Kathrin Akinwunmi

Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster

RESEARCH

Springer Spektrum

Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts

Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematik-unterrichts

Band 8

Herausgegeben von
H.-W. Henn,
S. Hußmann,
M. Nührenbörger,
S. Prediger,
C. Selter,
Dortmund, Deutschland

Eines der zentralen Anliegen der Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts stellt die Verbindung von konstruktiven Entwicklungsarbeiten und rekonstruktiven empirischen Analysen der Besonderheiten, Voraussetzungen und Strukturen von Lehr- und Lernprozessen dar. Dieses Wechselspiel findet Ausdruck in der sorgsamen Konzeption von mathematischen Aufgabenformaten und Unterrichtsszenarien und der genauen Analyse dadurch initiierter Lernprozesse.

Die Reihe „Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts" trägt dazu bei, ausgewählte Themen und Charakteristika des Lehrens und Lernens von Mathematik – von der Kita bis zur Hochschule – unter theoretisch vielfältigen Perspektiven besser zu verstehen.

Herausgegeben von
Prof. Dr. Hans-Wolfgang Henn,
Prof. Dr. Stephan Hußmann,
Prof. Dr. Marcus Nührenbörger,
Prof. Dr. Susanne Prediger,
Prof. Dr. Christoph Selter,
Institut für Entwicklung und Erforschung
des Mathematikunterrichts,
Technische Universität Dortmund

Kathrin Akinwunmi

Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Christoph Selter

Springer Spektrum

RESEARCH

Kathrin Akinwunmi
TU Dortmund, Deutschland

Dissertation Technische Universität Dortmund, 2012

Tag der Disputation: 22.03.2012

Erstgutachter: Prof. Dr. Christoph Selter
Zweitgutachter: Prof. Dr. Marcus Nührenbörger

ISBN 978-3-8348-2544-5 ISBN 978-3-8348-2545-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-8348-2545-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Einbandentwurf: KünkelLopka GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Geleitwort

„Von dem schwarzen Kasten aus muss man immer so viele Kästchen wie die Nummer hinmalen. Um auszurechnen, wie viele Kästchen in der Blume sind, musst du z. B. bei der Nr. 3 $4 \cdot 3+1$ rechnen“, so beschreibt die Grundschülerin Kia ihr selbst erfundenes Plättchenmuster.

Sie hat eine nummerierte Figurenfolge aufgemalt, bei der sie jeweils ausgehend von einem in der Mitte angeordneten schwarzen Plättchen in alle vier Himmelsrichtungen zunächst je ein, dann zwei, dann drei und schließlich vier Plättchen angeordnet hat.

Mit Kias Erfindung beginnt diese Arbeit auf Seite 1, und mit Kias Erklärung endet sie auf Seite 290. Dazwischen befasst sich Kathrin Akinwunmi mit der Forschungsfrage, wie und mit welchen Mitteln Schülerinnen und Schüler der Grundschule mathematische Muster verallgemeinern, also erkennen und beschreiben, und wie sich dabei Variablenkonzepte entwickeln.

Hierzu geht die Autorin auf das Spannungsverhältnis zwischen der vorhandenen Bedeutung der Algebra für Mathematiklernen einerseits und den zu beobachtenden Schwierigkeiten von Lernenden andererseits ein. Diese Diskrepanz lässt die ‚Entwicklung von Variablenkonzepten’ zu einem wichtigen Thema der mathematikdidaktischen Forschungs- und Entwicklungsarbeit werden.

Ihren Schwerpunkt setzt Frau Akinwunmi dabei auf die sog. frühe Algebra, hier verstanden als die zweite Hälfte der Grundschulzeit. In diesem Zusammenhang identifiziert sie die Entwicklung und Erforschung von neuen Unterrichtskulturen, Aufgaben und Lernkontexten sowie die Erforschung von Lern- und Denkprozessen der Schülerinnen und Schüler als zwei eng miteinander verwobene Forschungsfelder, denen sie sich in ihrer Arbeit widmet.

