



Klaus Röbenack

Nichtlineare Regelungssysteme

Theorie und Anwendung
der exakten Linearisierung

Nichtlineare Regelungssysteme

Klaus Röbenack

Nichtlineare Regelungssysteme

Theorie und Anwendung der exakten Linearisierung

Klaus Röbenack
TU Dresden
Dresden
Deutschland

Die Darstellung von manchen Formeln und Strukturelementen war in einigen elektronischen Ausgaben nicht korrekt, dies ist nun korrigiert. Wir bitten damit verbundene Unannehmlichkeiten zu entschuldigen und danken den Lesern für Hinweise.

ISBN 978-3-662-44090-2 ISBN 978-3-662-44091-9 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-44091-9>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer-Verlag GmbH Deutschland 2017

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Deutschland

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Nichtlineare Regelungs- und Steuerungsverfahren kommen überall dort zum Einsatz, wo die Leistungsfähigkeit linearer Methoden an ihre Grenzen stößt. An- und Abfahrvorgänge bzw. Arbeitspunktwechsel in chemischen Reaktoren, die hochpräzise Lageregelung von Starrkörpern im Raum (beispielsweise Effektoren von Industrierobotern oder autonome Flugkörper) oder die Regelung leistungselektronischer Baugruppen mögen als Beispiele dienen. Vor diesem Hintergrund verwundert es nicht, dass Ansätze zur nichtlinearen Regelung in der industriellen Praxis zunehmend auf Interesse stoßen, um die Ausbeute und Zuverlässigkeit der zugrundeliegenden technischen Prozesse zu erhöhen. Gleichwohl ist der in der nichtlinearen Regelungstheorie verwendete mathematische Apparat gefürchtet. Genau an dieser Stelle setzt dieses Lehrbuch an: Die Darstellung ist einerseits in sich mathematisch schlüssig und nachvollziehbar, andererseits aber auch in einer für Ingenieure verständlichen Sprache formuliert. Der inhaltliche Fokus des Buches liegt dabei auf der Methode der exakten Linearisierung zum Regler- und Beobachterentwurf.

Das Buch richtet sich maßgeblich an Studierende der Elektrotechnik und Mechatronik in der Vertiefungsrichtung Automatisierungs- bzw. Regelungstechnik, die bereits über fortgeschrittene regelungstechnische Kenntnisse verfügen. Doktoranden können anhand des Buches ihr systemtheoretisches bzw. regelungstechnisches Verständnis nichtlinearer Systeme vertiefen. Für Ingenieure in der Industrie, die mit der Regelung nichtlinearer Systeme konfrontiert sind, werden verschiedene Entwurfsansätze detailliert beschrieben.

Im **Teil I** des Buches werden nach einigen Einführungsbeispielen die benötigten mathematischen Konzepte aus den Bereichen der linearen Algebra, der Vektoranalysis bzw. der Differentialgeometrie vermittelt. Zur Festigung der Lehrinhalte sind am Ende der **► Kap. 2** und **3** Übungsaufgaben vorgesehen. Die **Teile II** und **III** behandeln den Regler- bzw. Beobachterentwurf. Die jeweilige Herangehensweise bzw. Entwurfsmethodik wird an verschiedenen Beispielen veranschaulicht bzw. durch den Einsatz des Open-Source-Computeralgebrasystems MAXIMA illustriert.

Erste Skizzen zum vorliegenden Buch entstanden in Verbindung mit der Vorlesung „Mathematische Grundlagen der nichtlinearen Regelungstheorie“, die ich im Sommersemester 2006 an der Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften der TU Dresden hielt. Diese Lehrveranstaltung führe ich seit 2007 als Wahlpflichtfach „Nichtlineare Regelungstechnik 2“ für verschiedene Ingenieurstudiengänge fort. Meine zehnjährige Lehrtätigkeit in diesem Gebiet hat das vorliegende Buch maßgeblich geprägt.

Es ist mir ein Bedürfnis, zuallererst meinem Lehrer, Herrn Prof. Kurt Reinschke, für seine langjährige Unterstützung zu danken. Besonderer Dank gilt auch Herrn Prof. Andreas Griewank für seine Anregungen zur Beschäftigung mit dem algorithmischen Differenzieren. Ebenso möchte ich Herrn Prof. Wolfgang V. Walter danken, durch den ich in den Jahren 2006 bis 2007 die Vertretung der Professur „Wissenschaftliches Rechnen und Angewandte Mathematik“ wahrnehmen konnte.

Bei der Gestaltung der dem Buch zugrundeliegenden Vorlesung und der Konzeption des Manuskripts haben mich zahlreiche Diplomanden, heutige und ehemalige Mitarbeiter und Doktoranden unterstützt. Besonderer Dank gilt Dr. Carsten Knoll, der das Buch durch zahlreiche Verbesserungsvorschläge erheblich bereichert hat. Außerdem danke ich

Dr. Jan Winkler, Dr. Matthias Franke und Prof. Frank Woittennek für die interessanten und hilfreichen Diskussionen während der Entstehung dieses Buches. Herrn M.Sc. Rick Voßwinkel danke ich für die sehr gewissenhafte Durchsicht des Manuskripts. Mein Dank gebührt auch Dr. Carsten Collon, Dipl.-Ing. Mirko Franke, Dipl.-Ing. Chenzi Huang, Dipl.-Ing. Fabian Paschke, Dipl.-Ing. Klemens Fritzsche, Dipl.-Ing. Gunter Nitzsche und Dipl.-Ing. Robert Huber.

Zahlreiche Diskussionen bei Konferenzen, Tagungen und Workshops haben mein Verständnis für nichtlineare Systeme vertieft. Für fachliche Anregungen möchte ich daher Dr. Albrecht Gensior (TU Dresden), Associate Prof. Pranay Goel (Indian Institute of Science Education and Research, Pune), PD Dr. Lutz Gröll (Karlsruher Institut für Technologie), Prof. Alan F. Lynch (University of Alberta, Kanada), Prof. Jaime A. Moreno (Universidad Nacional Autónoma de México), Prof. Joachim Rudolph (Universität des Saarlandes), Prof. Andrea Walther (Universität Paderborn) und Prof. Zeitz (Universität Stuttgart) danken.

Frau Eva Hestermann-Beyerle und Frau Birgit Kollmar-Thoni vom Springer-Verlag danke ich für die angenehme Zusammenarbeit. Mein Dank gilt auch dem De Gruyter-Verlag für die Nutzungsgenehmigung im Zusammenhang mit ► [Kap. 7](#). Meiner Frau und meinen Kindern danke ich für ihre Geduld und ihr Verständnis.

