

Kathrin Akinwunmi

Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster

RESEARCH



Springer Spektrum



Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematik- unterrichts

Band 8

Herausgegeben von

H.-W. Henn,

S. Hußmann,

M. Nührenbörger,

S. Prediger,

C. Selter,

Dortmund, Deutschland

Eines der zentralen Anliegen der Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts stellt die Verbindung von konstruktiven Entwicklungsarbeiten und rekonstruktiven empirischen Analysen der Besonderheiten, Voraussetzungen und Strukturen von Lehr- und Lernprozessen dar. Dieses Wechselspiel findet Ausdruck in der sorgsamem Konzeption von mathematischen Aufgabenformaten und Unterrichtsszenarien und der genauen Analyse dadurch initiiertes Lernprozesse.

Die Reihe „Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts“ trägt dazu bei, ausgewählte Themen und Charakteristika des Lehrens und Lernens von Mathematik – von der Kita bis zur Hochschule – unter theoretisch vielfältigen Perspektiven besser zu verstehen.

Herausgegeben von

Prof. Dr. Hans-Wolfgang Henn,
Prof. Dr. Stephan Hußmann,
Prof. Dr. Marcus Nührenbörger,
Prof. Dr. Susanne Prediger,
Prof. Dr. Christoph Selter,
Institut für Entwicklung und Erforschung
des Mathematikunterrichts,
Technische Universität Dortmund

Kathrin Akinwunmi

Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Christoph Selter



Springer Spektrum

RESEARCH

Kathrin Akinwunmi
TU Dortmund, Deutschland

Dissertation Technische Universität Dortmund, 2012

Tag der Disputation: 22.03.2012

Erstgutachter: Prof. Dr. Christoph Selter
Zweitgutachter: Prof. Dr. Marcus Nührenböcker

ISBN 978-3-8348-2544-5
DOI 10.1007/978-3-8348-2545-2

ISBN 978-3-8348-2545-2 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandentwurf: Künkellopka GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Geleitwort

„Von dem schwarzen Kasten aus muss man immer so viele Kästchen wie die Nummer hinmalen. Um auszurechnen, wie viele Kästchen in der Blume sind, musst du z. B. bei der Nr. 3 $4 \cdot 3 + 1$ rechnen“, so beschreibt die Grundschülerin Kia ihr selbst erfundenes Plättchenmuster.

Sie hat eine nummerierte Figurenfolge aufgemalt, bei der sie jeweils ausgehend von einem in der Mitte angeordneten schwarzen Plättchen in alle vier Himmelsrichtungen zunächst je ein, dann zwei, dann drei und schließlich vier Plättchen angeordnet hat.

Mit Kias Erfindung beginnt diese Arbeit auf Seite 1, und mit Kias Erklärung endet sie auf Seite 290. Dazwischen befasst sich Kathrin Akinwunmi mit der Forschungsfrage, wie und mit welchen Mitteln Schülerinnen und Schüler der Grundschule mathematische Muster verallgemeinern, also erkennen und beschreiben, und wie sich dabei Variablenkonzepte entwickeln.

Hierzu geht die Autorin auf das Spannungsverhältnis zwischen der vorhandenen Bedeutung der Algebra für Mathematiklernen einerseits und den zu beobachtenden Schwierigkeiten von Lernenden andererseits ein. Diese Diskrepanz lässt die ‚Entwicklung von Variablenkonzepten‘ zu einem wichtigen Thema der mathematikdidaktischen Forschungs- und Entwicklungsarbeit werden.

Ihren Schwerpunkt setzt Frau Akinwunmi dabei auf die sog. frühe Algebra, hier verstanden als die zweite Hälfte der Grundschulzeit. In diesem Zusammenhang identifiziert sie die Entwicklung und Erforschung von neuen Unterrichtskulturen, Aufgaben und Lernkontexten sowie die Erforschung von Lern- und Denkprozessen der Schülerinnen und Schüler als zwei eng miteinander verwobene Forschungsfelder, denen sie sich in ihrer Arbeit widmet.

Zur Beantwortung ihrer Forschungsfrage analysiert die Autorin 30 Interviews mit Viertklässlerinnen und Viertklässlern – jeweils zehn zu den Aufgabenstellungen ‚Plättchenmuster‘, ‚Partnerzahlen‘ und ‚Zaubertrick‘. Hierzu nutzt sie das epistemologische Dreieck als Analyseinstrument.

Frau Akinwunmi zeigt dabei auf, *dass* die Grundschülerinnen und Schüler in der Lage sind, das Gemeinsame zu erfassen und zu beschreiben, welches einzelnen Fällen oder Objekten zugrunde liegt und dadurch eine mathematische Regelmäßigkeit, ein Muster, eine Struktur oder eine Beziehung bildet.

Die Autorin analysiert zudem unter anderem, *wie* Musterstrukturierung und Versprachlichung zusammen hängen, welche Bedeutung der Kontext beim Verall-

gemeinern hat, wie Verallgemeinerungen und verschiedene Darstellungsformen zusammenhängen oder welche Rolle rekursive und explizite Sichtweisen dabei spielen.

Und sie führt aus, welche sprachlichen Mittel die Schülerinnen und Schüler einsetzen, um Verallgemeinerungen auszudrücken – etwa durch die Angabe von Wortvariablen wie ‚Nummer‘ oder von repräsentativen Beispielen, so wie es z. B. Kia getan hat.

Natürlich kann man auf der Grundlage dieser qualitativen Forschungsarbeit nicht verallgemeinern, wie Grundschülerinnen und Grundschüler verallgemeinern. Aber dank dieser ausgezeichneten Arbeit zur frühen Algebra kann man es besser verstehen.

Christoph Selter

Danksagung

Auf dem spannenden Weg der Fertigstellung dieser Dissertation haben mich in den letzten Jahren viele Menschen unterstützt, denen ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aussprechen möchte:

Prof. Dr. Christoph Selter danke ich für die großartige Betreuung der Arbeit, bei der er mich meinen eigenen Weg gehen ließ und mich darin unterstützte, meine eigenen Forschungsinteressen zu entwickeln und zu verfolgen – mir Freiheit und gleichzeitig Halt gab. Er hat mir zugehört, Mut gemacht, Verständnis gezeigt und für jedes Problem eine Lösung gefunden.

Prof. Dr. Marcus Nührenbörger danke ich für die Zeit und die unerschöpfliche Geduld, die er für beratende Gespräche aufbrachte, in denen er Fragen aufwarf, Anregungen gab und in denen ich unglaublich viel gelernt habe.

Dr. Florian Schacht, Annika Halbe und *Sarah Landwerth* danke ich für viele Stunden gemeinsamer Datenauswertung, in denen ihr Interesse am Forschungsthema und an den Denkwegen der Kinder unermüdlich blieb.