Zur Beantwortung ihrer Forschungsfrage analysiert die Autorin 30 Interviews mit Viertklässlerinnen und Viertklässlern – jeweils zehn zu den Aufgabenstellungen ‚Plättchenmuster’, ‚Partnerzahlen’ und ‚Zaubertrick’. Hierzu nutzt sie das epistemologische Dreieck als Analyseinstrument.

Frau Akinwunmi zeigt dabei auf, *dass* die Grundschülerinnen und Schüler in der Lage sind, das Gemeinsame zu erfassen und zu beschreiben, welches einzelnen Fällen oder Objekten zugrunde liegt und dadurch eine mathematische Regelmäßigkeit, ein Muster, eine Struktur oder eine Beziehung bildet.

Die Autorin analysiert zudem unter anderem, *wie* Musterstrukturierung und Versprachlichung zusammen hängen, welche Bedeutung der Kontext beim Verallgemeinern hat, wie Verallgemeinerungen und verschiedene Darstellungsformen zusammenhängen oder welche Rolle rekursive und explizite Sichtweisen dabei spielen.

Und sie führt aus, welche sprachlichen Mittel die Schülerinnen und Schüler einsetzen, um Verallgemeinerungen auszudrücken – etwa durch die Angabe von Wortvariablen wie ‚Nummer' oder von repräsentativen Beispielen, so wie es z. B. Kia getan hat.

Natürlich kann man auf der Grundlage dieser qualitativen Forschungsarbeit nicht verallgemeinern, wie Grundschülerinnen und Grundschüler verallgemeinern. Aber dank dieser ausgezeichneten Arbeit zur frühen Algebra kann man es besser verstehen.

Christoph Selter

Danksagung

Auf dem spannenden Weg der Fertigstellung dieser Dissertation haben mich in den letzten Jahren viele Menschen unterstützt, denen ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aussprechen möchte:

Prof. Dr. Christoph Selter danke ich für die großartige Betreuung der Arbeit, bei der er mich meinen eigenen Weg gehen ließ und mich darin unterstützte, meine eigenen Forschungsinteressen zu entwickeln und zu verfolgen – mir Freiheit und gleichzeitig Halt gab. Er hat mir zugehört, Mut gemacht, Verständnis gezeigt und für jedes Problem eine Lösung gefunden.

Prof. Dr. Marcus Nührenbörger danke ich für die Zeit und die unerschöpfliche Geduld, die er für beratende Gespräche aufbrachte, in denen er Fragen aufwarf, Anregungen gab und in denen ich unglaublich viel gelernt habe.

Dr. Florian Schacht, Annika Halbe und *Sarah Landwerth* danke ich für viele Stunden gemeinsamer Datenauswertung, in denen ihr Interesse am Forschungsthema und an den Denkwegen der Kinder unermüdlich blieb.

Katharina Kuhnke und *Jan Wessel* danke ich für den produktiven Austausch über unsere Dissertationen, für die Unterstützung bei der Datenauswertung und für das Korrekturlesen. Sie regten mich an, meine Arbeit immer wieder aufs Neue zu reflektieren.

Dr. Theresa Deutscher und *Dr. Andrea Schink* danke ich dafür, dass sie gemeinsam mit mir durch alle Höhen und Tiefen des Promovierens gingen und stets für mich da waren.

Prof. Dr. Stephan Hußmann danke ich dafür, dass er mich vom ersten Tag im IEEM an mit seiner Freude für die Forschung ansteckte und mich auf dem Weg begleitete und bestärkte.

Prof. Dr. Susanne Prediger danke ich für das Interesse, dass sie meiner Arbeit und dem Thema entgegenbrachte und für die Gespräche, die mir halfen, meine Gedanken zu ordnen und mein Forschungsinteresse auszuformen.

Meinen vielen lieben Kolleginnen und Kollegen der AG Primarstufe danke ich für die wertvollen Anregungen, die intensiven Gespräche und das tolle Arbeitsumfeld am IEEM.

