# Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematik-unterrichts

Band 6

**Herausgegeben von**
H.-W. Henn,
S. Hußmann,
M. Nührenbörger,
S. Prediger,
C. Selter,
Dortmund, Deutschland

Eines der zentralen Anliegen der Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts stellt die Verbindung von konstruktiven Entwicklungsarbeiten und rekonstruktiven empirischen Analysen der Besonderheiten, Voraussetzungen und Strukturen von Lehr- und Lernprozessen dar. Dieses Wechselspiel findet Ausdruck in der sorgsamen Konzeption von mathematischen Aufgabenformaten und Unterrichtsszenarien und der genauen Analyse dadurch initiierter Lernprozesse.

Die Reihe „Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts" trägt dazu bei, ausgewählte Themen und Charakteristika des Lehrens und Lernens von Mathematik – von der Kita bis zur Hochschule – unter theoretisch vielfältigen Perspektiven besser zu verstehen.

**Herausgegeben von**
Prof. Dr. Hans-Wolfgang Henn,
Prof. Dr. Stephan Hußmann,
Prof. Dr. Marcus Nührenbörger,
Prof. Dr. Susanne Prediger,
Prof. Dr. Christoph Selter,
Institut für Entwicklung und Erforschung
des Mathematikunterrichts,
Technische Universität Dortmund

Sabrina Hunke

# Überschlagsrechnen in der Grundschule

## Lösungsverhalten von Kindern bei direkten und indirekten Überschlagsfragen

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Christoph Selter

Springer Spektrum

RESEARCH

Sabrina Hunke
Lünen, Deutschland

Dissertation Technische Universität Dortmund, 2012

Tag der Disputation: 17.04.2012

Erstgutachter: Prof. Dr. Christoph Selter
Zweitgutachter: Prof. Dr. Dagmar Bönig

ISBN 978-3-8348-2518-6 ISBN 978-3-8348-2519-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-8348-2519-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum


*Einbandentwurf:* KünkelLopka GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

# Geleitwort

Jana bekommt folgende Aufgabe gestellt: ‚Du hast 30 Euro. Du kaufst eine CD für 19,95 Euro und ein Buch für 9,55 Euro. Reicht das Geld?' Jana macht einen Überschlag und antwortet: „Das reicht nicht das Geld." Wie kommt sie auf diese Antwort? Und: Was wissen wir überhaupt über denkbare Vorgehensweisen oder Fehlvorstellungen von Grundschülerinnen und Grundschülern beim Überschlagsrechnen?

Die vorliegende Arbeit behandelt ein wichtiges Thema der (Grund-) Schulmathematik, welches jedoch empirisch erst ansatzweise erforscht ist. Die Autorin beschreibt das Lösungsverhalten von 42 Viertklässlern bei der Bearbeitung von Aufgaben zum Überschlagsrechnen mit additiver bzw. multiplikativer Struktur im Rahmen klinischer Interviews. Erstmalig werden in der Arbeit gezielt sog. direkte Überschlagsfragen („Wie viel kostet es ungefähr?") im Vergleich zu indirekten Überschlagsfragen („Reicht das Geld"?) eingesetzt.

Im Anschluss an eine Klärung der verwendeten Begrifflichkeiten stellt Frau Hunke zunächst in der Literatur benannte Merkmale des Überschlagsrechnens systematisch und übersichtlich neu zusammen, stellt in luzider Weise den Zusammenhang zwischen dem Überschlagsrechnen und dem Zahlensinn her, erarbeitet eine Systematik der verschiedenen Strategien des Überschlagsrechnens und befasst sich reflektiert mit verschiedenen Ansätzen zur unterrichtlichen Umsetzung des Überschlagsrechnens.

Sodann werden vorliegende Untersuchungen zu den Themenfeldern Vorgehensweisen beim Überschlagsrechnen, Flexibilität beim Überschlagsrechnen, Komponenten des Überschlagsprozesses und Fehler beim Überschlagsrechnen dargestellt und auf dieser Grundlage Forschungsfragen formuliert.

Frau Hunke beschreibt und analysiert schließlich die Ergebnisse ihrer Untersuchung im Hinblick auf die Themen Vorgehensweisen beim Überschlagsrechnen, Flexibilität beim Überschlagsrechnen, Komponenten des Überschlagsprozesses und Fehler beim Überschlagsrechnen. Die Autorin beantwortet in klarer Weise ihre Forschungsfragen sowohl anhand von tabellarischen Übersichten als auch mit Hilfe von klug ausgewählten schriftlichen Schülerdokumenten oder Transkripten.

Und sie beschreibt, wie Jana zur ihrer Lösung gekommen ist. Zunächst rundet diese die beiden Eurobeträge und kommt so zu dem Überschlagsergebnis 10 Euro plus 20 Euro gleich 30 Euro. Im Sinne einer Komma-Trennt-Strategie will sie dann noch die Cent-Beträge runden und dazu rechnen, bricht ihre Rechnung dann aber ab, weil ihr bewusst wird, dass sie die 30 Euro bereits überschritten hat.

Das Aufzeigen dieser Fehlvorstellung ist nur eines einer ganzen Reihe von sehr interessanten und für die weitere fachdidaktische Diskussion bereichernden Resultaten – eine präzise argumentierende Arbeit über das ungefähre Rechnen.

Christoph Selter

# Danksagung

Der lange Weg zur Fertigstellung dieser Arbeit wurde von vielen Personen begleitet, denen ich an dieser Stelle herzlich danken möchte.