Katharina Kuhnke und *Jan Wessel* danke ich für den produktiven Austausch über unsere Dissertationen, für die Unterstützung bei der Datenauswertung und für das Korrekturlesen. Sie regten mich an, meine Arbeit immer wieder aufs Neue zu reflektieren.

Dr. Theresa Deutscher und *Dr. Andrea Schink* danke ich dafür, dass sie gemeinsam mit mir durch alle Höhen und Tiefen des Promovierens gingen und stets für mich da waren.

Prof. Dr. Stephan Hußmann danke ich dafür, dass er mich vom ersten Tag im IEEM an mit seiner Freude für die Forschung ansteckte und mich auf dem Weg begleitete und bestärkte.

Prof. Dr. Susanne Prediger danke ich für das Interesse, dass sie meiner Arbeit und dem Thema entgegenbrachte und für die Gespräche, die mir halfen, meine Gedanken zu ordnen und mein Forschungsinteresse auszuformen.

Meinen vielen lieben Kolleginnen und Kollegen der AG Primarstufe danke ich für die wertvollen Anregungen, die intensiven Gespräche und das tolle Arbeitsumfeld am IEEM.

Mein größter Dank gilt meiner *Familie*, insbesondere meiner Tochter *Johanna*. Für die Kraft, die sie mir geben, bin ich unendlich dankbar.

Kathrin Akinwunmi

Inhaltsverzeichnis

Geleitwort	V
Danksagung	VII
Abbildungsverzeichnis	XV
Tabellenverzeichnis	XXI
Verzeichnis der epistemologischen Dreiecke	XXIII
Transkriptionsregeln	XXV
Einleitung	1
1 Variablen in der elementaren Algebra	
– Bedeutung und Schwierigkeiten	7
1.1 Die Bedeutung von Variablen und Variablenkonzepten.....	7
1.1.1 Variablen und Variablenkonzepte.....	8
1.1.2 Die Rolle von Variablen in der elementaren Algebra.....	14
1.1.2.1 Variablen als Teil der Formalisierung.....	16
1.1.2.2 Variablen als Mittel für mathematische Tätigkeiten auf allgemeiner Ebene.....	19
1.2 Schwierigkeiten beim Variablenverständnis.....	22
1.2.1 Die Überbetonung des Kalküls und die fehlende Sinnstiftung.....	24
1.2.2 Die Vieldeutigkeit von Variablen.....	27
1.2.3 Der Bruch zwischen Arithmetik und Algebra.....	32
1.3 Weiterführende Forschungsinteressen.....	35

2	Lerntheoretische Grundlagen.....	39
2.1	Begriffsentwicklung aus konstruktivistischer Perspektive.....	40
2.2	Begriffsentwicklung aus epistemologischer Perspektive.....	44
2.2.1	Der besondere Charakter von Kommunikation.....	45
2.2.2	Der besondere Charakter mathematischer Begriffe.....	47
2.2.3	Das epistemologische Dreieck.....	50
2.2.4	Die Rolle der ‚Alltagsbegriffe‘ in der Begriffsentwicklung.....	55
2.3	Zusammenfassung.....	58
3	Zur propädeutischen Entwicklung von Variablenkonzepten in der Grundschule.....	61
3.1	Didaktische Grundlagen.....	61
3.1.1	Das genetische Prinzip.....	62
3.1.1.1	Kompetenz-, Prozess- und Subjektorientierung als grundlegende Sichtweisen der Mathematikdidaktik.....	63
3.1.1.2	Die genetische Sichtweise auf mathematische Lernprozesse.....	66
3.1.2	Das Spiralprinzip.....	68
3.2	‚Early Algebra‘.....	71
3.2.1	Algebraisierung des Mathematikunterrichts der Grundschule.....	72
3.2.2	Untersuchungen zu algebraischen Kompetenzen von Grundschulkindern.....	76
3.2.3	Zusammenführung der Überlegungen zur propädeutischen Entwicklung von Variablenkonzepten.....	78
3.3	Die Bedeutung der Sprache und der Wortvariablen.....	80
3.3.1	Zur phylogenetischen Entwicklung der algebraischen Sprache....	80
3.3.2	Zur ontogenetischen Entwicklung der algebraischen Sprache.....	84
3.3.3	Die Rolle von Quasi-Variablen.....	88
3.4	Zusammenfassung.....	89

4	Das Verallgemeinern mathematischer Muster.....	93
4.1	Das Verallgemeinern als Leitidee zur Einführung von Variablen.....	94
4.1.1	Die Tätigkeit des Verallgemeinerns aus algebraischer Perspektive.....	94
4.1.1.1	Verallgemeinern – kognitive und sprachliche Tätigkeit.....	96
4.1.1.2	Verallgemeinern – allgemeine und algebraische Tätigkeit	97
4.1.2	Der Kontext des Verallgemeinerns als Zugang zur Algebra.....	98
4.1.2.1	Unbestimmte und Veränderliche beim Verallgemeinern...	100
4.1.2.1	Der Kontext des Verallgemeinerns vor dem Hintergrund des Spiralprinzips.....	100
4.1.2.3	Folgen – ein Kontext zum Verallgemeinern.....	105
4.2	Das Verallgemeinern als grundlegende Tätigkeit im Mathematikunterricht.....	109
4.2.1	Mathematik als die Wissenschaft von den Mustern.....	110
4.2.2	Verallgemeinern: Das Allgemeine im Besonderen sehen und beschreiben.....	113
4.3	Zusammenfassung.....	116
5	Forschungsfragen und Untersuchungsdesign.....	119
5.1	Zentrale Forschungsfrage.....	119
5.2	Aufbau der Interviewstudie.....	122
5.2.1	Das klinische Interview als Methode zur Datenerhebung.....	124
5.2.2	Die Konzeption der Interviewaufgaben.....	125
5.2.2.1	Das Aufgabenformat Plättchenmuster.....	126
5.2.2.2	Das Aufgabenformat Partnerzahlen.....	133
5.2.2.3	Das Aufgabenformat Zaubertrick.....	139
5.2.3	Auswahl der teilnehmenden Schülerschaft.....	147
5.2.4	Auswertung der Daten.....	148
5.3	Auffächerung der zentralen Forschungsfrage.....	150