Dresden, März 2017

Klaus Röbenack

Inhaltsverzeichnis

I Vorbereitung

1	Motivationsbeispiele	3
1.1	mobiler Roboter	4
1.2	Wagen mit Pendel	6
1.3	Hochsetzsteller	8
	Literatur	9
2	Mathematische Grundlagen	11
2.1	Lineare Algebra	12
2.2	Felder und Ableitungen	17
2.3	Vektorfelder und Flüsse	23
2.4	Übungsaufgaben	39
2.5	Lösungen	39
	Literatur	41
3	Differentialgeometrische Begriffe	43
3.1	Differentialoperatoren	44
3.1.1	Lie-Ableitung eines Skalarfeldes	44
3.1.2	Pushforward und Pullback eines Vektorfeldes	50
3.1.3	Lie-Ableitung eines Vektorfeldes	55
3.1.4	Pullback und Lie-Ableitung eines Kovektorfeldes	63
3.2	Lie-Klammern und dynamische Systeme	68
3.3	Distributionen und Kodistributionen	76
3.4	Involutive Distributionen	83
3.5	Differentialformen	95
3.6	Übungsaufgaben	104
3.7	Lösungen	105
	Literatur	108

II Reglerentwurf

4	Reglerentwurf mittels exakter Linearisierung	113
4.1	Exakte Eingangs-Ausgangs-Linearisierung für eingangsaffine Systeme	115
4.1.1	Relativer Grad und grundsätzliches Vorgehen	115
4.1.2	Byrnes-Isidori-Normalform	125
4.1.3	Reglerentwurf zur Stabilisierung einer Ruhelage	135
4.1.4	Nulldynamik	140
4.1.5	Äquivalenz von Systemen und globale Stabilisierung	146
4.2	Exakte Eingangs-Zustands-Linearisierung	149

4.2.1	Problemformulierung	149
4.2.2	Problemlösung über Distributionen	151
4.2.3	Problemlösung über Differentialformen	159
4.2.4	Maximaler relativer Grad	163
4.3	Exakte Linearisierung für nicht eingangsaffine Systeme	168
4.3.1	Relativer Grad und Eingangs-Ausgangs-Normalform	168
4.3.2	Byrnes-Isidori-Normalform	176
4.3.3	Eingangs-Zustands-Linearisierung und Regelungsnormalform	182
4.4	Flache Systeme	185
4.4.1	Definition und Einführungsbeispiele	185
4.4.2	Zusammenhang zwischen flachem Ausgang und Systemausgang für Eingrößensysteme	188
4.4.3	Verallgemeinerte Regelungsnormalform	191
4.5	Mehrvariable Systeme	194
4.5.1	Vektorieller relativer Grad	194
4.5.2	Dynamische Erweiterung	200
4.5.3	Quasi-statische Rückführungen	206
4.6	Beispiel: Hochsetzsteller	210
4.6.1	Gemittelttes Modell und Ruhelagen	210
4.6.2	Eingangs-Ausgangs-Linearisierung bezüglich einer Referenzspannung	211
4.6.3	Eingangs-Ausgangs-Linearisierung bezüglich eines Referenzstroms	213
4.6.4	Eingangs-Zustands-Linearisierung	214
4.6.5	Numerische Simulation	215
	Literatur	217
5	Erweiterte Regelungskonzepte auf Basis der exakten Linearisierung	223
5.1	Trajektorienfolgeregelung mittels Rückführung (Feedback)	225
5.1.1	Ausgangsfolgeregelung	225
5.1.2	Überführung zwischen Ruhelagen	230
5.2	Trajektorienfolgeregelung mittels Aufschaltung (Feedforward)	233
5.2.1	Folgeregelung entlang einer bekannten Referenztrajektorie	233
5.2.2	Berechnung der Referenztrajektorie bei vollem relativen Grad	235
5.2.3	Berechnung der Referenztrajektorie bei nicht vollem relativen Grad	237
5.3	Modellbasierte Regelung (IMC)	239
5.3.1	Modellbasierte Regelung für lineare Systeme	240
5.3.2	Modellbasierte Regelung für nichtlineare minimalphasige Systeme	243
5.3.3	Modellbasierte Regelung für nichtlineare maximalphasige Systeme	245
5.4	Approximative Linearisierung durch Modifikation	250
5.5	Approximative Linearisierung durch Reihenentwicklung	253
5.5.1	Vorüberlegungen und exakte Linearisierung	254
5.5.2	Approximation nullter Ordnung	257
5.5.3	Approximation erster Ordnung	258
5.5.4	Approximation zweiter Ordnung	260
5.6	Modifizierte optimale Regelung	261
5.6.1	Optimale Regelung	262

5.6.2	Sontag-Formel	267
	Literatur	270

III Beobachterentwurf

6	Beobachter mit großer Verstärkung und starke Beobachter	277
6.1	Beobachterentwurf in Originalkoordinaten	278
6.1.1	High-Gain-Entwurf für unstrukturierte nichtlineare Systeme	279
6.1.2	High-Gain-Entwurf für strukturierte nichtlineare Systeme	282
6.2	Beobachterentwurf auf Basis der Beobachtbarkeitsnormalform	285
6.2.1	Nichtunterscheidbarkeit und Beobachtbarkeit für autonome Systeme	285
6.2.2	Beobachterentwurf für autonome Systeme	289
6.2.3	Beobachtbarkeit und Beobachterentwurf für eingangsabhängige Systeme	296
6.3	Beobachterentwurf auf Basis der Eingangs-Ausgangs-Normalform	303
6.3.1	Struktur des Beobachters	303
6.3.2	Berechnung der Beobacherverstärkung auf Basis der Byrnes-Isidori-Normalform	305
6.3.3	Berechnung der Beobacherverstärkung mit der Moore-Penrose-Inversen	308
6.4	Beobachterentwurf bei unbekanntem Eingang	310
	Literatur	314
7	Beobachterentwurf mittels exakter bzw. näherungsweiser Linearisierung der Fehlerdynamik	319
7.1	Linearisierung des Beobachtungsfehlers durch Aufschaltung	320
7.2	Normalform-Beobachter	322
7.2.1	Beobachter-Struktur	322
7.2.2	Reduzierter Normalform-Beobachter	325
7.3	Existenz und Berechnung der Beobachternormalform	327
7.3.1	Existenz und Berechnung der Normalform nach Byrnes und Isidori	327
7.3.2	Existenz und Berechnung der Normalform nach Nam	339
7.3.3	Berechnung nach Keller und Phelps	342
7.3.4	Berechnung nach Li und Tao	347
7.4	Taylorapproximation	350
7.4.1	Approximation nullter Ordnung mit einem High-Gain-Beobachter	350
7.4.2	Approximation erster Ordnung mit einem erweiterten Luenberger-Beobachter	355
7.4.3	Approximation höherer Ordnung	361
	Literatur	364
	Serviceteil	369
	Anhang A Stabilität	371
A.1	Stabilität autonomer Systeme	371
A.2	Stabilität erregter Systeme	375

A.3	Stabilität im geschlossenen Regelkreis	377
	Literatur	379
	Symbolverzeichnis	381
	Stichwortverzeichnis	383

Vorbereitung

Kapitel 1 Motivationsbeispiele – 3

Kapitel 2 Mathematische Grundlagen – 11

Kapitel 3 Differentialgeometrische Begriffe – 43

Motivationsbeispiele

- 1.1 Mobiler Roboter – 4
- 1.2 Wagen mit Pendel – 6
- 1.3 Hochsetzsteller – 8
- Literatur – 9

Dieses Kapitel befasst sich mit der Modellierung einiger technischer Beispielsysteme, bei denen man auf nichtlineare Modellgleichungen geführt wird. Auf diese Beispielsysteme wird in den weiteren Kapiteln mehrfach zurückgegriffen.