An erster Stelle gilt mein Dank meinem Doktorvater Herrn Prof. Christoph Selter. Er hat mich und mein Projekt von Anfang an mit großer Offenheit einerseits und den richtigen Ratschlägen und Anregungen andererseits hervorragend betreut und unterstützt.

Frau Prof. Dagmar Bönig von der Universität Bremen bin ich für die Übernahme der Zweitbegutachtung und ihr Interesse am Gelingen der Arbeit zu Dank verpflichtet.

Geprägt wurde diese Arbeit auch durch die kritisch-konstruktive und gleichermaßen freundschaftliche Atmosphäre am IEEM. Der rege Austausch mit den zahlreichen Kollegen hat dazu beigetragen, die eigenen Ideen kritisch zu hinterfragen und weiterzuentwickeln sowie in weniger produktiven Zeiten nicht aufzugeben.

Besonderer Dank gilt meinen Kolleginnen und Kollegen aus den Projekten KIRA und PIK AS. Neben Dr. Daniela Götze, Janina Klammt, Martin Reinold und Jan Wessel aus den Nachbarbüros, möchte ich an dieser Stelle vor allem Karina Höveler, Katharina Kuhnke und Maren Laferi danken, mit denen ich mir nicht nur das Büro, sondern auch stets die Sorgen und Nöte, aber auch Freuden des Doktorandendaseins geteilt habe.

Weiterhin bedanke ich mich bei den zahlreichen studentischen Hilfskräften, die durch kleinere und größere Tätigkeiten zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Stellvertretend seien hier Angela Knappstein und Dena Ittmann genannt, die wesentlich an der Durchführung und Auswertung der Interviews beteiligt waren.

Danken möchte ich vor allem auch den interviewten Kindern, ihren Eltern und Lehrkräften, ohne die die Untersuchung gar nicht erst möglich gewesen wäre.

Schließlich möchte ich noch den Menschen danken, die mir am nächsten stehen – meiner Familie, meinem Freund Sebastian und meinen Freunden. Durch ihr stetes Interesse an der Arbeit und ihr Verständnis für wenig Zeit, einen chaotischen Schreibtisch und schlechte Laune haben sie sich mich stets unterstützt.

Sabrina Hunke

# Inhaltsverzeichnis

# Abbildungsverzeichnis

# Tabellenverzeichnis

# 1 Einleitung

> „In nichts zeigt sich der Mangel an mathematischer Bildung mehr als in einer übertrieben genauen Rechnung“ (Carl Friedrich Gauß, zitiert in Wielpütz 1995, S. 31).

Das Überschlagsrechnen ist ein wichtiger Inhalt der Grundschulmathematik, dessen stärkere Betonung in den vergangenen Jahrzenten immer wieder gefordert wurde (vgl. z.B. Carpenter, Coburn, Reys & Wilson 1976; Herget 1998; 1999; Selter 2003; 2007). Mehrfach wird dabei kritisiert, dass das Überschlagsrechnen zu häufig an die schriftlichen Rechenverfahren gekoppelt ist (Rechenkontrolle), nicht selten auf die Behandlung der Rundungsregeln beschränkt wird und somit oft von den Schülern[1] als lästige Zusatzaufgabe empfunden wird (vgl. z.B. Blankenagel 1983a; 1983b; Schröder 1988; Bobrowski 1990; Krauthausen 1993; Schröder 1997; Blankenagel 1999; Padberg & Benz 2011). Die „Schüler sehen den Sinn oft nicht ein, sondern tun es – aufgetragen durch die Aufgabenformulierung oder die Lehrkraft – notgedrungen, als unangenehme Begleiterscheinung, bevor sie 'richtig' rechnen (verifizieren)“ (Krauthausen 1993, S. 199).

Damit scheint es, als würden bisherige unterrichtliche Umsetzungen des Überschlagsrechnens den zentralen inhaltsbezogenen Zielen eines zeitgemäßen Mathematikunterrichts – *Verständnis*, *Sicherheit* und *Flexibilität* (vgl. Selter 2007) – nicht gerecht werden. Gleichzeitig gibt es zum Überschlagsrechnen insbesondere im deutschsprachigen Raum kaum empirische Untersuchungen, die zudem bisweilen erst in Ansätzen Einblicke in die Denkweisen (einschließlich Fehlern) der Kinder geben (z.B. Selter 2007). Entsprechende Studien aus dem Ausland sind häufig quantitativer Natur und im Kontext anderer Unterrichtsgrundsätze oder (kognitions-) psychologischer Forschungsinteressen entstanden.

Doch gerade vor dem Hintergrund des weithin anerkannten Unterrichtsgrundsatzes des „aktiv-entdeckenden Lernens“ (vgl. Wittmann 1993; 1995) und der Notwendigkeit einer individuellen Förderung (vgl. Schulgesetz NRW, o.J., §1), erscheint es zwingend erforderlich auch für das Überschlagsrechnen die Denkwege von Schülerinnen und Schülern systematisch zu erheben, damit an diese angeknüpft werden kann. Dies hat sich die vorliegende Untersuchung zur Aufgabe gemacht. Neben den Lösungsstrategien stehen dabei insbesondere Fehler im Zentrum des

[1] Zur besseren Lesbarkeit werden Begriffe wie Lehrer und Schüler im Folgenden sowohl für weibliche als auch männliche Personen genutzt.

S. Hunke, *Überschlagsrechnen in der Grundschule,* DOI 10.1007/978-3-8348-2519-3_1,

Interesses, da diesbezüglich auch international keine systematischen Untersuchungen vorliegen. Weiterhin sollen Aussagen gemacht werden, inwiefern die Kinder ein Verständnis vom Überschlagsrechnen haben und flexible Rechenkompetenzen zeigen, um damit die eingangs formulierte Kritik empirisch zu hinterfragen.