6	Ergebnisse.....	153
6.1	Die Entwicklung von Variablenkonzepten im Verallgemeinerungsprozess.....	153
6.1.1	Erstes Fallbeispiel: Thorsten.....	154
6.1.2	Zweites Fallbeispiel: Lars.....	163
6.1.3	Zusammenfassung und Fazit.....	168
6.2	Sprachliche Mittel zur Verallgemeinerung mathematischer Muster.....	169
6.2.1	Verallgemeinerungsweisen.....	170
6.2.2	Angabe eines Beispiels.....	172
6.2.3	Aufzählung mehrerer Beispiele.....	176
6.2.4	Quasi-Variablen.....	177
6.2.5	Bedingungssätze.....	178
6.2.6	Verwendung von Wörtern oder Zeichen mit Variablencharakter..	180
6.2.7	Mischformen.....	182
6.2.8	Zusammenfassung und Fazit.....	183
6.3	Der Zusammenhang von Strukturierung und Versprachlichung.....	185
6.3.1	Fallbeispiel: Kai.....	186
6.3.2	Zusammenfassung und Fazit.....	191
6.4	Die Rolle des Kontextes bei der Verallgemeinerung.....	193
6.4.1	Verallgemeinerungen im Kontext Plättchenmuster.....	194
6.4.2	Verallgemeinerungen im Kontext Partnerzahlen.....	196
6.4.3	Verallgemeinerungen im Kontext Zaubertrick.....	198
6.4.4	Zusammenfassung und Fazit.....	200
6.5	Die Verallgemeinerung von Mustern verschiedener Darstellungsebenen.....	201
6.5.1	Die Loslösung von der geometrisch-visualisierten Ebene.....	202
6.5.2	Die Verknüpfung von verschiedenen Darstellungsebenen.....	206
6.5.3	Die Strukturentwicklung auf geometrisch-visualisierter und arithmetischer Ebene.....	210
6.5.4	Zusammenfassung und Fazit.....	216

6.6 Die Rolle von expliziten und rekursiven Sichtweisen bei der Verallgemeinerung.....	216
6.6.1 Explizite und rekursive Deutungen der Folgen.....	218
6.6.1.1 Explizite Deutungen.....	218
6.6.1.2 Rekursive Deutungen.....	221
6.6.1.3 Der Wechsel zwischen den Sichtweisen als Umdeutung der Folge.....	224
6.6.2 Proportionalitätsannahme.....	225
6.6.3 Die Bedeutung verschiedener Musterstrukturierungen für die Verallgemeinerung.....	232
6.6.4 Zusammenfassung und Fazit.....	234
6.7 Die Verallgemeinerung von Beziehungen zwischen unbestimmten Zahlen.....	235
6.7.1 Operationale und strukturelle Deutungen der Beziehung.....	236
6.7.2 Einseitige und beidseitige Deutungen der Beziehung.....	238
6.7.3 Das Einnehmen verschiedener Perspektiven auf die Beziehung zwischen zwei Zahlen.....	240
6.7.4 Anforderungsbedingte Wechsel.....	243
6.7.5 Durch den Charakter der Beziehung bedingte Wechsel.....	245
6.7.6 Zusammenfassung und Fazit.....	252
6.8 Die Deutung der Wortvariablen ‚Zahl‘ im Kontext des Verallgemeinerns.....	254
6.8.1 Deutung der Wortvariablen ‚Zahl‘ als Unbestimmte und ‚Zahl+20‘ als neue unabhängige Variable.....	255
6.8.2 Deutung der Wortvariablen ‚Zahl‘ als Unbestimmte und ‚Zahl+20‘ als Term.....	258
6.8.3 Orientierung an den Symbolen ‚+20‘ ohne explizite Deutung der Wortvariablen.....	261
6.8.4 Zusammenfassung und Fazit.....	264
6.9 Die Rolle der Verallgemeinerung beim Argumentieren.....	265
6.9.1 Erstes Fallbeispiel: Niklas.....	267
6.9.2 Zweites Fallbeispiel: Ali.....	271

6.9.3 Zusammenfassung und Fazit.....	274
7 Zusammenfassung und Ausblick.....	277
7.1 Zusammenfassung.....	278
7.2 Ausblick.....	284
7.2.1 Folgerungen und Fragen für die Erforschung von Lernprozessen und für die Unterrichtsentwicklung.....	284
7.2.2 Folgerungen für die Praxis.....	286
7.3 Schlussbemerkung.....	289
Literaturverzeichnis.....	291

Abbildungsverzeichnis

Abb. 0.1:	Erfundenes Plättchenmuster der Viertklässlerin Kia.....	1
Abb. 0.2:	Algebraische Beschreibung von Kias Plättchenmuster.....	3
Abb. 0.3:	Aufbau der Arbeit	5
Abb. 1.1:	Variablenauffassungen nach MALLE (1993, 80)	12
Abb. 1.2:	Geometrische Visualisierung einer arithmetischen Gesetzmäßigkeit (HEFENDEHL-HEBEKER 2001, 89).....	18
Abb. 1.3:	Fokussierung auf Symbole (KAPUT ET AL. 2008b, 26).....	25
Abb. 1.4:	Schülerdarstellungen des Sachverhalts „In einem Stall sind H Hasen und G Gänse. Es sind um vier Hasen mehr als Gänse.“ (MALLE 1993, 36)	26
Abb. 1.5:	Aufgabe zum Aufstellen eines Terms aus der Untersuchung von BOOTH (1988, 23)	33
Abb. 2.1:	Das sprachliche Zeichen (SAUSSURE 2001, 136).....	46
Abb. 2.2:	Das epistemologische Dreieck (STEINBRING 2000a, 9).....	51
Abb. 4.1:	Folge aus quadratischen Plättchen.....	96
Abb. 4.2:	Ausschnitt aus der Lernumgebung ‚x-beliebig‘ aus dem mathbu.ch 7 (AFFOLTER ET AL. 2003, 22).....	107
Abb. 4.3:	Aufgabenstellung und Schülerdokument zur Würfelreihe „Fastquadrate“ (HENGARTNER ET AL. 2006, 117).....	107
Abb. 4.4:	Plättchenmuster im Frühförderprogramm <i>mathe 2000</i> (MÜLLER & WITTMANN 2007, 11)	111
Abb. 4.5:	Die Wirkung von mathematischen Mustern (STEINWEG 2001, 262)	112
Abb. 5.1:	1. Aufgabenblatt: Quadratzahlen I.....	128
Abb. 5.2:	2. Aufgabenblatt: Quadratzahlen II.....	129
Abb. 5.3:	3. Aufgabenblatt: L-Zahlen I.....	130
Abb. 5.4:	4. Aufgabenblatt: L-Zahlen II.....	131