1.1 Mobiler Roboter

Mobile Roboter spielen eine wichtige Rolle bei der automatisierten Lagerhaltung und bei flexiblen Fertigungsprozessen, finden aber auch als Inspektions- bzw. Serviceroboter Anwendung. ■ Abb. 1.1 (links) stellt einen für Lehrzwecke entwickelten mobilen Roboter mit zwei Rädern dar [Röb15].

Für den mobilen Roboter wird nachfolgend ein kinematisches Modell hergeleitet. Dieses Modell beschreibt die Bewegung in der Ebene ohne Berücksichtigung der die Bewegung verursachenden Kräfte. Der Antrieb des Roboters erfolgt über zwei Räder mit dem Radius r . Das linke Rad habe die Winkelgeschwindigkeit ω_L , das rechte die Winkelgeschwindigkeit ω_R . An den Auflagepunkten der Räder erhält man die Tangentialgeschwindigkeiten

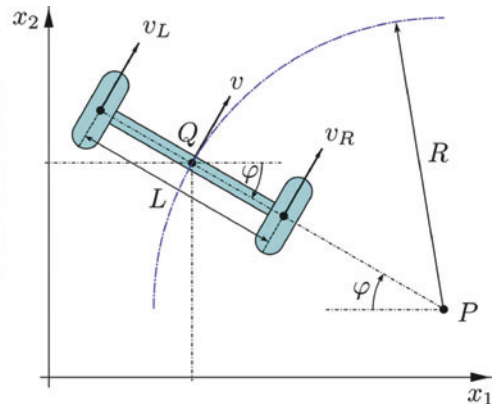
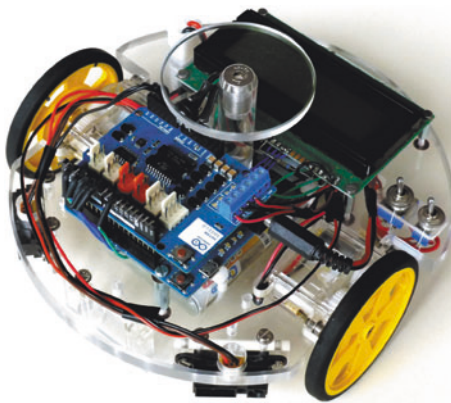
$$v_L = \omega_L r,$$

$$v_R = \omega_R r.$$

Für unterschiedliche Winkelgeschwindigkeiten (also $\omega_L \neq \omega_R$) dreht sich der Roboter. Wir stellen uns diese Drehung als Umfahrung eines (fiktiven) Punktes P vor, der zum Mittelpunkt Q des Roboters den Abstand R habe. Linkes und rechtes Rad haben von dem Punkt P die Abstände

$$R_L = R + \frac{L}{2},$$

$$R_R = R - \frac{L}{2},$$



■ Abb. 1.1 Mobiler Roboter, Prototyp nach [Röb15] (links), Modell in der (x_1, x_2) -Ebene (rechts)

1.1 • Mobiler Roboter

wobei L den Abstand beider Räder voneinander bezeichnet. Beschreibt man die Rotation um den Punkt P mit dem in ■ Abb. 1.1 (rechts) eingeführten Winkel φ , so erhält man die Rotationsgeschwindigkeit

$$\omega = \dot{\varphi} \quad (1.1)$$

als zeitliche Ableitung des Winkels. Zu den Tangentialgeschwindigkeiten der beiden Räder besteht dann der Zusammenhang

$$\begin{aligned} v_L &= \omega R_L, \\ v_R &= \omega R_R. \end{aligned}$$

Aus gegebenen Winkelgeschwindigkeiten ω_L und ω_R der Motoren kann man damit einerseits die Rotationsgeschwindigkeit des Roboters um die eigene Achse bestimmen

$$\omega = \frac{r}{L} (\omega_L - \omega_R),$$

andererseits auch den Abstand

$$R = \frac{L}{2} \left(\frac{\omega_L + \omega_R}{\omega_L - \omega_R} \right)$$

zwischen dem Punkt Q und dem Drehpunkt P . Damit erhält man zugleich die translatorische Geschwindigkeit

$$v = \omega R = \frac{r}{2} (\omega_L + \omega_R)$$

des Roboters. Mit dem Winkel φ und der Geschwindigkeit v lässt sich die translatorische Bewegung beschreiben:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v \sin \varphi, \\ \dot{x}_2 &= v \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Führt man den Zustand

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi \end{pmatrix}$$

sowie die Eingänge $u_1 = v$ und $u_2 = \omega$ ein, so liefert die Kombination aus (1.1) und (1.2) das kinematische Gesamtmodell

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x_3 \\ \cos x_3 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2. \quad (1.3)$$

Bedingt durch die Winkelfunktionen liegt damit ein Modell als nichtlineares Differentialgleichungssystem vor. Genauer gesagt ist das Modell (1.3) nichtlinear bezüglich des Zustands x , aber linear hinsichtlich der Eingänge u_1 und u_2 .

Das kinematische Robotermodell (1.3) lässt sich als einachsiges Fahrzeugmodell auffassen. Kinematische Fahrzeugmodelle werden auch bei aktuellen Forschungsvorhaben genutzt, beispielsweise bei der Spurregelung und beobachterbasierten Spurschätzung für mehrachsige, mehrgliedrige bzw. mehrachsgelenkte Fahrzeuge (LKWs, LKWs mit Anhänger, überlange Beförderungssysteme wie z. B. AutoTram[®], siehe [HZWR12, NVR⁺14, RSWK16]).

1.2 Wagen mit Pendel

Verladebrücken bzw. Brückenkräne werden in Montagehallen, in Lagern und auf Güterumschlagplätzen (z. B. Güterbahnhöfen, Häfen) eingesetzt. Für eine schnelle Bewegung bzw. hochpräzise Positionierung der zu transportierenden Lasten ist eine Regelung erforderlich.