Aus diesem Grund wurde das Lösungsverhalten von 42 Viertklässlern beim Lösen von additiven und multiplikativen Aufgaben zum Überschlagsrechnen im Rahmen klinischer Interviews erhoben und qualitativ ausgewertet. Erstmals wurden dabei gezielt sogenannte *direkte Überschlagsfragen* („Wie viel kostet es ungefähr?") im Vergleich zu *indirekten Überschlagsfragen* („Reicht das Geld"?) eingesetzt, da es Hinweise in der Literatur gibt, dass insbesondere die indirekten Überschlagsfragen zu anderen Lösungsstrategien führen als die direkten Überschlagsfragen (vgl. Trafton 1978). Dies wurde bisweilen jedoch nicht empirisch erforscht. Desweiteren wird konstatiert, dass indirekte Überschlagsfragen besonders gut zum Einstieg ins Überschlagsrechnen geeignet seien (vgl. van den Heuvel-Panhuizen 2001). Diese These soll mithilfe der in der vorliegenden Untersuchung gewonnenen Daten diskutiert werden. Schließlich wird im Theorieteil dieser Arbeit herausgestellt, dass die indirekten „Reicht das Geld?"-Aufgaben im besonderen Maße einen verständnisvollen Einsatz des Überschlagsrechnens erfordern (*konzeptuelles Wissen*: vgl. Hiebert 1986; LeFevre, Greenham & Waheed 1993; Schneider 2006). So muss die Antwort auf die „Reicht das Frage?" aus dem numerischen Überschlagsergebnis erst noch abgeleitet werden. Inwiefern Kinder solch eine Interpretation des Überschlagsergebnisses vornehmen, wird in der vorliegenden Untersuchung ebenfalls erstmalig untersucht.

Die Arbeit beginnt zunächst mit auf Literatur basierenden theoretischen Überlegungen zum Überschlagsrechnen (Kapitel 2), die die Bedeutsamkeit der Thematik herausstellen sollen. Dazu wird insbesondere geklärt, was unter Überschlagsrechnung verstanden wird und durch welche Merkmale sich ein Überschlag auszeichnet, um aufzuzeigen, dass das Überschlagsrechnen weit über die reine Anwendung der Rundungsregeln hinaus geht. In diesem Kontext wird auch der Zusammenhang zu Zahlensinn aufgezeigt, der in der Literatur immer wieder hervorgehoben wird (vgl. z.B. Sowder 1988; 1992a; 1992b; Trafton 1992; Lorenz 1998a; 1998b; Bönig 2001) und es wird ein Überblick über verschiedene Überschlagsstrategien gegeben. Das abschließende Unterkapitel geht auf das Überschlagsrechnen im Unterricht ein, wobei einerseits Lehrpläne und Bundesbildungsstandards, erste bereits vorhandene didaktische Überlegungen, verschiedene Aufgabentypen sowie das Vorkommen in Schulbüchern in den Blick genommen werden.

Die Kapitel 3 bis 6 geben eine Übersicht insbesondere über empirische Forschungsergebnisse zum Überschlagsrechnen. Dabei werden in Kapitel 3 Studien vorgestellt, die sich vorrangig mit Vorgehensweisen beim Überschlagsrechnen beschäftigt haben. Unterschieden wird dabei hinsichtlich allgemein möglicher Lösungsstrategien (genaue Lösungen oder ungefähre Lösungen?) und Überschlagsstrategien. Weiterhin werden Forschungsergebnisse zum Einfluss von Aufgabentypen auf Vorgehensweisen und zum Einsatz verschiedener Rechenmethoden (im Kopf, halbschriftlich oder schriftlich) zur Lösung von Überschlagsrechnungen referiert. Kapitel 4 erörtert zunächst den Begriff des flexiblen Rechnens allgemein, bevor in einem zweiten Abschnitt diesbezügliche Forschungsergebnisse dargestellt werden. Da es bisweilen eher wenige empirische Ergebnisse zu Flexibilität beim Überschlagsrechnen gibt, werden auch Forschungsergebnisse zum genauen Rechnen hinzugezogen. In Kapitel 5 wird ebenfalls anhand empirischer Ergebnisse weiter ausdifferenziert, welche (Wissens-) Komponenten beim Überschlagsrechnen erforderlich sind. Von besonderem Interesse ist dabei das sogenannte *konzeptuelle Wissen* (vgl. Hiebert 1986; LeFevre, Greenham & Waheed 1993; Schneider 2006), da hier insbesondere aufgezeigt wird, was das eingangs erwähnte Lernziel *Verständnis* bezogen auf das Überschlagsrechnen bedeutet. In Kapitel 6 werden empirische Ergebnisse zu Fehlern beim Überschlagsrechnen referiert. Die eher geringe und unsystematische Datenlage wird dabei als Grundlage für die Analyse in der eigenen Untersuchung herangezogen.

In Kapitel 7 wird die Konzeption der vorliegenden Untersuchung offen gelegt. Ausgehend von den in den Kapitel 3-6 aufgezeigten Forschungsdefiziten, werden zunächst die Forschungsfragen formuliert, bevor die Methoden der Datenerhebung, der Aufbau der Interviews sowie die Methoden der Datenauswertung präsentiert werden.