Mein größter Dank gilt meiner *Familie*, insbesondere meiner Tochter *Johanna*. Für die Kraft, die sie mir geben, bin ich unendlich dankbar.

Kathrin Akinwunmi

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Verzeichnis epistemologischer Dreiecke

Transkriptionsregeln

Mmh	bejahend, zustimmend
Mhh	überlegend
Mhmh	verneinend
(kursiver Text)	Handlungen, nonverbale Ausdrücke (Gestik, Mimik)
(26 sek.)	Angabe der Zeit für sprachliche Pausen und für non-verbale Handlungen
<u>unterstrichener Text</u>	deutlich betonte Wörter
#	Sprecher wird unterbrochen
[...]	Auslassung einer oder mehrerer Äußerungen.

Einleitung

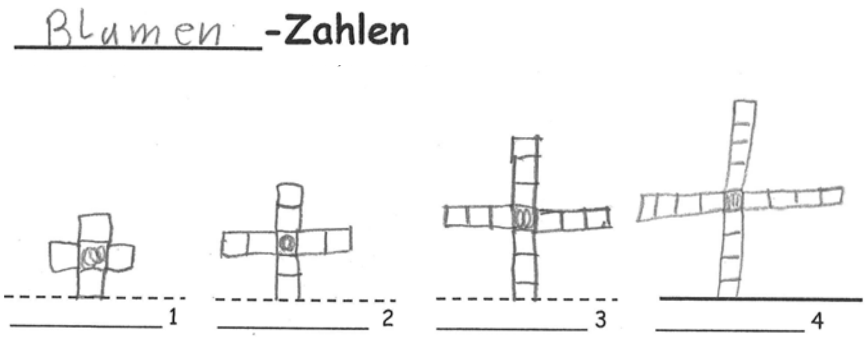

Abbildung 0.1: Erfundenes Plättchenmuster der Viertklässlerin Kia

„Die Phantasie arbeitet in einem schöpferischen Mathematiker nicht weniger als in einem erfinderischem Dichter.“
Jean-Baptist le Rond d'Alembert,
französischer Mathematiker (1717-1783)

Die wohl wichtigsten Ausgangspunkte, welche die vorliegende Arbeit motiviert und geprägt haben, bilden zwei bedeutsame Paradigmenwechsel der Mathematikdidaktik, die wie folgt beschrieben werden können:

- Wir verstehen das Lernen heute als konstruktiven Prozess, der in der Interaktion im Mathematikunterricht stattfindet, und wir sehen Lernende dementsprechend als Konstrukteure ihres mathematischen Wissens.
- Wir verstehen die Mathematik heute als die Wissenschaft von den Mustern und Strukturen. Dieses Verständnis der Mathematik ist für alle Stufen und Gebiete der Mathematik (vom Kindergarten bis zur Hochschule) gültig. Mathematik zu treiben beinhaltet demnach die Entdeckung, Beschreibung und Begründung von mathematischen Mustern.

Diese beiden grundlegenden Sichtweisen auf die Lernenden und auf die Mathematik sind fundamental für die aktuellen Entwicklungen der mathematikdidaktischen Forschung und gewinnen in zunehmendem Maße auch Bedeutung für die

K. Akinwunmi, *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster,* DOI 10.1007/978-3-8348-2545-2_1,

Praxis des Mathematikunterrichts. Zentrales Element des alltäglichen Unterrichts ist daher die aktive Auseinandersetzung mit mathematischen Mustern, also das Entdecken, Beschreiben und Begründen, aber auch das Entwickeln, Weiterentwickeln und Nutzen von mathematischen Zusammenhängen, Strukturen und Beziehungen.

