmodelle diskutiert. Wie im schulischen Bereich dominierte in den übrigen Bereichen des öffentlichen Sektors eine Steuerung der Arbeitsprozesse über so genannte Input-Regelungen, beispielsweise über die Vorgabe von Richtlinien und Budgets. Eine Überprüfung der erreichten Ergebnisse fand in Deutschland traditionell nicht statt. Aufgrund explodierender Kosten für den öffentlichen Sektor und zunehmender Kritik an dessen Leistungsfähigkeit wurde eine verstärkte Orientierung an tatsächlich erreichten Ergebnissen diskutiert (*new public management*), deren Kernmerkmal eine output-Steuerung ist. Hier trafen sich also unterschiedliche Entwicklungslinien, die in dieselbe Richtung wiesen und für das Schulsystem eine grundlegende Neuausrichtung zur Folge hatten.

Kritische Reflexion

Der Wandel des Bildungsauftrags kann in Bezug auf das Gymnasium einerseits als eine wichtige und notwendige Weiterentwicklung seines überlieferten Selbstverständnisses interpretiert werden, die gesellschaftlichen Veränderungen Rechnung trägt. Andererseits steht dieser Wandel hin zu einer kompetenzorientierten Allgemeinbildung, die ggf. noch auf das relativ enge funktionale Verständnis der internationalen Vergleichsstudien verkürzt wird, in einem Spannungsverhältnis zum zweiten Bildungsauftrag des Gymnasiums, der Wissenschaftspropädeutik. Dieses Spannungsverhältnis lässt sich insbesondere dann feststellen, wenn „Wissenschaftspropädeutik“ eher traditionell als rein systematisch-disziplinärer, inhaltsorientierter Zugang verstanden wird.

Einen Zusammenhang zwischen Lerngelegenheiten und Lernergebnissen vorausgesetzt, geht Kompetenzorientierung auf Seiten der Schülerinnen und Schüler insofern vermutlich mit neuen Stärken einher, allerdings vermutlich auch mit neuen Schwächen. Schul- und Unterrichtszeit lassen sich nicht beliebig vermehren, sondern sind begrenzt. Ein neues Bildungsverständnis mit neuen Akzentsetzungen geht notgedrungen mit Einbußen an anderen Stellen einher. Schülerinnen und Schüler erwerben nach den neuen Curricula, die an den nationalen Bildungsstandards orientiert sind, weniger inhaltsgebundenes Wissen, dafür aber früher nicht gekannte prozessbezogenen Kompetenzen.

Dieser Rückgang einer Orientierung an der Inhaltssystematik und der Routinisierung von Fähigkeiten gefährdet im Fach Mathematik allerdings möglicherweise die Voraussetzungen für ein wissenschaftliches Studium. Zudem muss die Frage gestellt werden, inwieweit prozessbezogene Kompetenzen tatsächlich inhaltsunabhängig erworben werden können. Und schließlich ist zu vermuten, dass die Ausbildung von schulischen Spitzenleistungen über Spezialisierungen (z. B. in Form von Leistungskursen) nur schwer mit dem Anspruch einer Allgemeinbildung verknüpfbar ist. Insofern müssen aus einer konzeptionellen Perspektive Einbußen des Wandels festgestellt werden.

Zugleich ist aber zu bedenken, dass auch bei einer starken Ausrichtung des Gymnasiums auf seinen wissenschaftspropädeutischen Charakter schulisch erworbene Kenntnisse und Fähigkeit angesichts des hohen Vermittlungstempos an der Hochschule bereits nach kurzer Zeit nicht mehr weiterhelfen. Insofern stellt sich die Frage, inwieweit die geschilderten Einbußen tatsächlich wirksam werden oder ob die neue Kompetenzorientierung nicht auch produktiv genutzt werden kann.

1.2.2 Empirische Erkenntnisse zu den Studienvoraussetzungen in Mathematik

Unter empirischen Gesichtspunkten deuten einige Studien auf ein Absinken der mathematikbezogenen Lernvoraussetzungen von Studienanfängerinnen und -anfängern über die Zeit hin. Auf der Basis eines 45-minütigen Tests der mathematischen Kenntnisse auf Sekundarstufen-I-Niveau kann Knospe (2011) dieses Absinken beispielsweise anhand einer langfristigen Trenderhebung für die Eingangsvoraussetzungen in Mathematik an den nordrhein-westfälischen Fachhochschulen zeigen. Seit 2002 haben 26.000 Studienanfänger von 13 Fachhochschulen hieran teilgenommen. Nimmt man an, dass Einflüsse von Drittvariablen wenig relevant sind, deutet sich auf der 10-Punkte-Skala eine mittlere Abnahme von 4,0 Punkten im Jahr 2002 über 3,7 Punkte im Jahr 2006 auf aktuell 3,3 Punkte an. Termumformungen, das Lösen von Gleichungen sowie der Umgang mit Potenzen und Logarithmen scheinen besondere Schwierigkeiten zu bereiten.

Unter empirischen Gesichtspunkten ist zu den Eingangsvoraussetzungen weiterhin festzuhalten, dass enorme Unterschiede in der mathematikbezogenen Leistungsfähigkeit der Abiturientinnen und Abiturienten zwischen den Bundesländern bestehen. Es muss ein Süd-Nord-Gefälle konstatiert werden, wie der TOSCA-Leistungsvergleich zwischen Baden-Württemberg und Hamburg zeigt (Trautwein et al. 2007). Diese Unterschiede werden regelmäßig auch für jüngere Schülerinnen und Schüler durch die systematischen Ländervergleiche zum Beispiel im Rahmen von PISA-E (Baumert et al. 2002; Prenzel et al. 2005) oder die Ländervergleichsstudien des IQB deutlich, die auf die nationalen Bildungsstandards ausgerichtet sind (Stanat et al. 2012).