Die Auswertungskapitel 8-11 sind analog zu den Kapiteln 3-6 gegliedert. So werden in Kapitel 8 zunächst die Vorgehensweisen (Lösungsstrategie, Überschlagsstrategien und Rechenmethoden) der untersuchten Kinder analysiert und dargestellt. Dabei geht es sowohl um die Illustration der verschiedenen Vorgehensweisen als auch um die Herausstellung von Hauptstrategien. Weiterhin hat sich in Folge der Unterscheidung in direkte und indirekte Überschlagsfragen zusätzlich die Unterscheidung in formelle und informelle Überschlagsstrategien als sinnvoll erwiesen. Kapitel 9 untersucht das Lösungsverhalten der Kinder hinsichtlich des Aspekts der *Flexibilität*. Ausgehend von einem Verständnis von Flexibilität als aufgabenadäquates, aber auch von persönlichen Präferenzen abhängigen Handelns (vgl. Selter 2009; Rathgeb-Schnierer 2010), wird zunächst der Einfluss von Aufgabenmerkmalen auf die Vorgehensweisen aller Kinder analysiert, bevor im zweiten Abschnitt des Kapitels am Beispiel ausgewählter Kinder untersucht wird, inwiefern sich diese flexiblen Überschlagskompetenzen äußern. Kapitel 10 stellt anschließend den Aspekt *Verständnis* in den Fokus. Als ausgewählter Teilaspekt konzeptuellen Wissens wird dargestellt, inwiefern die Kinder eine Interpretation des Überschlagsergebnisses vornehmen. Schließlich werden in Kapitel 11 Fehler beim Überschlagsrechnen analysiert, sodass erstmalig eine systematische Übersicht hinsichtlich dieser Thematik vorliegt.

Den Abschluss der Arbeit bildet das Kapitel 12. Hier werden die zentralen Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst, auf Grundlage derer Konsequenzen für eine Didaktik des Überschlagsrechnens gezogen werden sollen. Insbesondere soll dabei die Rolle der direkten und indirekten Überschlagsfragen diskutiert werden.

# 2 Überschlagsrechnen – mathematikdidaktischer Hintergrund

> "Regardless of the approaches chosen, remember that estimation is *essential, not extra.*" (O'Daffer, 1979, S. 51).

Mit der zunehmenden Akzeptanz des aktiv-entdeckenden und ganzheitlichen Lernens (vgl. Wittmann 1993, 1995; Hengartner 1999), das das auf Verständnis basierende Lernen von Mathematik in den Vordergrund rückt, hat es auch einen Paradigmenwechsel hinsichtlich der Bedeutung der verschiedenen Rechenmethoden gegeben. Die halbschriftlichen Rechenstrategien haben vor diesem Hintergrund zunehmend an Bedeutung gewonnen, während die Bedeutung der schriftlichen Rechenverfahren zunehmend schwindet (vgl. Krauthausen 1993; Selter 1999b). Mit diesem Paradigmenwechsel, geht auch eine veränderte Sichtweise auf den Stellenwert des Überschlagsrechnens einher (vgl. z.B. Levin 1981; Krauthausen 1993; Reys B. & Reys R. 1998). So kommt dem Überschlagsrechnen eine große Bedeutung sowohl im Alltag als insbesondere auch im Mathematikunterricht zu.

**Alltagsbezogener Eigenwert – Bedeutung im Alltag**

Im Alltag des Mathematikunterrichts dominieren Präzision und Exaktheit, obwohl viele Zahlen- und Größenangaben in realen Anwendungssituationen, wie beispielsweise Einwohnerzahlen, zwangsläufig ungenau sind (vgl. Bönig 2003, S. 102). In vielen solcher Anwendungssituationen ist genaues Rechnen somit nicht immer nötig, möglich und vor allem nicht immer sinnvoll (vgl. van den Heuvel-Panhuizen 2001; Selter 2003; 2007). Es macht beispielsweise nur wenig Sinn, seinen wöchentlichen Spritverbrauch genau ausrechnen zu wollen, weil dies von so vielen Faktoren abhängt, die eine genaue Rechnung kaum ermöglichen (vgl. van den Heuvel-Panhuizen 2001) und weil eine genaue Rechnung gleichzeitig für diesen Zweck auch viel zu umständlich wäre. Eine weitere typische Situation, in der eine genaue Rechnung (im Kopf) viel zu umständlich wäre, ist das Berechnen von Rabatten, wie z.B. „20 % auf alles" in Kaufhäusern. In der Regel reicht es hier vor dem Kauf eines Produkts aus zu wissen, ob die 20 % eher eine Ersparnis von vielleicht 5 €, 10 € oder gar 30 € bringen und ob das gewünschte Produkt dann aufgrund des Rabatts tatsächlich günstiger ist als in einem anderen Kaufhaus ohne Rabattaktion. Auch wird sich ein USA-Reisender in der Regel nicht die Mühe machen bei kleineren Einkäufen den Preis bis auf den Cent genau in Euro umzurechnen, da die Wechselkurse häufig bis auf mehrere Stellen nach dem Komma angegeben werden, es sich also um Rechnungen handelt, die nicht mehr im Kopf durchzuführen sind und die Kurse außerdem täglich schwanken und man deshalb

S. Hunke, *Überschlagsrechnen in der Grundschule,* DOI 10.1007/978-3-8348-2519-3_2,

in der Regel auf ungefähre Werte zurückgreift. Neben der Funktion als Kontrollinstrument von (genauen) Rechnungen hat das Überschlagsrechnen also einen stark alltagsbezogenen Eigenwert (vgl. Selter 2007).