Abb. 5.5:	Lenas Partnerzahlen mit der Beziehung $f(x)=7x-3$ (STEINWEG 1998, 67)	133
Abb. 5.6:	1. Aufgabenblatt: Partnerzahlen $2x$	135
Abb. 5.7:	2. Aufgabenblatt: Partnerzahlen $x+5$	136
Abb. 5.8:	3. Aufgabenblatt: Partnerzahlen x^2	137
Abb. 5.9:	4. Aufgabenblatt: Partnerzahlen $Zahl+20$	138
Abb. 5.10:	Aufgabe aus dem Zahlenbuch 4 (WITTMANN & MÜLLER 2005, 92)	140
Abb. 5.11:	Aufgabe aus dem Zahlenbuch 5 (AFFOLTER ET AL. 1999, 64)	141
Abb. 5.12:	Visualisierung von Zaubertricks in SAWYER (1964, 73).....	142
Abb. 5.13:	Erfundener Zaubertrick von Verena und Timo (aus der Pilotierung)	143
Abb. 5.14:	1. Aufgabenblatt: Zaubertrick I.....	145
Abb. 5.15:	2. Aufgabenblatt: Zaubertrick erfinden.....	146
Abb. 6.1:	Thorstens Zeichnung der Figur L4.....	154
Abb. 6.2:	Thorstens ausgefüllte Tabelle 1 des Arbeitsblatts L-Zahlen I..	156
Abb. 6.3:	Thorstens ausgefüllte Tabelle 2 des Arbeitsblatts L-Zahlen I..	156
Abb. 6.4:	Thorstens Beschreibung der Musterstrukturierung.....	158
Abb. 6.5:	Lars erste Beschreibung des L-Zahlen-Musters.....	163
Abb. 6.6:	Lars zusätzliche Beschreibung mit Hilfe einer Zeichnung.....	164
Abb. 6.7:	Ilias Beschreibung des L-Zahlen-Musters.....	172
Abb. 6.8:	Marcus Beschreibung der Quadratzahlen-Musters.....	172
Abb. 6.9:	Lars Beschreibung des Quadratzahlen-Musters.....	173
Abb. 6.10:	Cindys Beschreibung der Partnerzahlen-Beziehung $2x$	174
Abb. 6.11:	Lucjans Beschreibung des Quadratzahlen-Musters.....	176
Abb. 6.12:	Jonathans Tabelle des Aufgabenformats Zaubertrick.....	178
Abb. 6.13:	Anjas Beschreibung des L-Zahlen-Musters.....	180

Abb. 6.14:	Tills Beschreibung der Partnerzahlen-Beziehung $x+5$	180
Abb. 6.15:	Tills Beschreibung der Partnerzahlen-Beziehung x^2	181
Abb. 6.16:	Tobias Kurzregel für die Partnerzahlen-Beziehungen $x+5$ und x^2	181
Abb. 6.17:	Thorstens Beschreibung des L-Zahlen-Musters.....	182
Abb. 6.18:	Kais Kurzregel zur Partnerzahlen-Beziehung $2x$	186
Abb. 6.19:	Kais Kurzregel zur Partnerzahlen-Beziehung $x+5$	186
Abb. 6.20:	Kais Bearbeitung des Arbeitsblatts x^2	187
Abb. 6.21:	Kais Beschreibung der Partnerzahlen-Beziehung x^2	189
Abb. 6.22:	Kais Kurzregel zur Partnerzahlen-Beziehung x^2	190
Abb. 6.23:	Lars Beschreibungen und Zeichnungen des Quadratzahlen- und L-Zahlen-Musters.....	195
Abb. 6.24:	Timos Zeichnungen des Quadratzahlen- und L-Zahlen-Musters.....	195
Abb. 6.25:	Louis Kurzregel der Partnerzahlen-Beziehung $2x$	197
Abb. 6.26:	Tobias Kurzregel der Partnerzahlen-Beziehung $x+5$	198
Abb. 6.27:	Roberts Kurzregel der Partnerzahlen-Beziehung x^2	198
Abb. 6.28:	Johannas Zeichnung der 4. Quadratzahlen-Figur.....	203
Abb. 6.29:	Thorstens ausgefüllte Tabelle 1 des Arbeitsblatts Quadratzahlen I.....	207
Abb. 6.30:	Thorstens ausgefüllte Tabelle 2 des Arbeitsblatts Quadratzahlen I.....	207
Abb. 6.31:	Thorstens ausgefüllte Tabelle 1 des Arbeitsblatts Quadratzahlen II.....	208
Abb. 6.32:	Lars Zeichnung der 4. Figur des L-Zahlen-Musters.....	210
Abb. 6.33:	Lars ausgefüllte Tabelle 1 des Arbeitsblatts Quadratzahlen I..	213
Abb. 6.34:	Lars Verallgemeinerung des Quadratzahlen-Musters.....	215
Abb. 6.35:	Explizite Deutung der Quadratzahlen-Folge.....	218
Abb. 6.36:	Marcus Zeichnung der 4. Figur der Quadratzahlen-Folge.....	219
Abb. 6.37:	Explizite Deutung der L-Zahlen-Folge.....	221

Abb. 6.38:	Rekursive Deutung der Quadratzahlen-Folge.....	221
Abb. 6.39:	Deutung des Zuwachses bei der Quadratzahlen-Folge.....	222
Abb. 6.40:	Rekursive Deutung der L-Zahlen-Folge.....	223
Abb. 6.41:	Johannas ausgefüllte Tabelle 1 des Arbeitsblatts Quadratzahlen I.....	228
Abb. 6.42:	Timos ausgefüllte Tabellen des Arbeitsblatts Quadratzahlen I	230
Abb. 6.43:	Timos ausgefüllte Tabellen des Arbeitsblatts L-Zahlen I.....	231
Abb. 6.44:	Danielas Beschreibung des L-Zahlenmusters.....	232
Abb. 6.45:	Johannas Beschreibung des L-Zahlenmusters.....	233
Abb. 6.46:	Marcus Beschreibung des L-Zahlenmusters.....	233
Abb. 6.47:	Anjas Beschreibung des L-Zahlenmusters.....	234
Abb. 6.48:	Anjas Beschreibung des Quadratzahlenmusters.....	234
Abb. 6.49:	Tobias strukturelle Beschreibung der Beziehung $x+20$	237
Abb. 6.50:	Sabrinas Beschreibung der Beziehung $x+20$	237
Abb. 6.51:	Roberts operationale einseitige Beschreibung.....	238
Abb. 6.52:	Tills operationale beidseitige Beschreibung.....	238
Abb. 6.53:	Felix strukturelle einseitige Beschreibung.....	238
Abb. 6.54:	Marvins strukturelle beidseitige Beschreibung.....	238
Abb. 6.55:	Tills Beschreibung der Beziehung $2x$	243
Abb. 6.56:	Tills Beschreibung der Beziehung $x+5$	244
Abb. 6.57:	Marvins Beschreibung der Beziehung $2x$	246
Abb. 6.58:	Marvins Beschreibung der Beziehung $x+5$	247
Abb. 6.59:	Marvins Beschreibung der Beziehung x^2	249
Abb. 6.60:	Tills Beschreibung der Beziehung $2x$	255
Abb. 6.61:	Tills Beschreibung der Beziehung $x+5$	255
Abb. 6.62:	Tills Beschreibung der Beziehung x^2	255
Abb. 6.63:	Tills Bearbeitung des Arbeitsblatts <i>Zahl + 20</i>	256
Abb. 6.64:	Tills Kurzregel zur Beziehung <i>Zahl + 20</i>	256
Abb. 6.65:	Felix Beschreibung der Beziehung $2x$	258