Auffällig ist dabei, dass die Hamburger Schülerinnen und Schüler trotz vergleichbarer Lerngelegenheiten schwächere Mathematikleistungen zeigen. Als Ursache machen Trautwein et al. (2007) zum einen den unterschiedlichen Anteil an Schülerinnen und Schülern aus, die einen Leistungskurs in Mathematik belegen (Hamburg: 18 %, Baden-Württemberg: 34 %) sowie eine geringere Selektivität im Zugang zum Abitur aus: In Hamburg erwirbt ein deutlich größerer Anteil die Studienberechtigung als in Baden-Württemberg. Konkret münden diese Unterschiede in Bezug auf die mathematische Grundbildung, die mit dem Test aus TIMSS III erfasst wurde, dass von den Grundkurs-Schülerinnen und Schülern nur 55 % das als „Regelerwartung“ (über das Anwenden einfacher Routinen hinaus gelingt das Modellieren und Verknüpfen, wobei die Aufgaben oft mehrschrittig sind und der Ansatz erschlossen werden muss) definierte Kompetenzniveau III und nur 10 % das als „Leistungsspitze“ (zusätzlich können die Schülerinnen und Schüler argumentieren) definierte Niveau IV erreichen, während dies in Baden-Württemberg 80 bzw. 25 % gelingt (Trautwein et al. 2007).

In Bezug auf die voruniversitäre Mathematik, ebenfalls mit dem entsprechenden Test aus TIMSS III erfasst, erreichen in Hamburg 50 % der Leistungskurs-Schülerinnen und Schüler, das für diese Kursart als Regelerwartung definierte Niveau III (Anwenden von Oberstufen-Mathematik) und 0 % die Leistungsspitze (Kompetenzniveau IV: selbstständiges Lösen von Aufgaben, die den Einsatz von Oberstufen-Mathematik erfordern). In Baden-Württemberg lauten die Vergleichszahlen 80 und 10 % (Trautwein et al. 2007). In beiden Bundesländern ist dabei auffällig, dass es deutliche Unterschiede zwischen den verschiedenen Schulformen gibt, wie hoch die Anteile an erfolgreichen Schülerinnen und Schülern sind. Die allgemeinbildenden und technischen Gymnasien erreichen durchweg bessere Leistungen als die sonstigen beruflich ausgerichteten Gymnasien.

Die Folgen der Reformen, die auf eine Stärkung der Allgemeinbildung ausgerichtet sind, lassen sich auf der Basis der TOSCA-Repeat-Daten in Baden-Württemberg nachvollziehen (Trautwein et al. 2010). In dieser Studie konnten das landesweite Leistungsniveau in Mathematik vor und nach der Aufhebung des Kurssystems mit fünfstündigen Leistungs- und dreistündigen Grundkursen, die zuvor im Mittel von 35 bzw. 64 % der Schülerinnen und Schüler belegt worden waren, sowie der Einführung verpflichtender Mathematik-Kurse im Umfang von vier Stunden im Klassenverband und der schriftlichen Belegung des Fachs Mathematik im Abitur verglichen werden. Nach den Reformen lässt sich in positiver Hinsicht zum einen festhalten, dass die mittlere Leistung um ein Zehntel einer Standardabweichung anstieg. Dieser Anstieg ist vor allem auf stärkere Leistungen an den nicht-technischen beruflichen Gymnasien zurückzuführen. Zum anderen – und hiermit zusammenhängend – konnte das untere mathematische Leistungsniveau gestärkt werden.

Allerdings geht die Reform mit einer Schwächung der Leistungsspitze insbesondere an Technischen Gymnasien einher, sodass die Variabilität der Leistungen also reduziert wurde. Damit kann das mit der Reform bildungspolitisch verfolgte Ziel als erreicht angesehen werden. Kultusministerin Schavan (politik-digital 2003) hatte die Einführung wie folgt begründet: „Die Reform war nötig, um zu einer besseren fachlichen Grundbildung für alle zu kommen, zu einer Stärkung der Naturwissenschaften, zur Einführung neuer Arbeitsformen und zur Wegnahme überflüssiger Spezialisierungen.“ Die neue Arbeitsform besteht aus Facharbeiten, die von Schülerinnen und Schülern positiv bewertet werden. Zugleich ist allerdings insgesamt eine geringere Leistungsmotivation festzustellen.

Kritische Reflexion

Das oben dargestellt Ergebnis von Knospe (2011) zum Absinken der mathematischen Eingangsvoraussetzungen an den nordrhein-westfälischen Fachhochschulen auf 3,3 Punkte im Mittel muss insofern zum Nachdenken anregen, als der Arbeitskreis Ingenieurmathematik ein Ergebnis von sechs Punkten als Mindestanforderung bezeichnet hat, um realistische Chancen zu haben, ein Ingenieurstudium erfolgreich abzuschließen. Dieser Wert von sechs Punkten wird nur von 18 % aller Testteilnehmerinnen und -teilnehmer erreicht. Selbst von den Absolventinnen und Absolventen eines Leistungskurses in Mathematik gilt, dass lediglich 38 % mindestens 6 Punkte erreichen.