Ein Beispiel für eine solche Beschäftigung mit Mustern stellt das obige Schülerdokument der Viertklässlerin Kia dar (vgl. Abb. 0.1), die im Rahmen des Aufgabenformats ‚Plättchenmuster'[1] eine Folge aus quadratischen Plättchen erfindet. An diesem Schülerdokument lassen sich die Anforderungen erkennen, die aufgrund der oben angesprochenen Sichtweisen im Mathematikunterricht an die Kinder gestellt werden. In dem Schülerdokument von Kia ist die Kreativität und der Erfindungsreichtum leicht nachzuvollziehen, welche die Schülerin bei der Konstruktion ihres Musters aufbringt. Doch auch das Erkennen von Mustern und Strukturen bedarf eines genauso kreativen und konstruktiven Aktes. Um den allgemeinen Bauplan der Folge von Kia zu erkennen (um diese z.B. weiterzuführen oder um die für die Figuren benötigten Plättchen zu berechnen), muss die Betrachterin oder der Betrachter selbst aktiv werden und Beziehungen und Strukturen in die vier Folgeglieder hineindeuten, die Kia hier zur Verfügung stellt – er muss etwas *Allgemeines im Besonderen erkennen*.

Wenn Kinder im Mathematikunterricht über ihre entdeckten und auch entwickelten Muster sprechen möchten, so stehen sie vor der Anforderung, über etwas sehr mathematikspezifisches zu kommunizieren – über Regelmäßigkeiten, Strukturen und Beziehungen, die wie in Kias Muster über die gegebenen Objekte hinaus gehen und einen allgemeinen Charakter besitzen. Für diese anspruchsvolle Aufgabe stehen Mathematikerinnen und Mathematikern algebraische Ausdrücke, wie Variablen, Terme oder Gleichungen zur Verfügung, mit deren Hilfe sie die Sachverhalte auf allgemeiner Ebene erforschen und auch darstellen können. So ließe sich eine allgemeine Beschreibung der obigen Folge auf algebraischer Ebene folgendermaßen darstellen:

[1] Das Aufgabenformat ‚Plättchenmuster' ist Bestandteil der empirischen Untersuchung dieser Arbeit und wird an späterer Stelle beschrieben. Das dargestellte Schülerdokument entstammt jedoch der Vorstudie, bei der die Schülerinnen und Schüler aufgefordert wurden, eigene Muster zu erfinden, was nicht Gegenstand der Hauptstudie ist.

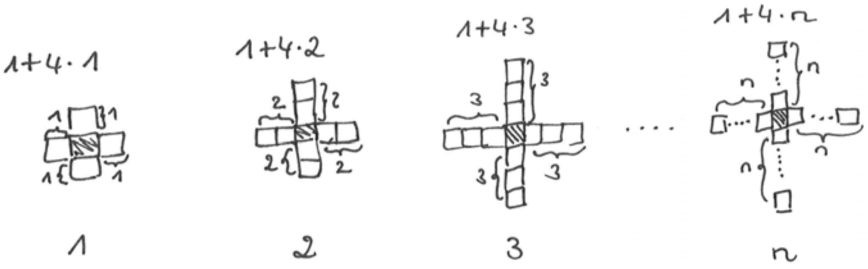

Abbildung 0.2: Algebraische Beschreibung von Kias Plättchenmuster

Wenn Grundschulkinder wie Kia noch keine Kenntnisse über Variablen besitzen, um die entdeckten oder entwickelten Muster zu beschreiben, dann stehen sie vor der schwierigen Anforderung, mit den ihnen verfügbaren Mitteln das *Allgemeine im Besonderen beschreiben* zu müssen.

Der Schülerin Kia steht die obige Möglichkeit der Beschreibung (Abb. 0.2) in der Grundschule noch nicht zur Verfügung. Bedeutet dies, dass Kia noch nicht in der Lage sein kann, ihr Muster, welches sie selbst konstruiert hat, allgemein zu beschreiben, da sie noch nicht der algebraischen Sprache mächtig ist? Wie kann Kia es schaffen, den allgemeinen Charakter ihres Musters über die vorhandenen Figuren hinaus zu verdeutlichen, ohne dafür Variablen zu verwenden, welche die Aufgabe übernehmen, mittels eines einzigen Symbols auf eine unbestimmte Stelle in der Folge oder eine unbestimmte Anzahl an Plättchen zu verweisen?