Abb. 6.66:	Felix Beschreibung der Beziehung $x+5$	258
Abb. 6.67:	Felix Beschreibung der Beziehung x^2	259
Abb. 6.68:	Felix Kurzregel zur Beziehung $x+5$	259
Abb. 6.69:	Felix Bearbeitung des Arbeitsblatts <i>Zahl + 20</i>	259
Abb. 6.70:	Felix Beschreibung der Beziehung $x+20$	259
Abb. 6.71:	Cindys Bearbeitung des Arbeitsblatts <i>Zahl + 20</i>	262
Abb. 6.72:	Niklas erfundener Zaubertrick.....	270
Abb. 7.1:	Erfundenes Plättchenmuster der Viertklässlerin Kia.....	289
Abb. 7.2:	Kias Beschreibung des Plättchenmusters.....	290

Tabellenverzeichnis

Tab. 1.1:	Die Variablenauffassungen <i>Unbekannte, Unbestimmte</i> und <i>Veränderliche</i>	11
Tab. 1.2:	Deutungen von Buchstabenvariablen (vgl. SPECHT 2009, 137).....	27
Tab. 2.1:	Die veränderte Rolle des Lehrers im aktiv-entdeckenden Lernen nach WINTER (1984b, 26).....	41
Tab. 3.1:	Zusammenfassende Darstellung der algebraischen Sprache zu verschiedenen Etappen in der Entwicklung der Algebra nach (AMERON 2002).....	83
Tab. 4.1:	Die epistemologische Kennzeichnung des mathematischen Wissens (STEINBRING 2005, 81).....	114
Tab. 5.1:	Folgerungen des theoretischen Teils der Arbeit.....	120
Tab. 5.2:	Zeitplan der Pilot- und Hauptstudie.....	123
Tab. 5.3:	Verteilung der Schülerinnen und Schüler auf die unterschiedli- chen Aufgabenformate.....	148
Tab. 5.4:	Auffächerung der zentralen Forschungsfrage.....	152
Tab. 6.1:	Verallgemeinerungsweisen.....	171
Tab. 6.2:	Deutungen der Beziehungen zwischen zwei unbestimmten Zahlen.....	239
Tab. 6.3:	Einordnung der Schülerbearbeitungen und Wechsel zwischen den Deutungen.....	241
Tab. 7.1:	Auszug aus den bundesweiten Bildungsstandards (KMK 2005, 10f).....	287

Verzeichnis epistemologischer Dreiecke

Ep. D. 6.1:	Thorstens Deutung des L-Zahlen-Musters.....	155
Ep. D. 6.2:	Thorstens Umstrukturierung zur Anzahlbestimmung.....	157
Ep. D. 6.3:	Thorstens Beschreibung der Musterstrukturierung.....	159
Ep. D. 6.4:	Thorstens zweite Beschreibung der Musterstrukturierung.....	161
Ep. D. 6.5:	Thorstens zweite Beschreibung der Musterstrukturierung mit Fokus auf den verwendeten Wortvariablen.....	162
Ep. D. 6.6:	Lars erste Beschreibung der Strukturierung.....	164
Ep. D. 6.7:	Lars zweite Beschreibung der Strukturierung.....	166
Ep. D. 6.8:	Lars Deutung der Wortvariablen.....	167
Ep. D. 6.9:	Lars Beschreibung der Musterstrukturierung mit Fokus auf den verwendeten Wortvariablen.....	168
Ep. D. 6.10:	Kais Musterstrukturierung.....	188
Ep. D. 6.11:	Kais Musterbeschreibung.....	189
Ep. D. 6.12:	Kais Veränderung der Musterstrukturierung.....	191
Ep. D. 6.13:	Ilias Deutung des Quadratzahlen-Musters.....	220
Ep. D. 6.14:	Marcus Deutung des Quadratzahlen-Musters.....	220
Ep. D. 6.15:	Timos Deutung des Quadratzahlen-Musters.....	223
Ep. D. 6.16:	Johannas Deutung der Quadratzahlen-Folge.....	229
Ep. D. 6.17:	Johannas Deutung der Beziehungen in der Tabelle.....	229
Ep. D. 6.18:	Marvins strukturelle Deutung der Beziehung $2x$	247
Ep. D. 6.19:	Marvins strukturelle Deutung der Beziehung $x+5$	249
Ep. D. 6.20:	Marvins operationale Deutung der Beziehung x^2	251

Transkriptionsregeln

Mmh bejahend, zustimmend

Mhh überlegend

Mhmh verneinend

(kursiver Text) Handlungen, nonverbale Ausdrücke (Gestik, Mimik)

(26 sek.) Angabe der Zeit für sprachliche Pausen und für non-verbale Handlungen

unterstrichener Text deutlich betonte Wörter

Sprecher wird unterbrochen

[...] Auslassung einer oder mehrerer Äußerungen.

Einleitung

Blumen -Zahlen

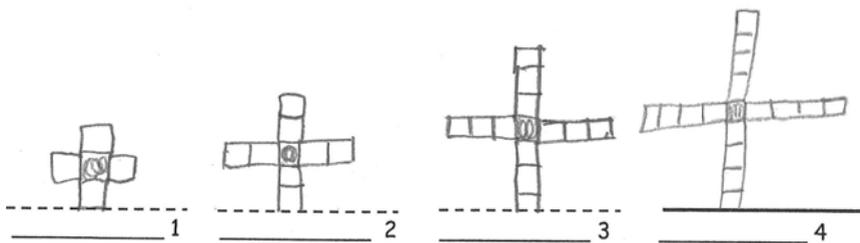


Abbildung 0.1: Erfundenes Plättchenmuster der Viertklässlerin Kia

„Die Phantasie arbeitet in einem schöpferischen Mathematiker nicht weniger als in einem erfinderischem Dichter.“

Jean-Baptist le Rond d’Alembert,
französischer Mathematiker (1717-1783)

Die wohl wichtigsten Ausgangspunkte, welche die vorliegende Arbeit motiviert und geprägt haben, bilden zwei bedeutsame Paradigmenwechsel der Mathematikdidaktik, die wie folgt beschrieben werden können:

- Wir verstehen das Lernen heute als konstruktiven Prozess, der in der Interaktion im Mathematikunterricht stattfindet, und wir sehen Lernende dementsprechend als Konstrukteure ihres mathematischen Wissens.
- Wir verstehen die Mathematik heute als die Wissenschaft von den Mustern und Strukturen. Dieses Verständnis der Mathematik ist für alle Stufen und Gebiete der Mathematik (vom Kindergarten bis zur Hochschule) gültig. Mathematik zu treiben beinhaltet demnach die Entdeckung, Beschreibung und Begründung von mathematischen Mustern.