Aus physikalischer Sicht kann man eine Verladebrücke als ein horizontal bewegliches Pendel auffassen. ■ Abb. 1.2 zeigt einen Wagen, an welchem ein Pendel der Länge ℓ angebracht ist. Zur Vereinfachung gehen wir von einer festen Seillänge ℓ aus. Der Wagen habe die Masse m_1 , die Last die Masse m_2 . Das Seil selber werde als masselos angenommen. Die Lage des Systems wird durch die Wagenposition q_1 und den Pendelwinkel q_2 beschrieben. Eine auf den Wagen wirkende Kraft F stellt den Eingang des Wagen-Pendel-Systems dar.

Die kinetische Energie hat die Form

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2),$$

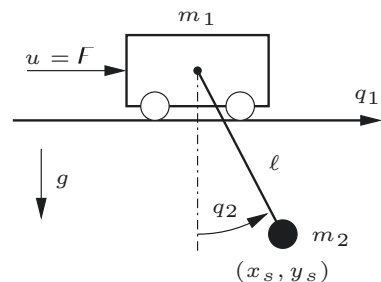
wobei die Position der Last durch die Koordinaten

$$x_s = q_1 + \ell \sin q_2$$

$$y_s = \ell \cos q_2$$

beschrieben wird. Daraus ergibt sich unmittelbar

■ Abb. 1.2 Wagen mit Pendel



1.2 • Wagen mit Pendel

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{q}_1^2 + m_2 \ell \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2 + \frac{m_2}{2} \ell^2 \dot{q}_2^2.$$

Mit der potentiellen Energie

$$V = m_2 g \ell (1 - \cos q_2)$$

erhält man die Lagrange-Funktion $L = T - V$. Die Bewegungsgleichungen haben die Form

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + K(q) = Q$$

mit der Massematrix

$$M(q) = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & \ell m_2 \cos q_2 \\ \ell m_2 \cos q_2 & \ell^2 m_2 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren C und K beinhalten die Zentrifugal- und Corioliskräfte bzw. die Potentialkräfte

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -\ell m_2 \dot{q}_2^2 \sin q_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 g \ell \sin q_2 \end{pmatrix}.$$

Als äußere Kräfte wirken die Reibungskräfte (viskose Reibung mit den Koeffizienten d_1 und d_2) sowie die auf den Wagen eingeprägte Kraft F :

$$Q = \begin{pmatrix} F - d_1 \dot{q}_1 \\ -d_2 \dot{q}_2 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Zustand $x = (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)^T$ und dem Eingang $u = F$ erhält man das folgende nichtlineare Modell:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{m_2 \ell^2 x_4^2 \sin x_3 - d_1 \ell x_2 + \cos x_3 (m_2 g \ell \sin x_3 + d_2 x_4) + \ell u}{\ell (m_1 + m_2 \sin^2 x_3)} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{-(m_1 + m_2)(m_2 g \ell \sin x_3 + d_2 x_4) - \cos x_3 (\ell^2 m_2^2 x_4^2 \sin x_3 - d_1 \ell m_2 x_2) - \ell m_2 u \cos x_3}{\ell^2 m_2 (m_1 + m_2 \sin^2 x_3)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Das Modell ist nichtlinear im Zustand x , aber affin im Eingang u .

1.3 Hochsetzsteller

Mit Spannungswandlern lassen sich verschiedene Spannungsniveaus aneinander anpassen, z. B. zwischen einer bereitgestellten Versorgungsspannung und einem Verbraucher. Gleichspannungswandler sind beliebte Objekte für die Erprobung und den Vergleich nichtlinearer Regelungsverfahren [SRLA91, Kug00, GWRG06]. Aufgrund ihres Wirkungsgrades werden geschaltete Spannungswandler in vielen Bereichen der Leistungselektronik und der Antriebstechnik eingesetzt.

Ein **Hochsetzsteller** bzw. **Aufwärtswandler** (engl. **Boost Converter**) ist ein Gleichspannungswandler, der eine Eingangsspannung in eine höhere Ausgangsspannung überführt [EM04, BMB14]. Das Schaltbild in **Abb. 1.3** zeigt die grundsätzliche Schaltungstopologie bzw. das Netzwerkmodell eines Hochsetzstellers. Der Leistungstransistor wird zusammen mit der Freilaufdiode als Umschalter modelliert, wobei $d = 1$ einem durchgesteuerten Transistor und $d = 0$ einem sperrenden Transistor entspricht.

Für den Spulenstrom I gilt aufgrund des Maschensatzes

$$L\dot{I} = E + \begin{cases} 0 & \text{für } d = 1, \\ -U & \text{für } d = 0. \end{cases}$$

Die Bilanzierung der in den Kondensator fließenden Ströme (Knotensatz) liefert

$$C\dot{U} = -\frac{U}{R} + \begin{cases} 0 & \text{für } d = 1, \\ I & \text{für } d = 0. \end{cases}$$

Mit Einführung des Vektors $x = (x_1, x_2)^T = (I, U)^T$ erhält man das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(1-d)\frac{1}{L}x_2 + \frac{E}{L}, \\ \dot{x}_2 &= (1-d)\frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Das System ist aufgrund der Produktbildung zwischen dem Eingang d und den Komponenten des Zustands x nichtlinear. Ein solches Modell nennt man auch bilinear [Sch91].

Der Eingang d beschreibt das Verhalten des als Schalter modellierten Transistors und kann zunächst nur die diskreten Werte $d \in \{0, 1\}$ annehmen. In diesem Kontext liegt mit **Gl. (1.5)** ein **geschaltetes Modell** (engl. **switched model**) vor. Mit einer **Pulsweitenmodulation** (kurz **PWM**, engl. **pulse width modulation**) lassen sich auch Zwischenwerte

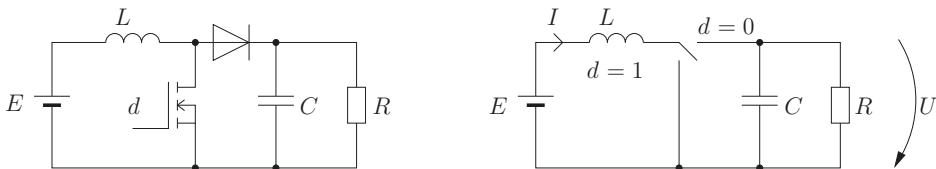
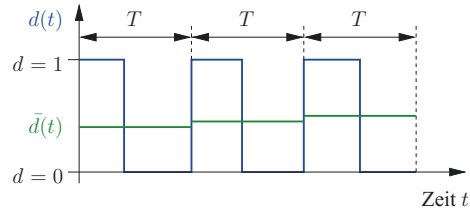


Abb. 1.3 Prinzipschaltbild (links) und Netzwerkmodell (rechts) eines Hochsetzstellers

Literatur

■ **Abb. 1.4** Signalverlauf des Eingangs d bei Pulsweitenmodulation (PWM)



einstellen (siehe ■ **Abb. 1.4**). Das Verhältnis der Einschaltzeit mit $d = 1$ gegenüber der Schaltperiode $T > 0$ bezeichnet man dabei als **Tastverhältnis $\bar{d}$** (engl. **duty ratio**), welches Werte aus dem Intervall $\bar{d} \in [0, 1]$ annehmen kann.