Forschungsgegenstand der Arbeit

Das Vorhaben der vorliegenden Arbeit wird von einer Verknüpfung zweierlei Perspektiven auf die oben beschriebene Tätigkeit des Verallgemeinerns (also dem Erkennen und Beschreiben) mathematischer Muster bestimmt. Das Verallgemeinern ist einerseits grundlegender Bestandteil eines Mathematikunterrichts, der den oben beschriebenen Sichtweisen auf die Mathematik und das Mathematiklernen folgt, und durchzieht so den gesamten Mathematikunterricht.

Andererseits stellt der Kontext des Verallgemeinerns einen zentralen Zugang zur Algebra in der Sekundarstufe dar und spielt als solcher eine wichtige Rolle bei dem Aufbau eines Variablenverständnisses. Wie im obigen Beispiel in der algebraischen Beschreibung des Musters erkennbar, stellen Variablen ein bedeutsames Mittel dar, um mit mathematischen Sachverhalten auf allgemeiner Ebene umgehen zu können. Sie ermöglichen es uns, mathematische Tätigkeiten allgemein durchzuführen, beispielsweise allgemein zu kommunizieren, zu argumentieren, zu explorieren oder Probleme zu lösen (MALLE 1993) – hier, um die Folge zu beschreiben.

Mit geeigneten Zugängen in die elementare Algebra und dem Aufbau eines tragfähigen Variablenbegriffs beschäftigt sich die Mathematikdidaktik bereits seit einigen Jahrzehnten. Anlass dazu gibt das existierende Spannungsverhältnis, welches zwischen der enormen Bedeutung von Variablen für die Algebra und den vielfältigen Schwierigkeiten der Lernenden im Umgang mit und im Verständnis von Variablen besteht. Da Variablen im Kontext des Verallgemeinerns solch nützliche Werkzeuge darstellen, verspricht man sich durch diesen Zugang eine Sinnstiftung für den Gebrauch von Variablen für die Lernenden. Gleichzeitig wird dem Verallgemeinern auch der Vorteil zugesprochen, die arithmetischen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler als Anknüpfungspunkte zu nutzen und so eine Brücke zwischen den Gebieten der Arithmetik und der Algebra (als verallgemeinerte Arithmetik) schlagen zu können.

Die vorliegende Arbeit möchte diese beiden Perspektiven auf das Verallgemeinern mathematischer Muster (als grundlegende Tätigkeit des Mathematikunterrichts und als zentralen Zugang zur Algebra) aufeinander beziehen und diese Verknüpfung nutzen, um Verallgemeinerungsprozesse bei der Auseinandersetzung mit mathematischen Mustern zu untersuchen.

In der empirischen Studie dieser Arbeit werden Verallgemeinerungsprozesse von Grundschulkindern bei der Erkundung und Beschreibung mathematischer Muster beobachtet. Es wird untersucht, wie Lernende der Primarstufe mathematische Muster verallgemeinern, wenn ihnen noch nicht die verallgemeinernden Mittel der algebraischen Sprache zur Verfügung stehen und welche sprachlichen Mittel in der Grundschule die wichtige Rolle der Variablen einnehmen. Zudem beschäftigt sich die Arbeit mit der Frage, inwiefern bei der Verallgemeinerung mathematischer Muster eine propädeutische Entwicklung von Variablenkonzepten nachgezeichnet werden kann, indem Begriffsbildungsprozesse rekonstruiert werden.

Aufbau der Arbeit

Die theoretische Fundierung der Arbeit beginnt in *Kapitel 1* mit einem Problemaufriss, der das oben angesprochene Spannungsverhältnis zwischen der Bedeutung von Variablen und den Schwierigkeiten der Lernenden beim Aufbau von Variablenkonzepten beschreibt. Aus dieser Diskrepanz werden bestehende Forschungsfelder zum Aufbau von Variablenkonzepten für die mathematikdidaktische Forschung herausgearbeitet, mit denen sich die Arbeit befassen möchte.