Allerdings muss in diesem Zusammenhang auch darauf hingewiesen werden, dass die Folgen des Wandels im Bildungsverhalten, dem verstärkten Streben nach einer Studienberechtigung, für das berufliche Schulwesen und die duale Ausbildung weit gravierender sind als für den tertiären Bildungssektor. Da nur ein sehr kleiner Anteil an Studienberechtigten eine berufliche Ausbildung aufnimmt, müssen Betriebe und Schulen hier bei gestiegenen Anforderungen – relativ gesehen – mit noch schwächeren schulischen Eingangsvoraussetzungen umgehen, indem sie Schülerinnen und Schüler ausbilden, die noch wenige Jahre zuvor als ungelernte oder angelernte Arbeitskräfte beschäftigt worden wären – eine Option, die der Arbeitsmarkt angesichts des technischen Fortschritts kaum noch anbieten kann.

Was die Veränderungen in Baden-Württemberg durch die Reformen zur Stärkung der Allgemeinbildung angeht, die vermutlich einen bundesweiten Trend einläuten, ist die erreichte Verbesserung mit Vorteilen für Studiengänge verbunden, in denen die Mathematik eine Hilfswissenschaft darstellt, z. B. also für die Sozial- und Wirtschaftswissenschaften. Für Mathematik-Kernstudiengänge, die auf hohe Spezialisierung als Voraussetzung bauen, ist das Ergebnis der Reform daher als negativ zu bewerten.

1.3 Was tun? Erfolgreiche Interventionen

Die Hochschulen müssen sich auf die veränderten Voraussetzungen einstellen. Diese können und sollen nicht mehr rückgängig gemacht werden. Mittlerweile liegt denn auch eine Reihe an empirisch fundierten Beispielen dafür vor, wie sich das mathematische Wissen der Studierenden unmittelbar vor oder zu Studienbeginn fördern lässt. Verwiesen sei zum Beispiel auf das Virtuelle Eingangstutorium für mathematische Vor- und Brückenkurse VEMA (Biehler et al. 2012a, 2012b), auf den Online-Mathematik-Brückenkurs der TU4 (Roegner 2012). Ableitinger et al. (2013) haben zudem als Band 1 der neuen Reihe „Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik“ Ansätze zu Verknüpfungen der Mathematikausbildung mit schulischen Vorerfahrungen zusammengetragen, wie die doppelte Diskontinuität der Lehramtsausbildung gemildert werden kann.

Im Hinblick auf weitere studienrelevante Merkmale hat sich die Förderung von Lernstrategien bewährt. Hier liegen unter anderem empirische Hinweise dazu vor, dass Selbsterklärungsstrategien förderlich sind. Studierende mit entsprechenden höheren Werten sind erfolgreicher beim Modulabschluss und zeigen einen weniger starken Rückgang an Interesse (Rach und Heinze 2013; Rach et al. 2012). Aus dem Projekt Mathe/Plus für Ingenieure wird deutlich, dass sich das Führen eines Lerntagebuchs positiv auf die metakognitiven Lernstrategien der Studierenden auswirkt (Griese et al. 2011a, 2011b).

Ein Schlüsselmerkmal für einen erfolgreichen Studienabschluss stellt die mathematikbezogene Selbstwirksamkeitserwartung dar. Bandura (1977, S. 71) beschreibt ihre Bedeutung wie folgt: „Motivation, Gefühle und Handlungen von Menschen resultieren in stärkerem Maße daraus, woran sie glauben oder wovon sie überzeugt sind, und weniger daraus, was objektiv der Fall ist.“ Selbstwirksamkeitserwartung kann definiert werden als

„[...] subjektive Gewissheit, [...] schwierige Anforderungen aufgrund eigener Fähigkeiten erfolgreich bewältigen zu können“ (Jerusalem 2002, S. 10). Ihre Wirkung ist vielfach empirisch belegt, indem sich Personen mit stärkeren Ausprägungen zielbezogen durch ein höheres Anspruchsniveau, prozessbezogen durch größere Anstrengung und Ausdauer, effektiveres Arbeitszeitmanagement und größere Flexibilität bei der Lösungssuche sowie ergebnisbezogen durch bessere Leistungen und langfristig zudem durch realistischere Selbsteinschätzungen und motivationsförderlichere Erklärungen für die eigene Leistungen auszeichnen.

Nach Deci und Ryan (1985) können Selbstwirksamkeitserwartungen können durch drei Formen an Erfahrung gefördert werden: Kompetenzerleben, soziale Einbindung und Selbstbestimmung. Im Folgenden finden sich Überlegungen, wie solche Erfahrungen im Mathematikstudium ermöglicht werden können. Sie erfordern in einigen Punkten allerdings grundsätzliche Veränderungen im hochschuldidaktischen Handeln der Mathematiklehrenden, insbesondere auf der professoralen Ebene. Zudem kosten sie Zeit, die durch Reduktionen in den curricularen Inhalten gewonnen werden müsste. Zum Teil stellt sich hier also eine ähnliche Herausforderung, mit der die Schule konfrontiert war.