Das Tastverhältnis $\bar{d}$ gibt den Mittelwert des Schaltsignals d über eine Periode T an:

$$\bar{d}(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} d(\tau) d\tau.$$

In analoger Weise kann man auch für alle anderen Systemgrößen (Ströme, Spannungen, ggf. Ladungen usw.) gemittelte Größen einführen. In diesem Sinne erhält man mit

$$\bar{x}_i(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x_i(\tau) d\tau \quad \text{für } i = 1, 2$$

die gemittelten Zustandskomponenten aus dem Modell (1.5). Der zeitliche Verlauf der gemittelten Größen lässt sich wiederum durch ein Differentialgleichungssystem beschreiben. Für den Grenzübergang $T \rightarrow 0$, was aus technischer Sicht durch eine hinreichend hohe Schaltfrequenz $1/T$ angenähert wird, erhält man für die gemittelten Größen das **gemittelte Modell** (engl. **averaged model**):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= -(1 - \bar{d}) \frac{1}{L} \bar{x}_2 + \frac{E}{L} \\ \dot{\bar{x}}_2 &= (1 - \bar{d}) \frac{1}{C} \bar{x}_1 - \frac{1}{RC} \bar{x}_2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Da das gemittelte Modell (1.6) in seiner Struktur vollständig mit dem Modell (1.5) übereinstimmt, wird man in der praktischen Handhabung darauf verzichten, die gemittelten Größen separat auszuweisen. Den Reglerentwurf führt man an dem (hinsichtlich des Eingangssignals wertkontunierlichen) gemittelten Modell durch, bei der Implementierung wird das Reglerausgangssignal nach einer Pulsweitenmodulation dem geschalteten System zugeführt.

Literatur

-
- [BMB14] Bacha, S., I. Munteanu und A. I. Bratcu: **Power Electronic Converters Modeling and Control**. Springer-Verlag, London, 2014.
- [EM04] Erickson, R. W. und D. Maksimović: **Fundamentals of Power Electronics**. Kluwer Academic Publishers, New York, 2. Auflage, 2004.

- [GWRG06] Gensior, A., O. Woywode, J. Rudolph und H. Güldner: **On Differential Flatness, Trajectory Planning, Observers, and Stabilization for DC-DC Converters**. IEEE Trans. on Circuits and Systems I, 53(9):2000–2010, September 2006.
- [HZWR12] Huber, R., S. Zipser, S. Wagner und K. Röbenack: **A high-gain observer vs. algebraic derivative methods for track estimation**. In: **Proc. Int. Multi-Conference on Systems, Signals and Devices (SSD)**, Chemnitz, März 2012.
- [Kug00] Kugi, A.: **Regelung eines Cuk-Konverters**. Automatisierungstechnik, 48(3):116–123, März 2000.
- [NVR⁺14] Nitzsche, G., B. Völz, K. Röbenack, S. Wagner und S. Zipser: **Design of a nonlinear braking-based yaw rate controller**. In: **Proc. European Control Conference (ECC)**, Seiten 1681–1686, Juni 2014.
- [Röb15] Röbenack, K.: **Mobiler Eigenbauroboter mit Arduino: Aufbau und Programmierung**. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015.
- [RSWK16] Riesmeier, M., O. Schnabel, F. Woittennek und T. Knüppel: **Zur Folgeregelung mehrachsiger Fahrzeuge**. Automatisierungstechnik, 64(8):602–123, August 2016.
- [Sch91] Schwarz, H.: **Nichtlineare Regelungssysteme: Systemtheoretische Grundlagen**. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1991.
- [SRLA91] Sira-Ramirez, H. und P. Lischinsky-Arenas: **Differential algebraic approach in nonlinear dynamical compensator design for d.c.-to-d.c. power converters**. Int. J. Control, 54(1):111–133, 1991.

Mathematische Grundlagen

- 2.1 Lineare Algebra – 12
- 2.2 Felder und Ableitungen – 17
- 2.3 Vektorfelder und Flüsse – 23
- 2.4 Übungsaufgaben – 39
- 2.5 Lösungen – 39
- Literatur – 41

Dieser Abschnitt soll dem Leser einige Grundlagen der linearen Algebra sowie der Vektoranalysis in Erinnerung rufen. Dabei finden auch erste Begriffe und Konzepte der Differentialgeometrie Erwähnung. Zusätzlich werden ausgewählte Aspekte gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme behandelt. In diesem Kapitel werden nur diejenigen Aussagen bewiesen, die für regelungstheoretische Anwendungen in den folgenden Abschnitten des Buches von besonderer Bedeutung sind. Zur Festigung und Vertiefung der behandelten Konzepte seien dem Leser die Lehrbücher [Arn01, KvW07] empfohlen.

2.1 Lineare Algebra

Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Der n -dimensionale reelle Vektorraum wird mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, seine Elemente heißen **Vektoren**. Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ wird oft in der Form eines Spaltenvektors

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

mit den Komponenten $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ dargestellt. Zur Unterscheidung von Zeilenvektoren spricht man hier auch von **kontravarianten Vektoren**.

Die n Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$, die sogenannte **kanonische Basis** oder **Standardbasis**. Jeder Vektor (2.1) lässt sich eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren darstellen:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Die **lineare Hülle** (engl. **linear hull**, **linear span**) von r Vektoren $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge aller Linearkombinationen dieser Vektoren:

$$\text{spann} \{v_1, \dots, v_r\} := \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r; \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}\}.$$

Die lineare Hülle ist damit ein **Untervektorraum**, **Unterraum** bzw. **Teilraum** (engl. **subspace**) des $\mathbb{R}^n$, d. h. eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, welche selber ein Vektorraum ist.

Zu zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiert man durch

$$(x, y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (2.2)$$

2.1 • Lineare Algebra

das (**kanonische**) **Skalarprodukt**. Die Vektoren x und y sind zueinander **orthogonal** (bzw. stehen **senkrecht aufeinander**), falls

$$(x, y) = 0.$$

Jeder Unterraum $\mathbb{U}$ des $\mathbb{R}^n$ kann mit Hilfe eines geeignet gewählten weiteren Unterraums $\mathbb{V}$ zum ursprünglichen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ergänzt werden, so dass

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{U} + \mathbb{V}.$$

Haben zusätzlich beide Unterräume nur den Nullvektor gemeinsam, d. h.

$$\mathbb{U} \cap \mathbb{V} = \{0\},$$

dann ist der Unterraum $\mathbb{V}$ der **Komplementärraum** (bzw. das **Komplement**) des Unterraumes $\mathbb{U}$. In diesem Fall kann man den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ als **direkte Summe** der beiden Unterräume darstellen:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{U} \oplus \mathbb{V}.$$

Die Zerlegung in direkte Summen bedeutet, dass es für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Darstellung $x = u + v$ mit $u \in \mathbb{U}$ und $v \in \mathbb{V}$ gibt.