Ausgehend davon werden in den Kapiteln 2 bis 4 Grundlagen erörtert, die den theoretischen Rahmen der Arbeit konstituieren und das Forschungsinteresse und das Design der empirischen Untersuchung prägen. Diese Grundlagen gliedern sich in drei ineinandergreifende Aspekte (vgl. Abb. 0.3).

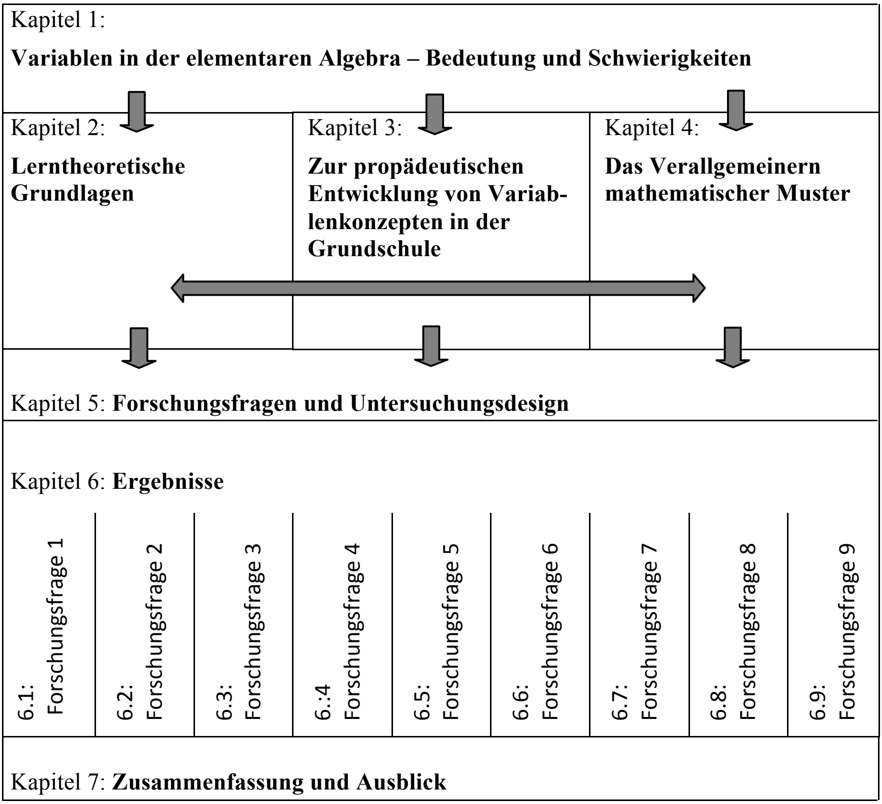

Abbildung 0.3: Aufbau der Arbeit

In *Kapitel 2* werden die lerntheoretischen Grundlagen der Arbeit dargestellt. Dazu wird zunächst eine konstruktivistische Perspektive auf die Begriffsentwicklung eingenommen (Kapitel 2.1) und anschließend die epistemologische Sichtweise auf Mathematiklernen dargestellt, die in der vorliegenden Arbeit auf der Theorie zur Konstruktion mathematischen Wissens nach STEINBRING (2005) fußt (Kapitel 2.2). Letztere ist einerseits lerntheoretisches Fundament der Arbeit, stellt aber andererseits auch die epistemologische Sichtweise bereit, mit der in der empirischen Untersuchung Lernprozesse nachgezeichnet werden.

In *Kapitel 3* werden zunächst die didaktischen Grundlagen der Arbeit für die Beschäftigung mit der propädeutischen Entwicklung von Variablenkonzepten beschrieben (Kapitel 3.1), bevor anschließend (Kapitel 3.2) auf aktuelle Ansätze zur Anbahnung algebraischen Denkens in der Grundschule (im internationalen Raum bekannt als ‚Early Algebra') eingegangen und die Rolle der natürlichen Sprache und der Wortvariablen bei der Entwicklung von Variablenkonzepten (Kapitel 3.3) thematisiert wird.