Diese beiden grundlegenden Sichtweisen auf die Lernenden und auf die Mathematik sind fundamental für die aktuellen Entwicklungen der mathematikdidaktischen Forschung und gewinnen in zunehmendem Maße auch Bedeutung für die

Praxis des Mathematikunterrichts. Zentrales Element des alltäglichen Unterrichts ist daher die aktive Auseinandersetzung mit mathematischen Mustern, also das Entdecken, Beschreiben und Begründen, aber auch das Entwickeln, Weiterentwickeln und Nutzen von mathematischen Zusammenhängen, Strukturen und Beziehungen.

Ein Beispiel für eine solche Beschäftigung mit Mustern stellt das obige Schülerdokument der Viertklässlerin Kia dar (vgl. Abb. 0.1), die im Rahmen des Aufgabenformats ‚Plättchenmuster‘¹ eine Folge aus quadratischen Plättchen erfindet. An diesem Schülerdokument lassen sich die Anforderungen erkennen, die aufgrund der oben angesprochenen Sichtweisen im Mathematikunterricht an die Kinder gestellt werden. In dem Schülerdokument von Kia ist die Kreativität und der Erfindungsreichtum leicht nachzuvollziehen, welche die Schülerin bei der Konstruktion ihres Musters aufbringt. Doch auch das Erkennen von Mustern und Strukturen bedarf eines genauso kreativen und konstruktiven Aktes. Um den allgemeinen Bauplan der Folge von Kia zu erkennen (um diese z.B. weiterzuführen oder um die für die Figuren benötigten Plättchen zu berechnen), muss die Betrachterin oder der Betrachter selbst aktiv werden und Beziehungen und Strukturen in die vier Folgeglieder hineindeuten, die Kia hier zur Verfügung stellt – er muss etwas *Allgemeines im Besonderen erkennen*.

Wenn Kinder im Mathematikunterricht über ihre entdeckten und auch entwickelten Muster sprechen möchten, so stehen sie vor der Anforderung, über etwas sehr mathematikspezifisches zu kommunizieren – über Regelmäßigkeiten, Strukturen und Beziehungen, die wie in Kias Muster über die gegebenen Objekte hinaus gehen und einen allgemeinen Charakter besitzen. Für diese anspruchsvolle Aufgabe stehen Mathematikerinnen und Mathematikern algebraische Ausdrücke, wie Variablen, Terme oder Gleichungen zur Verfügung, mit deren Hilfe sie die Sachverhalte auf allgemeiner Ebene erforschen und auch darstellen können. So ließe sich eine allgemeine Beschreibung der obigen Folge auf algebraischer Ebene folgendermaßen darstellen:

¹ Das Aufgabenformat ‚Plättchenmuster‘ ist Bestandteil der empirischen Untersuchung dieser Arbeit und wird an späterer Stelle beschrieben. Das dargestellte Schülerdokument entstammt jedoch der Vorstudie, bei der die Schülerinnen und Schüler aufgefordert wurden, eigene Muster zu erfinden, was nicht Gegenstand der Hauptstudie ist.

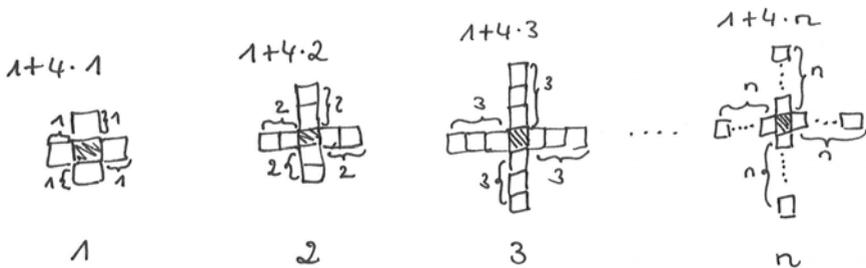


Abbildung 0.2: Algebraische Beschreibung von Kias Plättchenmuster

Wenn Grundschul Kinder wie Kia noch keine Kenntnisse über Variablen besitzen, um die entdeckten oder entwickelten Muster zu beschreiben, dann stehen sie vor der schwierigen Anforderung, mit den ihnen verfügbaren Mitteln das *Allgemeine im Besonderen beschreiben* zu müssen.

Der Schülerin Kia steht die obige Möglichkeit der Beschreibung (Abb. 0.2) in der Grundschule noch nicht zur Verfügung. Bedeutet dies, dass Kia noch nicht in der Lage sein kann, ihr Muster, welches sie selbst konstruiert hat, allgemein zu beschreiben, da sie noch nicht der algebraischen Sprache mächtig ist? Wie kann Kia es schaffen, den allgemeinen Charakter ihres Musters über die vorhandenen Figuren hinaus zu verdeutlichen, ohne dafür Variablen zu verwenden, welche die Aufgabe übernehmen, mittels eines einzigen Symbols auf eine unbestimmte Stelle in der Folge oder eine unbestimmte Anzahl an Plättchen zu verweisen?

Forschungsgegenstand der Arbeit

Das Vorhaben der vorliegenden Arbeit wird von einer Verknüpfung zweierlei Perspektiven auf die oben beschriebene Tätigkeit des Verallgemeinerns (also dem Erkennen und Beschreiben) mathematischer Muster bestimmt. Das Verallgemeinern ist einerseits grundlegender Bestandteil eines Mathematikunterrichts, der den oben beschriebenen Sichtweisen auf die Mathematik und das Mathematiklernen folgt, und durchzieht so den gesamten Mathematikunterricht.

Andererseits stellt der Kontext des Verallgemeinerns einen zentralen Zugang zur Algebra in der Sekundarstufe dar und spielt als solcher eine wichtige Rolle bei dem Aufbau eines Variablenverständnisses. Wie im obigen Beispiel in der algebraischen Beschreibung des Musters erkennbar, stellen Variablen ein bedeutsames Mittel dar, um mit mathematischen Sachverhalten auf allgemeiner Ebene umgehen zu können. Sie ermöglichen es uns, mathematische Tätigkeiten allgemein durchzuführen, beispielsweise allgemein zu kommunizieren, zu argumentieren,

zu explorieren oder Probleme zu lösen (MALLE 1993) – hier, um die Folge zu beschreiben.

Mit geeigneten Zugängen in die elementare Algebra und dem Aufbau eines tragfähigen Variablenbegriffs beschäftigt sich die Mathematikdidaktik bereits seit einigen Jahrzehnten. Anlass dazu gibt das existierende Spannungsverhältnis, welches zwischen der enormen Bedeutung von Variablen für die Algebra und den vielfältigen Schwierigkeiten der Lernenden im Umgang mit und im Verständnis von Variablen besteht. Da Variablen im Kontext des Verallgemeinerns solche nützliche Werkzeuge darstellen, verspricht man sich durch diesen Zugang eine Sinnstiftung für den Gebrauch von Variablen für die Lernenden. Gleichzeitig wird dem Verallgemeinern auch der Vorteil zugesprochen, die arithmetischen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler als Anknüpfungspunkte zu nutzen und so eine Brücke zwischen den Gebieten der Arithmetik und der Algebra (als verallgemeinerte Arithmetik) schlagen zu können.