Die Ergänzung eines Unterraumes $\mathbb{U}$ um einen Komplementärraum $\mathbb{V}$ ist nicht eindeutig. Wählt man den Komplementärraum unter Zuhilfenahme des Skalarprodukts (2.2) derart, dass alle Vektoren $u \in \mathbb{U}$ und $v \in \mathbb{V}$ jeweils senkrecht aufeinander stehen, so erhält man das **orthogonale Komplement** $\mathbb{U}^\perp$ von $\mathbb{U}$:

$$\mathbb{U}^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n; \forall u \in \mathbb{U}: (u, v) = 0\}. \quad (2.3)$$

Hinsichtlich der Dimensionen besteht folgender Zusammenhang (**Dimensionsformel**):

$$\dim \mathbb{U} + \dim \mathbb{U}^\perp = n. \quad (2.4)$$

Beispiel 2.1

Die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

spannen im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ einen zweidimensionalen Unterraum $\mathbb{U} = \text{spann}\{u_1, u_2\}$ auf. In MAXIMA [Max, Haa14] definiert man die Spaltenvektoren mit dem Befehl `columnvector` aus dem Paket `eigen`. Das orthogonale Komplement ist eindimensional und wird von dem Vektor

$$v = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

aufgespannt:

```
(%i1) load(eigen)$
(%i2) u1:columnvector([1,2,3])$
(%i3) u2:columnvector([4,5,6])$
(%i4) orthogonal_complement(u1,u2);

(%o4) span( $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ )
```

Eine $m \times n$ -Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ besteht aus m Zeilen und n Spalten:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Gilt $m = n$, so spricht man von einer **quadratischen** Matrix. Die $n \times n$ -**Einheitsmatrix** (engl. **identity matrix**) wird mit I_n bzw. mit I bezeichnet. Bei ihr sind die Hauptdiagonalelemente Eins, alle anderen Elemente Null.

Unter dem **Bild** (engl. **image, range**) einer Matrix versteht man die Menge

$$\begin{aligned} \operatorname{im} A &:= \{y \in \mathbb{R}^m; \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } y = Ax\} \\ &= \{Ax \in \mathbb{R}^m; x \in \mathbb{R}^n\}. \end{aligned}$$

Besteht die Matrix A spaltenweise aus den Vektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$, d. h.

$$A = (a_1, \dots, a_n),$$

so gilt

$$\operatorname{im} A = \operatorname{spann} \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Das Bild einer Matrix ist die lineare Hülle der Spalten. Das Bild ist somit ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^m$. Der **Rang** (engl. **rank**) der Matrix A ist die Dimension ihres Bildes:

$$\operatorname{rang} A := \dim(\operatorname{im} A). \quad (2.5)$$

Der **Kern** oder **Nullraum** (engl. **kernel, null space**) einer Matrix A ist definiert durch

$$\ker A := \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = 0\},$$

d. h. er ist die Lösungsmenge des zur Matrix A gehörenden linearen homogenen Gleichungssystems. Der Kern ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$. Die Dimension des Kerns heißt **Defekt** (engl. **nullity, corank**):

$$\operatorname{corang} A := \dim(\ker A) = n - \operatorname{rang} A. \quad (2.6)$$

2.1 • Lineare Algebra

Der Defekt gibt den **Rangabfall** einer Matrix an.

Mit Bild und Kern sind folgende Zerlegungen der Vektorräume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ in jeweils direkte Summen zweier Untervektorräume möglich:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^m &= \operatorname{im} A \oplus \ker A^T, \\ \mathbb{R}^n &= \ker A \oplus \operatorname{im} A^T.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Bei dieser Zerlegung wird der jeweilige Unterraum ($\operatorname{im} A$ bzw. $\ker A$) um sein entsprechendes orthogonales Komplement erweitert. Die sich zum Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ergänzenden Unterräume haben nur den Nullvektor gemeinsam:

$$\operatorname{im} A \cap \ker A^T = \{0\} \quad \text{und} \quad \ker A \cap \operatorname{im} A^T = \{0\}.$$

Die Dimensionsformel (2.4) nimmt in diesem Fall die Gestalt

$$\dim(\ker A) + \dim(\operatorname{im} A) = n\tag{2.8}$$

an [Lor92, Beu01]. Der Zusammenhang (2.8) ist auch unter der Bezeichnung **Rangsatz** bekannt.

Beispiel 2.2

Man betrachte die 2×3 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bild und Kern einer Matrix lassen sich in MAXIMA mit den Funktionen `columnspace` bzw. `nullspace` des Pakets `linearalgebra` berechnen:

```
(%i1) A:matrix([1,2,3],[4,5,6]);
(%o1)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 
(%i2) columnspace(A);
(%o2)  $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$ 
(%i3) nullspace(A);
(%o3)  $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$ 
```

Mit `rank` und `nullity` kann man sich zusätzlich die Dimensionen (2.5) und (2.6) von Bild und Nullraum angeben lassen. Die Dimensionsformel (2.8) ist bei diesem Beispiel offensichtlich erfüllt.

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wird mitunter synonym zur linearen Abbildung bzw. zum linearen Operator

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{mit} \quad x \mapsto Ax$$

behandelt. Dabei verwendet man die Notation $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, wobei $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ die Menge der linearen Abbildungen vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$ bezeichnet. Diese Menge besitzt auch die Struktur eines Vektorraumes der Dimension $n \cdot m$.

Der **Dualraum** (engl. **dual space**) $(\mathbb{R}^n)^*$ des $\mathbb{R}^n$ besteht aus den auf $\mathbb{R}^n$ definierten **linearen Funktionalen** (**Linearformen**), d. h. aus linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Der Dualraum lässt sich daher auch durch $(\mathbb{R}^n)^* = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ angeben. Die Elemente $\omega \in (\mathbb{R}^n)^*$ des Dualraums, die man auch **Kovektoren** oder **kovariante Vektoren** nennt, kann man als Zeilenvektoren

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$$

darstellen. Der Dualraum $(\mathbb{R}^n)^*$ ist selber ein n -dimensionaler reeller Vektorraum mit der kanonischen Basis

$$\begin{aligned} e_1^* &= (1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ e_n^* &= (0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

Im Zusammenhang mit dem Dualraum nennt man den ursprünglichen Vektorraum manchmal auch **Primalraum**.