1.3.1 Förderung des mathematikbezogenen Kompetenzerlebens

Das mathematikbezogene Kompetenzerleben kann durch unterschiedliche Maßnahmen gefördert werden (s. im Folgenden Röder und Jerusalem 2007). So haben sich eine Fehlertoleranz sowie die Trennung von Lernsituationen (prinzipiell benotungsfrei, auf eine individuelle Diagnose und Bewertung ausgerichtet, mit individueller Ergebnissicherung – dies könnte beispielsweise während der begleitenden Übungen geschehen) und Leistungssituationen (z. B. in Form von Abschlussklausuren und Modulprüfungen) für schulisches Kompetenzerleben als relevant herausgestellt. Gezeigt hat sich, dass ein ständiger Leistungswettbewerb wenige Gewinner, aber viele Verlierer produziert, womit eine unzureichende Ausschöpfung des Begabungspotenzials verbunden ist. Die Leistungssituation (z. B. also die Semesterabschlussklausur) sollten dabei hinsichtlich ihrer Anforderungen (Lernziele, Aufgabentypen), der Vorbereitungsmöglichkeiten (Lernstrategien, Materialien) und der Bewertung (Kriterien, Gewichtung, Punktevergabe, Notenverhältnis) transparent sein. Auf diese Weise kann Unsicherheit reduziert und eine effizientere Planbarkeit sowie eine bessere Einschätzung des eigenen Leistungsvermögens sowie der eigenen Defizite ermöglicht werden.

Die Unterteilung komplexer Semester-Ziele in konkrete Teilziele (für jedes Semester-Drittel und jede Woche) würde die Wahrscheinlichkeit weiter erhöhen, Erfolge zu erleben, was sich wiederum positiv auf die Anstrengungsbereitschaft der Mathematikstudierenden auswirken sollte. Es bietet sich zudem an, für unterschiedliche Leistungsniveaus jeweils bewältigbare und zugleich herausfordernde Übungsaufgaben zu stellen, die variierenden Kontexten entstammen. Zudem erscheint es wichtig, Angebote zur Sinnkonstruktion zu machen, die insbesondere eine Verbindung der akademischen Mathematik mit typischen beruflichen Anforderungen erleichtert. Schließlich hat sich Modellernen bewährt, z. B. in Form von Lernen durch Erklären oder anhand von Lösungsbeispielen (Renkl 1997, 2002). Angesichts der zentralen Stellung des Beweises in der Mathematik könnten Vorschläge hier das Lernen anhand des Lesens von Beweisen sein und die Beobachtung von Expertinnen und Experten beim Umgang mit Sackgassen.

1.3.2 Förderung der Erfahrung sozialer Einbindung und Selbstbestimmung

Um soziale Einbindung erfahrbar zu machen, ist es wichtig, Mathematikstudierenden häufig, direkt und regelmäßig Feedback zu erreichten Fortschritten im Studium zu geben. Dieses Feedback sollte konstruktiv zu individuellen – also nicht pauschalen – Defiziten erfolgen, indem den einzelnen Studierenden konkrete Möglichkeiten der Weiterarbeit aufgezeigt werden, die für sie bewältigbar sind. Eine andere Form der sozialen Einbindung ist die Nutzung kooperativer Lernphasen auch in der Vorlesung. Dies lässt sich kurzfristig immer in Form von Partnerarbeit ermöglichen.

Weitere Möglichkeiten, die soziale Einbindung erfahrbar zu machen, liegen in einer generell respektvollen Haltung den Studierenden gegenüber: wertschätzendes Verhalten zeigen (z. B. Ausdruck der Freude über die Teilnahme an einer Lehrveranstaltung), Studierende offen loben und ermutigen, Geduld bei Problemen zeigen und kränkendes Verhaltens abbauen (z. B. nicht die zu erwartende Selektion auf einen kleinen Prozentsatz vorhersagen). Als Rahmenbedingung fördert auch ein günstiges emotionales Klimas in der Lehrveranstaltung die Kommunikation. Hierfür hat es sich bewährt, konkrete Regeln aufzustellen und dann bei Verstößen auch konsequent durchzusetzen (z. B. in Hinblick auf Essen oder Laptops). Regelmäßiges Einholen von Feedback seitens der Studierenden, und zwar nicht nur am Ende des Semesters, sondern formativ über kurze mündliche Blitzlichter oder Diskussionen, tragen weiter zur sozialen Einbindung bei.

Zur Förderung von Selbstbestimmungserfahrungen bietet es sich an, Wahlmöglichkeiten innerhalb von Lehrveranstaltungen zu geben, was beispielsweise die Inhalte und Aufgaben, den Ort, Zeitpunkt und die Form der Bearbeitung von Übungsaufgaben angeht. Wahlmöglichkeiten im Studium, sodass nicht alles Pflichtmodule sind, sollten sich ebenfalls günstig auf das Erleben von Selbstbestimmung auswirken. Die Bachelor-Master-Reform hat die entsprechenden Möglichkeiten allerdings deutlich eingeschränkt, da der Pflichtanteil gerade im Mathematikstudium heute sehr hoch ist.

1.4 Schlussfolgerungen

Die dargestellten Maßnahmen führen vermutlich nicht zu einer Verringerung der Leistungsunterschiede zwischen leistungsstarken und leistungsschwachen Mathematikstudierenden, da weiterhin eine hohe Korrelation von mathematikbezogenen Studienvoraussetzungen und im Studium erreichten Ergebnissen bestehen wird. Zu erwarten ist aber eine Steigerung der mittleren Mathematikleistung auf einem insgesamt höheren Niveau sowie eine größere Unabhängigkeit der Studienergebnisse von der sozialen Herkunft und dem Geschlecht. Im Hinblick auf Chancengleichheit und Bildungsgerechtigkeit sind dies wichtige Ziele. Zudem würde die stärkere Individualisierung auch zu einer besseren Herausbildung einer Leistungsspitze beitragen. Insgesamt ist allerdings dringend umfangreiche empirische Forschung nötig, um die Annahmen dieses Beitrags zu überprüfen. Hier ist von den Erkenntnissen aus den mathematikbezogenen Projekten des Förderprogramms KoKoHs – also insbesondere KoM@ING, MoKoMasch, KomMa – Weiterführendes zu erwarten.