**Didaktischer Eigenwert – Bedeutung für das Mathematiklernen**

Bisweilen kommt dem Überschlagsrechnen insbesondere die Bedeutung zu, dass es ein wichtiges Werkzeug zur Kontrolle von schriftlich oder mit dem Taschenrechner gewonnenen Ergebnissen darstellt (vgl. Breidenbach 1969; Gerster 1982; Legel & Scheller 1986). Gerade „bei der *Verwendung des Taschenrechners* bietet nur sie [die Überschlagsrechnung, SH] einen *gewissen Schutz gegen Bedienungsfehler*“ (Gerster 1982, S. 101). Weiterhin führt die Verbreitung von Taschenrechnern zu einer veränderten Sichtweise auf das Überschlagsrechnen:

> „In fact, to check the reasonableness of a calculator result one is primarily concerned with orders of magnitude and hence the most critical need (minimum skill) is the ability to do single-digit arithmetic and work with powers of 10” (Johnson 1979, S. 37).

Neben der Kontrolle von Ergebnissen, wird ähnlich wie in dem Zitat von Johnson immer auch die Feststellung der Größenordnung von (schriftlichen) Rechnungen als wichtige Funktion des Überschlagsrechnens angeführt (vgl. z.B. Schipper, Dröge & Ebeling 2008; Grassmann, Eichler, Mirwald & Nitsch 2010).

Auch wenn diese beiden Funktionen weiterhin von Bedeutung sind, so hat das Überschlagsrechnen auch einen hohen didaktischen Eigenwert und eine Reduzierung auf das Überschlagsrechnen als Kontrollwerkzeug allein würde der Thematik nicht gerecht werden (vgl. z.B. Bobrowski 1990; Lorenz 2005b; Schipper et al. 2008). Überschlagsrechnen fördert das Stellenwertverständnis, die Entwicklung von (Kopf-) Rechenstrategien, den Aufbau von Zahl- und Größenvorstellungen (vgl. Threadgill-Sowder 1984; Schröder 1988; van den Heuvel-Panhuizen 2001; Schipper et al. 2008) und ist somit eng verbunden mit der Entwicklung eines Zahlensinns (vgl. Kapitel 2.2). Aus dieser Perspektive können Überschläge schließlich als „pädagogisches Werkzeug“ (Threadgill-Sowder 1984, S. 332) bzw. „didaktische Hilfe“ (van den Heuvel-Panhuizen 2001, S. 174) betrachtet werden und sind „dann nicht mehr nur lästige Pflichtübungen, z.B. zur Kontrolle einer schriftlichen Rechnung, die eigentlich mit Hilfe des Taschenrechners besser durchgeführt werden könnte; die regelmäßige Durchführung von Überschlägen stellt vielmehr eine Fortsetzung des Kopfrechenkurses auch im Kontext schriftlicher Rechenverfahren dar" (Schipper et al. 2008, S. 101). Dieser didaktische Eigenwert wird auch durch einen zeitgemäßen Einsatz des Taschenrechners weiterhin betont. So kann man nicht nur mit einem Überschlag ein Ergebnis des Taschenrechners überprüfen, sondern andersrum kann der Taschenrechner genutzt werden, um Überschlagsergebnisse zu kontrollieren und diese mit dem genauen Ergebnis – welches schließlich mit dem Taschenrechner bestimmt wird – in Beziehung zu setzen (vgl. Spiegel 1988). Der Überschlag rückt so im Vergleich zur genauen Rechnung in den Vordergrund.

Insgesamt ist das Überschlagsrechnen ein sehr reizvolles Thema mit vielen Eigengesetzlichkeiten, „bei dem offene Aufgaben möglich sind, bei dem Schüler eigene Wege gehen und Strategien entdecken können, bei dem die Argumentationsfähigkeit und der Sinn für die angemessene Genauigkeit geschult werden können“ (Blankenagel 1983b, S. 320). Aus diesen Gründen ist das Überschlagsrechnen ein wichtiges Lernziel und liefert somit einen Beitrag zur mathematischen Bildung, was auch in den Beiträgen von Gerster (1982) und Winter (2001) sowie vom National Council of Teachers of Mathematics (NCTM 1980) herausgestellt wird. Demnach stellt das Überschlagsrechnen eine *mathematische Grundfähigkeit* (Gerster 1982, S. 189; vgl. auch NCTM 1980; Smart 1982) beziehungsweise einen Teilaspekt der „Fundamentalen Ideen in der Grundschule“ [2] (Winter 2001) dar.

Ausgehend von der nun aufgezeigten Bedeutsamkeit des Überschlagsrechnens soll die Thematik im Folgenden aus theoretischer Perspektive durchleuchtet werden. Dazu werden anfangs die Begriffe Runden, Schätzen und Überschlagen verglichen und voneinander abgegrenzt sowie den englischen Pendants gegenübergestellt (Kap. 2.1.1). In Kapitel 2.1.2 wird der Begriff des Überschlagsrechnens konkretisiert, indem verschiedene Merkmale eines Überschlags herausgestellt werden.