Anmerkung 2.3 Bei den hier betrachteten endlichdimensionalen Vektorräumen sind Primal- und Dualraum zueinander **isomorph**, d. h. es existiert eine lineare invertierbare (bijektive) Abbildung zwischen beiden Räumen. Mit einer solchen Abbildung, die man **Isomorphismus** nennt, kann jeder Vektor des Primalraumes eindeutig einem Kovektor des Dualraumes zugeordnet werden und umgekehrt. Bei der Darstellung der Vektoren und Kovektoren als Spalten- und Zeilenvektoren wird dieser Isomorphismus für beide Abbildungsrichtungen durch die **Transposition** beschrieben, d. h.

$$x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x^T \in (\mathbb{R}^n)^* \quad \text{und} \quad \omega \in (\mathbb{R}^n)^* \Rightarrow \omega^T \in \mathbb{R}^n.$$

Die Transposition kann in beide Richtungen angewandt werden. In der Differentialgeometrie sind je nach Zuordnungsrichtung die Abbildungen

$$\flat: \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \quad \text{und} \quad \sharp: (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

die aufgrund der verwendeten Symbole mitunter auch als **musikalische Isomorphismen** bezeichnet werden, üblich [MR01, BL04, Jän05]. Dabei gilt:

$$x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x^\flat \in (\mathbb{R}^n)^* \quad \text{und} \quad \omega \in (\mathbb{R}^n)^* \Rightarrow \omega^\sharp \in \mathbb{R}^n.$$

Durch Verknüpfung von Elementen aus Primal- und Dualraum erhält man mit

$$\langle \omega, x \rangle = \omega \cdot x = (\omega_1, \dots, \omega_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i \quad (2.9)$$

2.2 • Felder und Ableitungen

eine **natürliche Paarung** $\langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die man auch als **duale Paarung**, **inneres Produkt** oder **Kontraktion** zwischen Kovektoren und Vektoren auffasst. Die Basis $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ ist die zu $\{e_1, \dots, e_n\}$ **duale Basis**, d. h. es gilt

$$\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n$$

mit dem **Kroneckersymbol**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die natürliche Paarung (2.9) entspricht im Wesentlichen dem Skalarprodukt (2.2), nur dass anstelle von zwei Vektoren wie beim Skalarprodukt jetzt ein aus Kovektor und Vektor bestehendes Paar als Argumente übergeben werden. Daher wird mitunter für (2.9) auch die Bezeichnung Skalarprodukt verwendet [BG80]. In der gleichen Weise, wie mit dem Skalarprodukt zu einem gegebenen Unterraum $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ das orthogonale Komplement (2.3) konstruiert wird, kann man mit der natürlichen Paarung den **Annihilatorraum**

$$\mathbb{U}^\perp := \{\omega \in (\mathbb{R}^n)^*; \forall x \in \mathbb{U}: \langle \omega, x \rangle = 0\} \quad (2.10)$$

erzeugen. Für einen gegebenen Unterraum sind sein orthogonales Komplement und sein Annihilatorraum zueinander isomorph, so dass wir ohne Probleme in (2.3) und (2.10) die gleiche Bezeichnung verwenden können. Die Dimensionsformel (2.4) gilt daher auch in gleicher Weise für den Annihilatorraum (2.10).

2.2 Felder und Ableitungen

Im vorangegangenen Abschnitt wurden konstante Größen, insbesondere Zeilen- und Spaltenvektoren, betrachtet. Hängen diese Größen von einem Vektor ab (z. B. der Position im Raum), dann wird man auf den Begriff des Feldes und damit in den Bereich der Differentialgeometrie geführt.

Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge des Vektorraums $\mathbb{R}^n$. Abbildungen der Form $h: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ nennt man **Skalarfeld** bzw. **Vektorfeld**. Eine Abbildung $\omega: \mathcal{M} \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ heißt **Kovektorfeld**, **Differentialform ersten Grades** (kurz **1-Form**) oder **Pfaffsche Form**. Bei den betreffenden Feldern können weitere Abhängigkeiten auftreten, z. B. von der Zeit oder von Parametern. Dann würde man von **zeit-** bzw. **parameterabhängigen Feldern** sprechen.

Neben der Darstellung eines Vektorfeldes

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

als Spaltenvektor mit den Komponenten $f_1(x), \dots, f_n(x)$ wird häufig auch die Notation

$$f(x) = f_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (2.11)$$

verwendet. Dabei symbolisiert

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\} \quad (2.12)$$

die kanonische Basis, die im Punkt $x \in \mathcal{M}$ den sogenannten **Tangentialraum** $T_x \mathcal{M}$ aufspannt (siehe [Anmerkungen 2.4](#) und [2.6](#)). Die zugehörige duale Basis wird mit $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ bezeichnet, d. h.

$$\left\langle dx_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij} \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n.$$

Von der dualen Basis wird im Punkt x der **Kotangentialraum** $T_x^* \mathcal{M}$, d. h. der Dualraum des Tangentialraumes, aufgespannt. Ein Kovektorfeld ω kann dann als Zeilenvektor

$$\omega(x) = (\omega_1(x), \dots, \omega_n(x))$$

oder in der Form

$$\omega(x) = \omega_1(x) dx_1 + \dots + \omega_n(x) dx_n \quad (2.13)$$

angegeben werden.

Anmerkung 2.4 (Tangentialraum) Der Begriff Tangentialraum ist im Zusammenhang mit differenzierbaren Mannigfaltigkeiten verbreitet [[AMR83](#), [Jän05](#), [Lee06](#)]. Für die hier betrachtete offene Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ kann man den im Punkt $p \in \mathcal{M}$ aufgespannten Tangentialraum $T_p \mathcal{M}$ durch

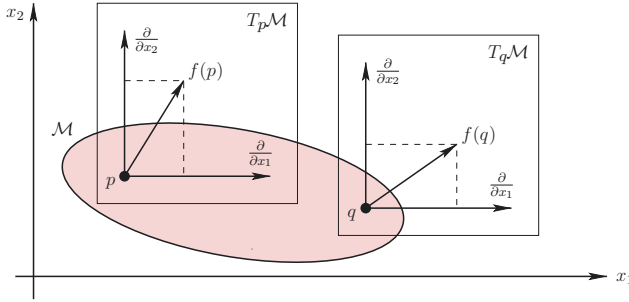
$$T_p \mathcal{M} := \{(p, v); v \in \mathbb{R}^n\}$$

definieren. Zusammen mit den Operationen $(p, v) + (p, w) := (p, v + w)$ und $\alpha \cdot (p, v) := (p, \alpha v)$ für $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ erhält man einen n -dimensionalen reellen Vektorraum, der von den Basisvektorfeldern

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) : p \mapsto (p, e_i) \quad (2.14)$$

für $i = 1, \dots, n$ aufgespannt wird (siehe [Abb. 2.1](#)). Für verschiedene Punkte $p, q \in \mathcal{M}$ erhält man formal unterschiedliche Tangentialräume $T_p \mathcal{M}$ und $T_q \mathcal{M}$, die aber jeweils isomorph (gleichwertig) zum Vektorraum $\mathbb{R}^n$ sind. Daher dürfen wir statt der Tangentialräume einfach den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ verwenden und können bei den Basisvektorfeldern (2.14) den Bezugspunkt p weglassen.