Die spezifische Aufgabe des KHDM könnte in den nächsten Jahren darin bestehen, Professionelle Lerngemeinschaften (PLGs) unter den Hochschullehrenden anzuregen, in denen versucht wird, einige der obigen Vorschläge umzusetzen. Zudem sollte das Kompetenzzentrum auf präzise Begriffsdefinitionen, präzise Wirkungsmodellierungen, Abstimmung der Instrumente und empirische Prüfungen drängen sowie die Anschlussfähigkeit der laufenden Studien untereinander zu sichern, sodass eine Kumulativität der Ergebnisse erreicht wird.

Literatur

Ableitinger, C., Kramer, J., & Prediger, S. (Hrsg.). (2013). *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Autorengruppe Bildungsberichterstattung (2012). *Bildung in Deutschland 2012. Ein indikatorengestützter Bericht mit einer Analyse zur kulturellen Bildung im Lebenslauf. Im Auftrag der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland und des Bundesministeriums für Bildung und Forschung*. Bielefeld: Bertelsmann.

Bandura, A. (1977). *Social Learning Theory*. New York: General Learning Press.

Baumert, J., Artelt, C., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., & Schiefele, U. et al. (Hrsg.). (2002). *PISA 2000: Die Länder der Bundesrepublik Deutschland im Vergleich*. Opladen: Leske + Budrich.

Biehler, R., Fischer, P., Hochmuth, R., & Wassong, T. (2012). Designing and evaluating blended learning bridging courses in mathematics. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Hrsg.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 1971–1980). Rzeszów, Polen: University of Rzeszów.

Biehler, R., Hoppenbrock, A., Klemm, J., Liebendörfer, M., & Wassong, T. (2012b). Training of student teaching assistants and e-learning via math-bridge – Two projects at the German Centre for Higher Mathematics Education. In D. Waller (Hrsg.), *CETL-MSOR Conference Proceedings 2011* (S. 21–27). Vereinigtes Königreich: The Maths, Stats & OR Network.

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (1985). *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior*. New York: Plenum.

Dieter, M. (2012). *Studienabbruch und Studienfachwechsel in der Mathematik: Quantitative Bezifferung und empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren*. Dissertation. Universität Duisburg-Essen, Duisburg/Essen.

Griese, B., Kallweit, M., & Rösken, B. (2011a). Mathematik als Eingangshürde in den Ingenieurwissenschaften. In R. Haug, & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (Bd. 1, S. 319–322). Münster: WTM-Verlag.

Griese, B., Glasmachers, E., Kallweit, M., & Rösken, B. (2011b). Supporting engineering students in mathematics. In B. Ubuz (Hrsg.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 1, S. 304). Ankara, Türkei: PME.

Heublein, U., Hutzsch, C., Schreiber, J., Sommer, D., & Besuch, G. (2010). *Ursachen des Studienabbruchs in Bachelor- und in herkömmlichen Studiengängen – Ergebnisse einer bundesweiten Befragung von Exmatrikulierten des Studienjahres 2007/08*. Hannover: HIS.

Jerusalem, M. (2002). Einleitung. *Zeitschrift für Pädagogik*, *44*(Beiheft), 8–12.

Knospe, H. (2011). Der Eingangstest Mathematik an Fachhochschulen in Nordrhein-Westfalen von 2002 bis 2010. Proceedings des 9. Workshops Mathematik für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge. *Wismarer Frege-Reihe*, 02/2011, 8–13.

politik-digital (2003). Die Auswertung der neuen Oberstufe zeigt, dass es keine schlechteren Noten im ersten Halbjahr im Landesschnit. http://politik-digital.de/die-auswertung-der-neuen-oberstufe-zeigt-dass-es-keine-schlechteren-noten-im-ersten-halbjahr-im-landesschnit. Zugegriffen: 20. Januar 2015

Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., Lehmann, R., Leutner, D., & Neubrand, M. et al. (Hrsg.). (2005). *PISA 2003: Der zweite Vergleich der Länder in Deutschland – Was wissen und können Jugendliche?* Münster: Waxmann.

Rach, S., & Heinze, A. (2013). Welche Studierenden sind im ersten Semester erfolgreich? Zur Rolle von Selbsterklärungen beim Mathematiklernen in der Studieneingangsphase. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *34*(1), 121–147. doi:10.1007/s13138-012-0049-3.

Rach, S., Ufer, S., & Heinze, A. (2012). Lernen aus Fehlern im Mathematikunterricht – kognitive und affektive Effekte zweier Interventionsmaßnahmen. *Unterrichtswissenschaft*, *40*(3), 213–234.

Renkl, A. (1997). Learning from Worked-Out Examples: A Study on Individual Differences. *Cognitive Science*, *21*(1), 1–29.

Renkl, A. (2002). Learning from worked-out examples: Instructional explanations supplement self-explanations. *Learning and Instruction*, *12*, 529–556.