Die vorliegende Arbeit möchte diese beiden Perspektiven auf das Verallgemeinern mathematischer Muster (als grundlegende Tätigkeit des Mathematikunterrichts und als zentralen Zugang zur Algebra) aufeinander beziehen und diese Verknüpfung nutzen, um Verallgemeinerungsprozesse bei der Auseinandersetzung mit mathematischen Mustern zu untersuchen.

In der empirischen Studie dieser Arbeit werden Verallgemeinerungsprozesse von Grundschulkindern bei der Erkundung und Beschreibung mathematischer Muster beobachtet. Es wird untersucht, wie Lernende der Primarstufe mathematische Muster verallgemeinern, wenn ihnen noch nicht die verallgemeinernden Mittel der algebraischen Sprache zur Verfügung stehen und welche sprachlichen Mittel in der Grundschule die wichtige Rolle der Variablen einnehmen. Zudem beschäftigt sich die Arbeit mit der Frage, inwiefern bei der Verallgemeinerung mathematischer Muster eine propädeutische Entwicklung von Variablenkonzepten nachgezeichnet werden kann, indem Begriffsbildungsprozesse rekonstruiert werden.

Aufbau der Arbeit

Die theoretische Fundierung der Arbeit beginnt in *Kapitel 1* mit einem Problemabriss, der das oben angesprochene Spannungsverhältnis zwischen der Bedeutung von Variablen und den Schwierigkeiten der Lernenden beim Aufbau von Variablenkonzepten beschreibt. Aus dieser Diskrepanz werden bestehende Forschungsfelder zum Aufbau von Variablenkonzepten für die mathematikdidaktische Forschung herausgearbeitet, mit denen sich die Arbeit befassen möchte.

Ausgehend davon werden in den Kapiteln 2 bis 4 Grundlagen erörtert, die den theoretischen Rahmen der Arbeit konstituieren und das Forschungsinteresse und

das Design der empirischen Untersuchung prägen. Diese Grundlagen gliedern sich in drei ineinandergreifende Aspekte (vgl. Abb. 0.3).

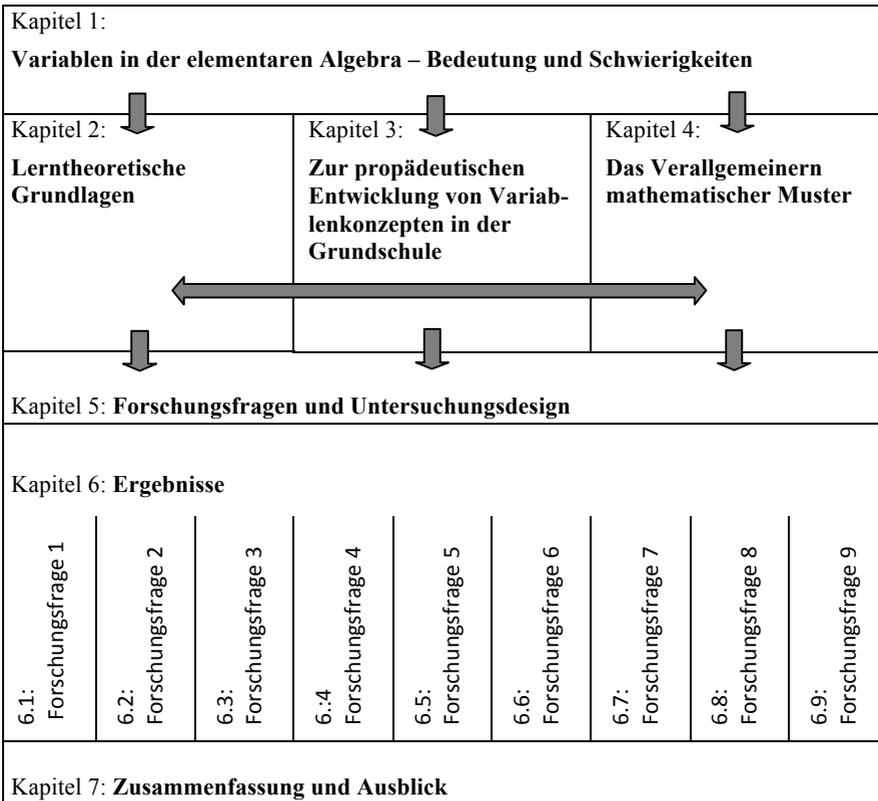


Abbildung 0.3: Aufbau der Arbeit

In *Kapitel 2* werden die lerntheoretischen Grundlagen der Arbeit dargestellt. Dazu wird zunächst eine konstruktivistische Perspektive auf die Begriffsentwicklung eingenommen (Kapitel 2.1) und anschließend die epistemologische Sichtweise auf Mathematiklernen dargestellt, die in der vorliegenden Arbeit auf der Theorie zur Konstruktion mathematischen Wissens nach STEINBRING (2005) fußt (Kapitel 2.2). Letztere ist einerseits lerntheoretisches Fundament der Arbeit, stellt aber andererseits auch die epistemologische Sichtweise bereit, mit der in der empirischen Untersuchung Lernprozesse nachgezeichnet werden.

In *Kapitel 3* werden zunächst die didaktischen Grundlagen der Arbeit für die Beschäftigung mit der propädeutischen Entwicklung von Variablenkonzepten beschrieben (Kapitel 3.1), bevor anschließend (Kapitel 3.2) auf aktuelle Ansätze zur Anbahnung algebraischen Denkens in der Grundschule (im internationalen Raum bekannt als ‚Early Algebra‘) eingegangen und die Rolle der natürlichen Sprache und der Wortvariablen bei der Entwicklung von Variablenkonzepten (Kapitel 3.3) thematisiert wird.

Das *Kapitel 4* beschreibt das Verallgemeinern mathematischer Muster aus Sicht der beiden oben angesprochenen Perspektiven – in Kapitel 4.1 zunächst als zentralen Zugang zur Algebra und in Kapitel 4.2 als grundlegende Tätigkeit eines Mathematikunterrichts, der die Mathematik als die Wissenschaft von den Mustern versteht.