Das *Kapitel 4* beschreibt das Verallgemeinern mathematischer Muster aus Sicht der beiden oben angesprochenen Perspektiven – in Kapitel 4.1 zunächst als zentralen Zugang zur Algebra und in Kapitel 4.2 als grundlegende Tätigkeit eines Mathematikunterrichts, der die Mathematik als die Wissenschaft von den Mustern versteht.

Aus den zentralen Inhalten der Kapitel 2 bis 4 werden in den jeweiligen Zusammenfassungen (Kapitel 2.3, 3.4 und 4.3) Konsequenzen der Ausführungen für die empirische Studie abgeleitet und in Folgerungen zusammengeführt. In *Kapitel 5*, in welchem das Untersuchungsdesign der Arbeit beschrieben wird, wird aus diesen Folgerungen die zentrale Forschungsfrage der Arbeit entwickelt (Kapitel 5.1). Nachdem anschließend in Kapitel 5.2 der Aufbau der Interviewstudie dargestellt wird, wird in Kapitel 5.3 die zentrale Forschungsfrage hinsichtlich neun verschiedener Aspekte wieder aufgefächert, so dass in *Kapitel 6* dieser Struktur folgend je eine Forschungsfrage in den Kapiteln 6.1 – 6.9 beantwortet wird.

Das *Kapitel 7* fasst die Ergebnisse der empirischen Studie zusammen (Kapitel 7.1) und reflektiert deren Bedeutung für die in Kapitel 1 herausgestellten Forschungsfelder sowie für die Unterrichtspraxis (Kapitel 7.2).

1 Variablen in der elementaren Algebra – Bedeutung und Schwierigkeiten

Bereits seit Jahrzehnten beschäftigt sich die mathematikdidaktische Forschung mit einem Spannungsverhältnis, welches bezüglich Variablen in der elementaren Algebra besteht. Es handelt sich dabei um eine Diskrepanz zwischen der enormen Bedeutung von Variablen für den Mathematikunterricht einerseits und den vielfältigen Problemen andererseits, die Lernende im Verständnis und im Umgang mit Variablen aufzeigen. Ein verständiger Umgang mit Variablen ist für Schülerinnen und Schüler äußerst bedeutsam, für das Lernen und Treiben von Mathematik sogar unermesslich, denn auf dem Gebrauch von Variablen fußt der weitere Unterricht der Sekundarstufen in allen Themengebieten der Mathematik. Bei einem mathematischen Gegenstand von so hoher Bedeutung ist es entsprechend ernst zu nehmen, wenn Studien weltweit aufzeigen, dass Lernende beim Aufbau eines Verständnisses von Variablen erhebliche Schwierigkeiten aufweisen.

Im Folgenden wird dieses Spannungsverhältnis genauer betrachtet. Dazu werden im Kapitel 1.1 zunächst der Begriff der Variablen und seine verschiedenen Facetten näher beleuchtet, um eine begriffliche Grundlage für die theoretischen Ausführungen dieser Arbeit zu schaffen. Anschließend wird die Rolle von Variablen in der elementaren Algebra thematisiert und ihre Bedeutsamkeit für den Mathematikunterricht herausgestellt. Im Kapitel 1.2 werden Schwierigkeiten der elementaren Algebra und Probleme im Umgang mit Variablen beschrieben. Diese Ausführungen werden in Kapitel 1.3 aufeinander bezogen, sodass Forschungsinteressen bezüglich des Aufbaus des Variablenbegriffs herausgearbeitet werden können, die sich aus der beschriebenen Diskrepanz ergeben.