Röder, B., & Jerusalem, M. (2007). Implementationsgrad und Wirkungen eines Programms zur Förderung von Selbstwirksamkeit. *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, *54*, 30–46.

Roegner, K. (2012). *TuMult: A comprehensive blended learning model utilizing the Mumie platform for improving success rates in mathematics courses for engineers*. Habilitationsschrift. Technische Universität Berlin.

Stanat, P., Pant, H. A., Böhme, K., & Richter, D. (Hrsg.). (2012). *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011*. Münster: Waxmann.

Trautwein, U., Köller, O., Lehmann, R., & Lüdtke, O. (Hrsg.). (2007). *Schulleistungen von Abiturienten: Regionale, schulformbezogene und soziale Disparitäten*. Münster: Waxmann.

Trautwein, U., Neumann, M., Nagy, G., Lüdtke, O., & Maaz, K. (Hrsg.). (2010). *Schulleistungen von Abiturienten: Die neu geordnete gymnasiale Oberstufe auf dem Prüfstand*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule

2

Lisa Hefendehl-Hebeker

Zusammenfassung

Mathematik als Wissenschaft hat eine Jahrtausende währende Entwicklungsgeschichte. Die Umgangsweisen mit Mathematik an Schule und Hochschule entsprechen verschiedenen Stadien in diesem Entwicklungsprozess und unterscheiden sich in Bezug auf Inhalte, theoretischen Anspruch und Darstellungsmittel. An der Hochschule haben Studierende des Faches Mathematik im Vergleich zu ihren schulischen Erfahrungen ein schnelleres Tempo, eine größere Fülle an Inhalten, einen höheren Grad an Abstraktion und ein stärkeres Maß an Formalisierung zu bewältigen. Zusätzlich müssen sie einen neuen professionellen Habitus mit zugehörigen Einstellungen, Normen und Gepflogenheiten erwerben. Der vorliegende Beitrag verfolgt das Ziel, diese Thesen genauer auszuführen und durch Beispiele zu belegen.

2.1 Verschiedene Stufen der Wissensbildung

> Die Mathematik ist ein Organ der Erkenntnis und eine unendliche Verfeinerung der Sprache. Sie erhebt sich aus der gewöhnlichen Sprache und Vorstellungswelt wie eine Pflanze aus dem Erdreich, und ihre Wurzeln sind Zahlen und einfache räumliche Vorstellungen … Wir wissen nicht, welcher Inhalt die Mathematik als die ihm allein angemessene Sprache verlangt, wir können nicht ahnen, in welche Ferne und Tiefe dieses geistige Auge den Menschen noch blicken lässt (Kähler 1955, zitiert nach Zeidler 2009, S. 556).

Dieses Zitat beschreibt in prägnanter Weise, dass die Mathematik aus elementaren Wurzeln entstanden und zu einem hoch entwickelten Forschungsgebiet herangewachsen ist, wobei nicht abgesehen werden kann, in welche Bereiche die Dynamik dieser Wissenschaft noch vordringen wird. Die Mathematik in der Schule befindet sich nah an den Wurzeln, die

Lisa Hefendehl-Hebeker ✉
Universität Duisburg-Essen, Fakultät für Mathematik, Essen, Deutschland
e-mail: lisa.hefendehl@uni-due.de

A. Hoppenbrock et al. (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase*, Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-10261-6_2

Mathematik an der Hochschule dagegen in einem weit fortgeschrittenen Stadium dieses Prozesses. Daraus ergeben sich grundlegende Unterschiede in Bezug auf die verhandelten Inhalte, die Stufe der Theoriebildung, die Art der Darstellungsmittel und die begleitenden Standards, Konventionen und Zielsetzungen.

2.1.1 Inhalt und Abstraktionsniveau

> Our mathematical concepts, structures, ideas have been invented as tools to organise the phenomena of the physical, social and mental world. Phenomenology of a mathematical concept, structure, or idea means describing it in its relation to the phenomena for which it was created, and to which it has been extended in the learning process of mankind ... (Freudenthal 1983, S. ix).

Im Sinne dieser Sprechweise haben die Begriffe und Inhalte der Schulmathematik ihre phänomenologischen Ursprünge überwiegend in der uns umgebenden Realität. „Most concepts in school mathematics can be traced back to an origin in material physical activities of some sort or another (such as counting, measuring, drawing, constructing)." (Dörfler 2003, S. 154) Die Geometrie (synthetisch und analytisch) ist auf das Erkennen und Beschreiben von Strukturen in unserer Umwelt und somit auf den dreidimensionalen Anschauungsraum bezogen, der Umgang mit Zahlen, Größen und Funktionen findet seine Sinngebung vorwiegend in der Lösung lebensweltlicher Probleme und die Stochastik betrachtet Zufallserscheinungen in alltagsweltlichen Situationen. „Dies alles kann durchaus intellektuell anspruchsvoll behandelt werden, auch mit lokalen Deduktionen, wo sie der Erkenntnissicherung dienen oder der Arbeitsökonomie." (Kirsch 1980, S. 231). Jedoch bleibt insgesamt die ontologische Bindung an die Realität bestehen, wie es bildungstheoretisch und entwicklungspsychologisch durch Aufgabe und Ziele der allgemeinbildenden Schule gerechtfertigt ist. Damit geht die Schulmathematik kaum über das begriffliche Niveau und den Wissensstand des 19. Jahrhunderts hinaus.