Kapitel 2.2 erörtert die eng mit dem Überschlag verwandte Thematik des Zahlensinns, die die Bedeutsamkeit des Überschlagsrechnens weiter betont. In Kapitel 2.3 werden verschiedene Überschlagsstrategien illustriert und diskutiert, was den Ausgangspunkt zur Einschätzung verschiedener Beiträge zu einer Didaktik und Methodik des Überschlagsrechnens bildet, welche Gegenstand von Kapitel 2.4 sind. Dort werden zunächst die Lehrpläne in den Blick genommen (Kap. 2.4.1), an-

[2] Die „Fundamentalen Ideen in der Grundschule“ (FI) sind ein Versuch von Winter dem Abgleiten des Mathematikunterrichts (MU) in ein unsystematisches Abarbeiten von Aufgaben entgegenzutreten. „Ihr Hauptzweck liegt wohl darin, die Lehrerinnen dafür zu gewinnen, sich immer mehr bewusst zu werden, was denn im MU wesentlich, zentral, fundamental sein soll, und sich immer stärker zu befähigen, den FI im täglichen Unterricht Geltung zu verschaffen. Ob die FI eine ernsthafte Antwort auf das Problem der Stofffülle sind, bleibt noch abzuwarten“ (Winter 2001, S. 2). Das Überschlagsrechnen wird dabei als Teilaspekt der FI „Näherungsrechnen“ aufgeführt.

schließend werden anhand drei, für zentral erachteten Beiträgen Leitideen für das Überschlagsrechnen im Unterricht aufgestellt (Kap. 2.4.2) bevor abschließend verschiedene Aufgabentypen vorgestellt (Kap. 2.4.3) sowie Einblicke in Schulbücher gewährt und hinsichtlich der Lehrplanvorgaben und Leitideen diskutiert werden (Kap. 2.4.4).

## 2.1 Begriffsklärung Überschlagsrechnen

In der Literatur findet sich das Überschlagsrechnen häufig in Verbindung mit den Begriffen Runden und Schätzen. Dabei werden die Begriffe Schätzen und Überschlagen im Deutschen nicht selten synonym gebraucht, teilweise wird der Begriff Schätzen auch als Oberbegriff genutzt (vgl. z.B. Freudenthal 1978; 1985; Peter-Koop 1999; Selter 1999a), was mitunter darauf zurückzuführen ist, dass beide Tätigkeiten, abhängig von der konkreten Aufgabe, aber auch bei der Analyse von Rechenwegen, nicht immer scharf voneinander trennbar sind. Gemeinsam ist dem Runden, dem Schätzen und dem Überschlagen, dass es sich hierbei um Tätigkeiten handelt, die der „Welt der ungenauen Zahl“ (Blankenagel 1983b, S. 315; Bönig 2003, S. 103) zuzuordnen sind, welche im Kontrast zur ‚Welt der genauen Zahl‘ steht (vgl. Freudenthal 1978). Siegler & Booth (2005, S. 198) sprechen in diesem Zusammenhang auch von einem „process of translating between alternative quantitative representations, at least one of which is inexact“.

### 2.1.1 Abgrenzung der Begriffe Runden, Schätzen, Überschlagen

Im Rahmen dieser Arbeit wird das Überschlagsrechnen (Überschlagen) als eine vom Schätzen verschiedene, wenn auch damit verwandte Tätigkeit betrachtet. Eine Klärung der Begriffe, an der sich auch die vorliegende Arbeit orientiert, findet sich z.B. bei Breidenbach (1969, S. 159) und insbesondere bei Lorenz (2005a; vgl. auch Selter 2007). Auch die Betrachtung der englischen Begrifflichkeiten gibt weiteren Aufschluss über die Unterschiede zwischen dem Schätzen und Überschlagen (vgl. Sowder 1992a; Verschaffel, Greer & De Corte 2007; Hogan & Brezinski 2003).

**Runden**

Das *Runden* wird von Lorenz (2005a, S. 44) als eine Technik beschrieben, bei der durch ein nach genauen Regeln vorgeschriebenes Verfahren eine Informationsverminderung vorgenommen wird, mit dem Ziel eine „vielziffrige Zahl leichter handhabbar“ (ebd.) zu machen. In diesem Sinne kann man die Ausgangszahl 135788 auf den nächstgelegenen Zehner (135790), auf den nächsten Hunderter (135800), auf den nächsten Tausender (136000) usw. runden. Dies geschieht unabhängig davon, ob die Zahl als Rechenzahl benutzt wird oder nicht. Folgende Regeln sind beim Runden zu beachten:

> „Beim Runden einer Zahl auf eine bestimmte Stelle entscheidet die Ziffer in der rechten Nachbarstelle, ob abgerundet oder aufgerundet wird. Steht in der rechten Nachbarstelle 0 ,1, 2, 3, 4, so wird abgerundet. Steht in der rechten Nachbarstelle 5, 6, 7, 8, 9, so wird aufgerundet.“ (Breidenbach, 1969, S. 158)

**Schätzen**

Das *Schätzen* hingegen kommt ohne vorgeschriebene Verfahren aus. Das Schätzen bezieht sich in der vorliegenden Arbeit auf das Schätzen von Größen und Anzahlen (ebd.), während Breidenbach (1969) beispielsweise nur vom „Entfernungsschätzen“ spricht. Das Schätzen zeichnet sich unter anderem dadurch aus, „daß (!) wir eine genaue Angabe mindestens für den Augenblick nicht machen können“ (Breidenbach 1969, S. 159). Somit muss man „ausgehend von sog. Stützpunktvorstellungen (etwa der Höhe einer Tür) durch Vereinfachung oder Bildung von Bruchteilen zu ungefähren Anzahl- bzw. Größenangaben“ (Selter 2007) ein folglich ungefähres Ergebnis bestimmen, so wie die nachstehenden Beispiele dies verdeutlichen (vgl. Bild 2-1).