Aus den zentralen Inhalten der Kapitel 2 bis 4 werden in den jeweiligen Zusammenfassungen (Kapitel 2.3, 3.4 und 4.3) Konsequenzen der Ausführungen für die empirische Studie abgeleitet und in Folgerungen zusammengeführt. In *Kapitel 5*, in welchem das Untersuchungsdesign der Arbeit beschrieben wird, wird aus diesen Folgerungen die zentrale Forschungsfrage der Arbeit entwickelt (Kapitel 5.1). Nachdem anschließend in Kapitel 5.2 der Aufbau der Interviewstudie dargestellt wird, wird in Kapitel 5.3 die zentrale Forschungsfrage hinsichtlich neun verschiedener Aspekte wieder aufgefächert, so dass in *Kapitel 6* dieser Struktur folgend je eine Forschungsfrage in den Kapiteln 6.1 – 6.9 beantwortet wird.

Das *Kapitel 7* fasst die Ergebnisse der empirischen Studie zusammen (Kapitel 7.1) und reflektiert deren Bedeutung für die in Kapitel 1 herausgestellten Forschungsfelder sowie für die Unterrichtspraxis (Kapitel 7.2).

1 Variablen in der elementaren Algebra – Bedeutung und Schwierigkeiten

Bereits seit Jahrzehnten beschäftigt sich die mathematikdidaktische Forschung mit einem Spannungsverhältnis, welches bezüglich Variablen in der elementaren Algebra besteht. Es handelt sich dabei um eine Diskrepanz zwischen der enormen Bedeutung von Variablen für den Mathematikunterricht einerseits und den vielfältigen Problemen andererseits, die Lernende im Verständnis und im Umgang mit Variablen aufzeigen. Ein verständiger Umgang mit Variablen ist für Schülerinnen und Schüler äußerst bedeutsam, für das Lernen und Treiben von Mathematik sogar unermesslich, denn auf dem Gebrauch von Variablen fußt der weitere Unterricht der Sekundarstufen in allen Themengebieten der Mathematik. Bei einem mathematischen Gegenstand von so hoher Bedeutung ist es entsprechend ernst zu nehmen, wenn Studien weltweit aufzeigen, dass Lernende beim Aufbau eines Verständnisses von Variablen erhebliche Schwierigkeiten aufweisen.

Im Folgenden wird dieses Spannungsverhältnis genauer betrachtet. Dazu werden im Kapitel 1.1 zunächst der Begriff der Variablen und seine verschiedenen Facetten näher beleuchtet, um eine begriffliche Grundlage für die theoretischen Ausführungen dieser Arbeit zu schaffen. Anschließend wird die Rolle von Variablen in der elementaren Algebra thematisiert und ihre Bedeutsamkeit für den Mathematikunterricht herausgestellt. Im Kapitel 1.2 werden Schwierigkeiten der elementaren Algebra und Probleme im Umgang mit Variablen beschrieben. Diese Ausführungen werden in Kapitel 1.3 aufeinander bezogen, sodass Forschungsinteressen bezüglich des Aufbaus des Variablenbegriffs herausgearbeitet werden können, die sich aus der beschriebenen Diskrepanz ergeben.

1.1 Die Bedeutung von Variablen und Variablenkonzepten

Variablen nehmen in der elementaren Algebra einen zentralen Stellenwert ein und sind dort allgegenwärtig, sodass die Algebra landläufig gerne auch pointiert als „die Wissenschaft des 24. Buchstabens des Alphabets“ bezeichnet wird (KNUTH ET AL. 2005, 68, übersetzt K. A.). Um die Bedeutung der Variablen für die elementare Algebra und als Teil der algebraischen Sprache für den gesamten Mathematikunterricht zu verdeutlichen, soll hier zunächst die Vielschichtigkeit des Variablenbegriffs erörtert werden (Kapitel 1.1.1), bevor anschließend Rolle und Funktionen von Variablen beschrieben werden (Kapitel 1.1.2).

1.1.1 Variablen und Variablenkonzepte

„Was sind Variable eigentlich? Ich glaube, dass diese Frage niemand zufriedenstellend beantworten kann, weil der Variablenbegriff zu schillernd und zu aspektreich ist“ (MALLE 1993, 44).

Mit dieser Einschätzung zeigt MALLE auf, dass der Variablenbegriff in seinen vielfältigen Bedeutungen durch eine Definition nicht umfassend erfasst werden kann. Die Schwierigkeiten der Begriffsbestimmung einer Variablen beginnen schon mit der Frage, was als Variable akzeptiert werden kann bzw. was von ihr abzugrenzen ist. Betrachtet man Variablen in ihrer Funktion als Stellvertreter, stellt man fest, dass es auch in der Sprache Worte oder Wortgruppen, wie „Ding“, „Sache“, „ein“, „ein beliebiger“, „irgendwelche“ gibt, welche die Rolle von Variablen spielen (MALLE 1993, 44). Aufgrund ihrer äußeren Form lassen sich Variablen folglich nicht abgrenzen, schließlich hat die Mathematik lange Zeit auf Wortvariablen, wie „Haufen“, „Menschen“ oder „Tage“ zurückgegriffen (vgl. Kapitel 2.4), bevor sich über die Abkürzung des lateinischen Wortes ‚res‘ für ‚Ding‘ die heutige Form der Buchstabenvariablen entwickelte. Auch heute würde man Wortvariablen, wie z.B. „eine reelle Zahl“ in dem Satz „Das Quadrat einer reellen Zahl ist nicht negativ“ nicht ihren Variablencharakter absprechen (MALLE 1993, 45). Variablen lassen sich folglich nicht auf Buchstaben in Stellvertreterfunktion beschränken, sondern können in verschiedenen Formen – als Wörter oder andere Zeichen – auftreten.

Auch nach ihrer Funktion und ihrem Gebrauch lassen sich Variablen nicht eindeutig eingrenzen. SCHOENFELD & ARCAVI (1988) vergleichen verschiedene existierende Beschreibungsversuche von Variablen im englischsprachigen Raum und gelangen zu der Erkenntnis, dass der Variablenbegriff so aspektreich und schwer erfassbar ist, weil Variablen so vielfältige Einsatzmöglichkeiten besitzen. Variablen haben sich in vielen Disziplinen innerhalb und außerhalb der Mathematik als ein mächtiges, effizientes Werkzeug erwiesen, wobei sie aber in unterschiedlichen Kontexten natürlich auch verschiedene Konnotationen und Bedeutungen besitzen. Diese vielfältigen Bedeutungen erweisen sich einerseits als Stärke von Variablen, können aber andererseits auch Schwierigkeiten für Lernende beinhalten, von welchen im Mathematikunterricht gefordert wird, sich in dieser Bedeutungsvielfalt zurechtzufinden und ein adäquates Verständnis von Variablen aufzubauen.

Die Rolle, die Variablen im Unterricht spielen, und die verschiedenen Bedeutungen, die sie dabei einnehmen, hängen in hohem Maße davon ab, welches Bild von der Algebra dem Unterricht jeweils zugrunde gelegt wird und verbunden damit auch, welche Ziele im Algebraunterricht verfolgt werden (USISKIN 1988). Auch wenn in der Literatur dennoch immer wieder versucht wird, Variablen zu definie-