Seitdem hat das mathematische Wissen „einen geradezu exponentiellen Zuwachs" (Wußing 2009, S. VIII) erfahren und die Phänomenologie hat sich grundlegend geändert. Stichworte wie „Axiomatische Methode" und „Lösen der ontologischen Bindung" deuten an, dass moderne mathematische Theorien in erster Linie „deduktiv geordnete Welten eigener Art" (Winter 1995) sind, die Phänomene der mentalen Welt, dargestellt als abstrakte Mengen mit spezifischen Struktureigenschaften, organisieren (was in einem eigenartigen Spannungsverhältnis zu ihrer hochgradigen Anwendungsrelevanz steht). Dazu haben komplexe Prozesse der fortlaufenden Restrukturierung vorhandener und der Begründung neuer Theorien geführt. Bedürfnisse nach Ausweitung und zugleich tieferer Fundierung sowie streng logischer Hierarchisierung von Wissensbeständen waren dabei maßgebliche Triebkräfte. Mathematik als wissenschaftliche Disziplin ist heute zu einem Geflecht hoch spezialisierter abstrakter Teilgebiete geworden. Dazu legt die Schule elementare Grundlagen, arbeitet aber „ohne Preisgabe des naiven Weltbildes" (Kirsch 1980, S. 230) und bildet nur eine Vorstufe zur Hochschulmathematik.

2.1.2 Begriffsbildungshierarchien

Da die Schulmathematik sich nah an den Wurzeln des Fachgebietes bewegt, sind ihre Begriffsbildungen noch vergleichsweise elementar. Geometrische Begriffe wie „Kreis" und „Würfel" erfassen Formen, die an einzelnen Gegenständen ablesbar sind. Schwieriger sind bereits Relationsbegriffe wie „senkrecht", die zwei Objekte in Beziehung setzen. Weit komplexer sind Zahlbegriffe, weil Zahlen in einem reichhaltigen relationalen Gefüge zu anderen Zahlen stehen und unter vielen Aspekten erscheinen können. Sehr komplex werden Begriffsbildungen, die aus gedachten Prozessen auf dem Wege der „Einkapselung" mentale Objekte auf höherer Ebene konstituieren (Dubinsky und Harel 1992), die wiederum Operationen unterworfen und zu Objektklassen zusammengefasst werden können.

Eine Funktion stellt in einer ursprünglichen Sichtweise einen (in der Zeit ablaufenden) Prozess der Zuordnung zwischen Größen dar. Von einem höheren Standpunkt aus betrachtet kann eine Funktion zu einem geschlossenen Objekt werden, das man als Ganzes manipulieren kann, indem man es zum Beispiel mit anderen Funktionen verkettet oder verknüpft oder als Glied einer Funktionenfolge auffasst. Die Nebenklassen einer Untergruppe vereinigen diejenigen Gruppenelemente, die sich nur um ein Element der betreffenden Untergruppe unterscheiden. Diese Nebenklassen werden dann selbst wieder als Elemente einer Faktorgruppe aufgefasst, auf die Operationen und Morphismen angewendet werden können.

Solche Prozesse der „Objektivierung" (Radford 2010) oder „Reification" (Sfard 1995, 2000) kommen in der Schule nur in Ansätzen vor, vor allem in der Algebra der Termumformungen und bei der Betrachtung von Folgen und Funktionen sowie geometrischen Vektoren und stellen hier bereits erhebliche Anforderungen an das Verständnis. In der Hochschulmathematik spielen sie von Anfang an in vielen Zusammenhängen eine wichtige Rolle und können bis ins Akrobatische gestaffelt werden. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn Faktorgruppen aus Faktorgruppen betrachtet oder die Reellen Zahlen mit Hilfe von Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen konstruiert werden. Zum Nachweis der Vollständigkeit des so gewonnenen Zahlkörpers sind Cauchy-Folgen zu betrachten, deren Glieder aus Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen rationaler Zahlen bestehen.

Diese Prozesse erfordern nicht nur das gedankliche Konzipieren neuer Objekte, sondern auch einen flexiblen Wechsel zwischen der Gesamtsicht des Objektes und der Auflösung in seine einzelnen Zustände bzw. Bestandteile (siehe dazu auch das Beispiel im zweiten Abschnitt). Ein solcher Wechsel wird notwendig,

- wenn für eine Funktion bestimmte Eigenschaften (Linearität, Monotonie ...) nachzuweisen sind,
- wenn die Verkettung von zwei Abbildungen auf bestimmte Merkmale untersucht wird und
- wenn für eine Faktorstruktur die Wohldefiniertheit der Verknüpfung gezeigt werden soll.

2.1.3 Darstellungsmittel

Die Entwicklung der Mathematik zu einem Theoriegebäude abstrakter mentaler Konstrukte hat ein äußeres Pendant in den verwendeten Darstellungsmitteln.

> In *Fachpublikationen* wird Mathematik präsentiert in einer restriktiven konventionalisierten Fachsprache, die wie die Gemeinsprache weitgehend durch lineare Zeichenfolgen dargestellt wird und sich gegenwärtig in der Regel auf die Semantik der Mengenstrukturen bezieht. Die restriktiven Konventionen sind Resultat des Strebens der Mathematiker nach *Konsens* und *Kohärenz* größtmöglichen Ausmaßes (Wille 2005, S. 6).

Somit ist die mathematische Fachsprache ein hoch entwickeltes Artefakt, das eine *große Informationsdichte auf kleinem Raum* erzeugt und dessen verständige Handhabung eine eigene Expertise erfordert. Mathematik in der Schule nimmt diese Kunstsprache nur in moderaten Ansätzen in Gebrauch und bedient sich überwiegend einer mit Fachwörtern durchsetzten natürlichen Sprache.