Vor allem die englischen Bezeichnungen machen deutlich, dass die beiden Aufgaben für unterschiedliche Arten des Schätzens stehen. So geht es bei der „Murmel-Aufgabe“ um das Schätzen von Anzahlen (*numerosity estimation*), die Frage „Wie viele?“ ist dabei charakteristisch (Sowder 1992a, S 371; vgl. auch O’Daffer 1979). Bei der „Dinosaurier-Aufgabe“ geht es um das Schätzen von Größen (*measurement estimation*). Die englische Bezeichnung (*measurement* = „das Messen“) macht dabei deutlich, dass es sich bei dieser Art des Schätzens gewissermaßen um eine Alternative zum Messen handelt. Es ist ein Prozess, der zu einem Messergebnis führt, ohne dass ein Messinstrument genutzt wird (Sowder 1992a, S. 371).

**Überschlagen**

Beim *Überschlagen*, was im Zentrum der vorliegenden Arbeit steht, geht es hingegen darum, „das Ergebnis einer arithmetischen Operation ungefähr, das heißt, mit einer gewissen Näherung, aber damit durchaus auch mit einem einkalkulierten Fehler zu bestimmen“ (Lorenz 2005a, S. 44). Vereinzelt findet man dafür auch die Bezeichnung „Schätzendens Rechnen“ (Selter 1999a).

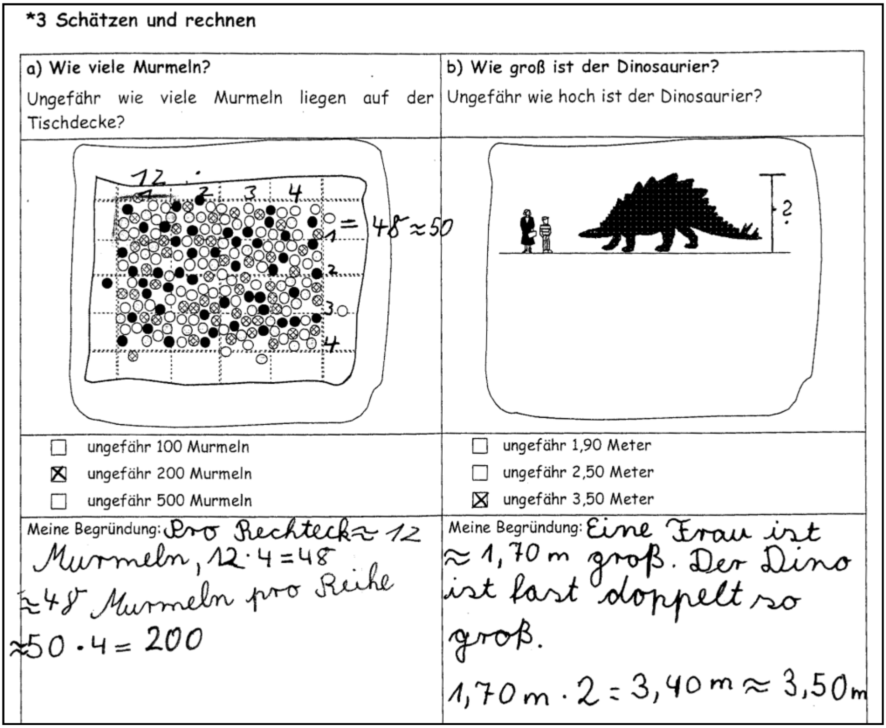


**Bild 2-1** Schätzaufgaben (in Anlehnung an Sundermann & Selter 2006, S. 93f.)

Die entsprechende englische Bezeichnung ist *computational estimation*, welche verdeutlicht, dass das Rechnen (*computation*) hier im Vordergrund steht. Breidenbach (1969) macht in diesem Zusammenhang darauf aufmerksam, dass man bei einer Überschlagsaufgabe sehr wohl genau rechnen könnte (da alle Angaben anders als beim Schätzen verfügbar sind), man aber *bewusst auf eine genaue Rechnung verzichtet*. Die Intention eines Überschlags liegt in der *Vereinfachung der Aufgabe* (Lorenz 2005a, S. 44). Dabei gibt es kein vorgeschriebenes Verfahren (ebd.), obgleich häufig der Eindruck entsteht, Überschlagen bedeute stets das Rechnen mit gerundeten Zahlen. Dass dem nicht so ist, wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit ausführlich diskutiert.

### Weitere englische Begrifflichkeiten

Auch wenn die obige Zuordnung der englischen Begriffe vermuten lässt, dass es im englischen Sprachgebrauch weniger Unklarheiten bezüglich der Begrifflichkeiten gibt, so gibt es auch beziehungsweise gerade in der englischsprachigen Literatur Diskussionen. So wird der Begriff *estimation* einerseits häufig als Oberbegriff für das Schätzen (*numerosity, measurement estimation*) und das Überschlagen (*computational estimation*) genutzt, wie z.B. bei Sowder (1992a), andererseits bezieht sich der Begriff *estimation* in einigen Artikeln auch nur auf eine Form, sodass es nicht immer eindeutig ist, ob eher das Schätzen oder das Überschlagen oder beides gemeint ist (vgl. z.B. Faulk 1962).

Des Weiteren trifft man häufig auch auf die Bezeichnungen *numerical estimation* und *quantitative estimation*. Teilweise werden diese als Oberbegriffe genutzt: Siegler & Booth (2005, S. 198) beispielsweise verstehen unter *numerical estimation* alle Formen von *estimation*, bei denen Zahlen im Gebrauch sind (vgl. auch Booth & Siegler 2006). Hogan et al. (2003) hingegen nutzen die Bezeichnung *quantitative estimation* als Oberbegriff für das Schätzen und Überschlagen. Lang (1999) dagegen versteht darunter eher nur das Schätzen von Anzahlen.