1.1 Die Bedeutung von Variablen und Variablenkonzepten

Variablen nehmen in der elementaren Algebra einen zentralen Stellenwert ein und sind dort allgegenwärtig, sodass die Algebra landläufig gerne auch pointiert als „die Wissenschaft des 24. Buchstabens des Alphabets" bezeichnet wird (KNUTH ET AL. 2005, 68, übersetzt K. A.). Um die Bedeutung der Variablen für die elementare Algebra und als Teil der algebraischen Sprache für den gesamten Mathematikunterricht zu verdeutlichen, soll hier zunächst die Vielschichtigkeit des Variablenbegriffs erörtert werden (Kapitel 1.1.1), bevor anschließend Rolle und Funktionen von Variablen beschrieben werden (Kapitel 1.1.2).

K. Akinwunmi, *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster,* DOI 10.1007/978-3-8348-2545-2_2,

1.1.1 Variablen und Variablenkonzepte

*„Was sind Variable eigentlich? Ich glaube, dass diese Frage niemand zufriedenstellend beantworten kann, weil der Variablenbegriff zu schillernd und zu aspektenreich ist“ (*MALLE 1993, 44).

Mit dieser Einschätzung zeigt MALLE auf, dass der Variablenbegriff in seinen vielfältigen Bedeutungen durch eine Definition nicht umfassend erfasst werden kann. Die Schwierigkeiten der Begriffsbestimmung einer Variablen beginnen schon mit der Frage, was als Variable akzeptiert werden kann bzw. was von ihr abzugrenzen ist. Betrachtet man Variablen in ihrer Funktion als Stellvertreter, stellt man fest, dass es auch in der Sprache Worte oder Wortgruppen, wie „Ding“, „Sache“, „ein“, „ein beliebiger“, „irgendwelche“ gibt, welche die Rolle von Variablen spielen (MALLE 1993, 44). Aufgrund ihrer äußeren Form lassen sich Variablen folglich nicht abgrenzen, schließlich hat die Mathematik lange Zeit auf Wortvariablen, wie „Haufen“, „Menschen“ oder „Tage“ zurückgegriffen (vgl. Kapitel 2.4), bevor sich über die Abkürzung des lateinischen Wortes ‚res‘ für ‚Ding‘ die heutige Form der Buchstabenvariablen entwickelte. Auch heute würde man Wortvariablen, wie z.B. „eine reelle Zahl“ in dem Satz „Das Quadrat einer reellen Zahl ist nicht negativ“ nicht ihren Variablencharakter absprechen (MALLE 1993, 45). Variablen lassen sich folglich nicht auf Buchstaben in Stellvertreterfunktion beschränken, sondern können in verschiedenen Formen – als Wörter oder andere Zeichen – auftreten.

Auch nach ihrer Funktion und ihrem Gebrauch lassen sich Variablen nicht eindeutig eingrenzen. SCHOENFELD & ARCAVI (1988) vergleichen verschiedene existierende Beschreibungsversuche von Variablen im englischsprachigen Raum und gelangen zu der Erkenntnis, dass der Variablenbegriff so aspektenreich und schwer erfassbar ist, weil Variablen so vielfältige Einsatzmöglichkeiten besitzen. Variablen haben sich in vielen Disziplinen innerhalb und außerhalb der Mathematik als ein mächtiges, effizientes Werkzeug erwiesen, wobei sie aber in unterschiedlichen Kontexten natürlich auch verschiedene Konnotationen und Bedeutungen besitzen. Diese vielfältigen Bedeutungen erweisen sich einerseits als Stärke von Variablen, können aber andererseits auch Schwierigkeiten für Lernende beinhalten, von welchen im Mathematikunterricht gefordert wird, sich in dieser Bedeutungsvielfalt zurechtzufinden und ein adäquates Verständnis von Variablen aufzubauen.

Die Rolle, die Variablen im Unterricht spielen, und die verschiedenen Bedeutungen, die sie dabei einnehmen, hängen in hohem Maße davon ab, welches Bild von der Algebra dem Unterricht jeweils zugrunde gelegt wird und verbunden damit auch, welche Ziele im Algebraunterricht verfolgt werden (USISKIN 1988). Auch wenn in der Literatur dennoch immer wieder versucht wird, Variablen zu definie-