2.1.4 Zeichen und Bedeutung: das epistemologische Grundproblem

Mathematische Inhalte sind nicht identisch mit ihren materialisierten Ausdrucksformen. Ein symbolischer Ausdruck wie eine unterstützende Graphik liefern nur ein sichtbares Gerüst für einen weiten Kosmos an Bedeutung. Dieser erschließt sich in dem Maße, wie sich, in der Diktion von Tall und Vinner (1981) gesprochen, hinter einer formalen „concept definition“ ein reichhaltiges „concept image“ auftut. Wer sich mit Mathematik beschäftigt, bewegt sich in einem dialektischen Verhältnis zwischen Zeichen und Bedeutung, Syntax und Semantik.

Dieses Spannungsverhältnis zwischen Zeichen und Bedeutung als grundlegende Triebkraft mathematischen Denkens hat Charles S. Peirce (1839–1914) in seiner Theorie des diagrammatischen Denkens genauer zu erklären versucht (Hoffmann 2005). Dabei fasst er unter den Begriff „Diagramm“ jede Art von Darstellungsmitteln in der Mathematik, für die es Regeln und Konventionen der Herstellung und des Gebrauchs gibt. Nicht nur bereichsspezifische graphische Darstellungen wie geometrische Figuren, Funktionsgraphen, Hasse-Diagramme usw. sind Diagramme in diesem Sinne, sondern auch Symbolsequenzen oder Symbolkonfigurationen wie Vektoren und Matrizen. Im Zentrum des mathematischen Denkens steht das „diagrammatische Schließen“ als eine Erkenntnistätigkeit, die an der Konstruktion von Darstellungen und dem Experimentieren mit solchen orientiert ist. Dabei fungieren die Zeichen als Erkenntnismittel im doppelten Sinne. Als äußere Mittel liegen sie konkret und verwirklicht vor uns. Als innere Mittel sind sie Werkzeuge des Geistes, die uns erlauben, die Welt um uns zu konzeptualisieren und zu organisieren, und damit auch „Möglichkeitsräume“ eröffnen. Zeichen werden dann zum inneren Mittel der Erkenntnis, wenn sie uns so vertraut sind, dass wir dahinter etwas Repräsentiertes wahrnehmen. Für den Umgang mit Zeichen ist immer bereits „kollaterales“ (begleitendes) Wissen notwendig. Das kann kulturell vermitteltes Wissen allgemein oder spezielles Wissen einer Gemeinschaft sein. Das Spezialwissen der in der mathematischen Forschung Tätigen geht jedoch weit über das im Schulunterricht vermittelte mathematische Wissen hinaus. Dieser Vorsprung betrifft sowohl fachliche Inhalte wie auch fachinterne Gepflogenheiten.

Der Ansatz von Peirce erklärt im Übrigen auch, warum in der Mathematik Freiheit und Gebundenheit, Kreativität und logische Strenge zusammen wirken. Einerseits eröffnen Diagramme kreative Spielräume, weil sie für Interpretationen offen sind und spielerische Veränderungen erlauben (z. B. ein Vorzeichen umzudrehen, einen zusätzlichen Faktor in Betracht zu ziehen). Andererseits enthält das Experimentieren mit Diagrammen den Charakter logischen Schließens, weil seine Ergebnisse durch die Regeln des Darstellungssystems bestimmt sind.

Der Umgang mit der mathematischen Fachsprache erfordert die Ausbildung einer Lesefähigkeit für symbolische Ausdrücke, die es ermöglicht, diese sinnvoll zu interpretieren und Informationen aus ihnen abzulesen, wie auch die Fähigkeit, diese Ausdruckmittel flexibel und sinnvoll als Werkzeug einzusetzen. Beides zusammen fasste Arcavi (1994) unter den Begriff „structure sense". Beispiele weiter unten werden zeigen, dass dessen Ausbildung mehr Anstrengung und auch begleitendes Wissen (s. o.) erfordert, als oftmals angenommen wird.

2.2 Die erlebte Diskontinuität zwischen Schule und Hochschule

„Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, an denen ihn nichts mehr an das erinnert, womit er sich bisher beschäftigt hat[. . .]" (Klein 1908, S. 1). Diese vor mehr als hundert Jahren getroffene Feststellung hat auch heute noch eine weit reichende Aktualität. Das haben die Ausführungen zu den unterschiedlichen Stufen der Wissensbildung bereits deutlich gemacht. Im Folgenden soll die erlebte Diskrepanz aus Sicht der Studierenden noch einmal an drei Problemkreisen erläutert und durch Beispiele belegt werden.

2.2.1 Umgang mit der Fachsprache

Die mathematische Fachsprache erzeugt, wie bereits festgestellt, eine *hohe Informationsdichte auf kleinem Raum.* Welche Anforderungen allein die Ausbildung einer mathematischen Lesefähigkeit stellt, sei an einigen Aspekten genauer beleuchtet.

Mathematische Lesefähigkeit

In dem Ausdruck $M_{n,m}(K)$ für den Ring der $m \times n$-Matrizen über einem Körper K trägt jedes Zeichen zusammen mit seiner Position in der Zeichenfolge und der Art seiner Verwendung (z. B. als Index oder als Hauptzeichen) eine Information. Diese Tatsache allein