2.2 • Felder und Ableitungen



■ **Abb. 2.1** Tangentialräume $T_p \mathcal{M}$ und $T_q \mathcal{M}$ von $\mathcal{M}$ in den Punkten p und q

Die Ableitung einer differenzierbaren vektoriellen Funktion $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist die $m \times n$ -Matrix

$$F'(x) = dF(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

die **Jacobimatrix** bzw. **Differential** genannt wird. Die Jacobimatrix eines Vektorfeldes $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine quadratische $n \times n$ -Matrix. Bei einem Skalarfeld $h: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man die Ableitung

$$h'(x) = dh(x) = \frac{\partial h}{\partial x}(x) := \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n}(x) \right) \quad (2.16)$$

Gradient bzw. **totales Differential**. In Anlehnung an Gl. (2.13) ist auch die Notation

$$dh(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} dx_n$$

gebräuchlich. Der in Gl. (2.16) definierte Gradient ist ein von x abhängiger Zeilenvektor, also ein Kovektorfeld. Diese Darstellung ist konsistent mit der in Gl. (2.15) definierten Jacobimatrix für $m = 1$.

Anmerkung 2.5 (Gradientenfeld) In einigen anderen Fachgebieten (u. a. der Vektoranalysis und der Optimierung) fasst man den Gradienten nicht als Zeilenvektor, sondern als Spaltenvektor und damit als Vektorfeld auf:

$$\nabla h(x) := (dh)^\#(x) = (dh)^T(x)$$

Ein solches Vektorfeld nennt man **Gradientenfeld** [Kön04, Kna12].

Anmerkung 2.6 (Notation der Basisvektorfelder) Die in Anmerkung 2.4 verwendete Notation (2.11) bzw. (2.14) der Basisvektorfelder erscheint auf den ersten Blick willkürlich

und in keinerlei Verbindung mit einer Ableitung zu stehen. Zur Veranschaulichung betrachten wir die Richtungsableitung eines Skalarfeldes h im Punkt $p \in \mathcal{M}$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{d}{dt} h(p + vt)|_{t=0} = \langle h'(p), v \rangle = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial h}{\partial x_j}(p).$$

Setzt man für v den Einheitsvektor e_i ein, so erhält man

$$\frac{d}{dt} h(p + e_i t)|_{t=0} = \langle h'(p), e_i \rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} h(p),$$

d. h. $\frac{\partial}{\partial x_i}$ erzeugt die Richtungsableitung in Richtung des Einheitsvektors e_i .

Mitunter benötigt man auch Ableitungen verschiedener Produkte von Feldern:

Proposition 2.7 Die Vektorfelder $f, g: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$, das Skalarfeld $h: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ und das Kovektorfeld $\omega: \mathcal{M} \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ seien differenzierbar. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} (h(x)f(x)) = h(x)f'(x) + f(x)h'(x), \quad (2.17a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (g^T(x)f(x)) = g^T(x)f'(x) + f^T(x)g'(x), \quad (2.17b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \omega, f \rangle(x) = \omega(x)f'(x) + f^T(x) \frac{\partial \omega^T(x)}{\partial x}. \quad (2.17c)$$

Die Gl. (2.17a)–(2.17c) ergeben sich unmittelbar aus der klassischen Produktregel (Leibniz-Formel), vgl. [Übungsaufgabe 2.2](#).

Die $n \times n$ -Matrix

$$h''(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

der zweiten partiellen Ableitungen des Skalarfeldes h heißt **Hessematrix**.

Beispiel 2.8

Zu dem gegebenen Skalarfeld $h(x) = x_1^2 x_2^3 + 1$ sind der Gradient und die Hessematrix zu berechnen. Für die Berechnung mit MAXIMA fassen wir den Gradienten als Spezialfall einer Jacobimatrix auf und nutzen die Funktion `jacobian`. Die Berechnung der Hessematrix erfolgt mit `hessian`:

```
(%i1) h: (x1^2)*(x2^3)+1;
(%o1) x1^2 x2^3 + 1
```

2.2 • Felder und Ableitungen

```
(%i2) jacobian([h],[x1,x2]);
(%o2) (2 x1 x2^3 3 x1^2 x2^2)
(%i3) hessian(h,[x1,x2]);
(%o3) (2 x2^3 6 x1 x2^2)
      (6 x1 x2^2 6 x1^2 x2)
```

Sind die Elemente der Hessematrix wie in [Beispiel 2.8](#) auch stetig, dann ist die Matrix symmetrisch [[Kön04](#)]:

Lemma 2.9 (Satz/Lemma von Schwarz) *Das Skalarfeld $h: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ sei im Punkt $p \in \mathcal{M}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i}(p) \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n. \quad (2.18)$$

Der Gradient ist selber ein Kovektorfeld. Lässt sich umgekehrt ein Kovektorfeld als Gradient eines Skalarfeldes darstellen, so nennt man es **exaktes Differential** bzw. **exakte Differentialform**. Das zugehörige Skalarfeld heißt **Potential**. Das Lemma von Schwarz führt auf eine Existenzbedingung eines solchen Potentials für ein gegebenes Kovektorfeld. Man spricht dabei auch von einer Integrabilitätsbedingung für Differentialformen:

Lemma 2.10 (Poincarésches Lemma) *Sei $\omega: \mathcal{M} \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ ein stetig differenzierbares Kovektorfeld und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ eine offene Kugel mit Zentrum $p \in \mathcal{M}$, d. h.*

$$\mathcal{U} = \{x \in \mathcal{M}; \|x - p\| < r\} \quad \text{für ein } r > 0.$$

Die Differentialform ω ist auf $\mathcal{U}$ genau dann exakt, wenn

$$\forall x \in \mathcal{U} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}: \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}(x). \quad (2.19)$$

Eine Differentialform ω , die [Gl. \(2.19\)](#) erfüllt, heißt **geschlossene** Differentialform. Nach dem Poincaréschen Lemma ist eine Differentialform also genau dann (lokal) exakt, wenn sie geschlossen ist.

Beweis „ $\Rightarrow$ “ Das Kovektorfeld ω sei exakt, d. h. es gibt ein Skalarfeld $h: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $dh = \omega$ bzw. $\omega_i = \partial h / \partial x_i$. Wegen [Lemma 2.9](#) gilt

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}.$$

„ $\Leftarrow$ “ Sei $x \in \mathcal{U}$. Die Verbindungsstrecke $\{(1-t)p + tx; 0 \leq t \leq 1\}$ liegt ganz in $\mathcal{U}$. Ohne Einschränkung sei $p = 0$ (andernfalls Verschiebung des Koordinatensystems). Für $\omega(x) = (\omega_1(x), \dots, \omega_n(x))$ definiert man das Skalarfeld h durch