**Überschlagen/Schätzen und Approximation**

Darüber hinaus werden im Englischen die Begriffe *estimation* und *approximation* häufig missverstanden, worauf insbesondere Sowder (1992a, S. 373) hinweist. Zum einen werden die beiden Begriffe synonym gebraucht. So benutzt Smart (1982, S. 642) beispielsweise den Begriff der Approximation zur Definition des Begriffs *estimation* ohne dabei in die o.g. verschiedenen Typen von *estimation* zu unterscheiden. Zum anderen plädieren Siegel, Goldsmith & Madson (1982, S. 212) für eine klare Trennung der beiden Bezeichnungen und die synonyme Verwendung wird als problematisch betrachtet. Sie sehen „estimation to be a process leading to a solution to a problem of counting or measurement" (S. 211). Dies entspricht aber eher dem Schätzen im oben beschriebenen Sinne. Mit ihrer Definition von Approximation („approximation provides a rough solution to arithmetic problems, starting and ending in numbers" (ebd.)) beziehen sie sich gleichzeitig auf das, was in der vorliegenden Arbeit als Überschlag bzw. bei Sowder (1992a) und Hogan et al. (2003) als *computational estimation* bezeichnet wird.

Hall (1984) hingegen grenzt die Begriffe *estimation* und *approximation* anders voneinander ab (vgl. auch Sowder 1992a, S. 373). Er sieht *estimation* im Sinne der oben vorgenommenen Zuordnung eher als Oberbegriff für das Schätzen **und** Überschlagen. Die wesentliche Unterscheidung sieht Hall (1984) darin, dass es sich beim Schätzen/Überschlagen eher um ein sinnvolles, an Stützpunkten orientiertes Raten handelt, während man beim Approximieren versucht so nah wie möglich bzw. nötig an den genauen Wert zu gelangen. Als ein Beispiel dafür wird das Folgende angegeben (vgl. Hall 1984, S. 517):

Geht es darum, zu 4/17 den passenden Dezimalbruch zu finden, wäre eine schätzende Lösung zu sagen, dass 4/17 etwas weniger als 1/4 ist und somit könnte ein gut geschätzter Dezimalwert 0,238 sein. Die Lösung beruht also auf einer Annahme, einer „wohlbegründeten Vermutung“, wie sich die Bezeichnung des Schätzens als „*educated guess*“ (Thompson 1979; Hall 1984) frei übersetzen lässt. Will man den Dezimalbruch approximieren, so rechnet man hingegen genau (hier z.B. mit dem schriftlichen Divisionsalgorithmus) und gibt sich dann durch vorzeitiges Beenden der genauen Rechnung mit drei Nachkommastellen zufrieden, man nähert sich dem Ergebnis an (vgl. Hall 1984; Sowder 1992a). Eine ähnliche Unterscheidung findet sich bei Thompson (1979). Auch wenn die Begriffe *estimation* und *approximation* nicht einheitlich verwendet werden, so scheint die Unterscheidung, wie man sie bei Hall (1984) und Thompson (1979) findet, sinnvoll, weil diese am ehesten der Unterscheidung entspricht, wie sie auch von Mathematikern unternommen wird (vgl. Sowder 1992a). Gleichzeitig erscheint eine scharfe Trennung aber nicht immer sinnvoll, da die Übergänge fließend sein können.

**Fazit**

Im der vorliegenden Arbeit wird das Überschlagsrechnen im Sinne von Lorenz (2005a), als das Bestimmen eines ungefähren Ergebnisses einer Rechnung verstanden. Eine arithmetische Operation wird dabei bewusst durch eine leichtere Rechnung ersetzt. Man wechselt also bewusst von der „Welt der genauen Zahl“ in die „Welt der ungenauen Zahl“.

Eine Approximation hingegen wird in der vorliegenden Arbeit als eine Näherungsrechnung verstanden, bei der man sich durch (wiederholtes) Anwenden genauer Rechnungen oder durch das Abbrechen einer genauen Rechnung, wie oben beschrieben, dem genauen Wert von Rechenschritt zu Rechenschritt weiter annähert. Letztlich bleibt man in der „Welt der genauen Zahl“, erreicht nur nicht das genaue Ergebnis. Beim Überschlagsrechnen dagegen rechnet man zur Vereinfachung der eigentlichen Rechnung vielmehr mit ‚Stellvertretern‘ genauer Zahlen und erhält folglich eine Art Modelllösung.

### 2.1.2 Merkmale des Überschlagsrechnens

Im vorhergehenden Abschnitt wurde bereits dargelegt, dass sich ein Überschlag unter anderem dadurch auszeichnet, dass man eine genaue Rechnung vereinfacht. Betrachtet man weitere Definitionen eines Überschlags, so zeigt sich, dass auch weitere Merkmale mitunter eine Rolle spielen und der Aspekt der Vereinfachung gleichzeitig nicht immer im Vordergrund steht oder unterschiedlich aufgefasst wird.

**Vereinfachung**

So halten es beispielsweise De Corte & Somers (1981) eher allgemein, wie eine ungefähre Lösung entsteht: „by passing roughly and in an abbreviated way through the solution process“ (ebd., S. 7). Andere Definitionen hingegen verweisen konkret auf das Runden von Zahlen als Form der Vereinfachung (vgl. z.B. Oehl 1965; Koyama 1994). Dies wiederum steht im Gegensatz zu Lorenz‘ Definition (Lorenz 2005a, s.o.), der explizit darauf hinweist, dass der Überschlag nicht nach vorgefertigten Regeln gelingen kann (Lorenz 2005a, S. 44). Gleichzeitig findet der Aspekt der Vereinfachung in vielen Veröffentlichungen auch gar keine Erwähnung.

**Mündlichkeit**

Eng verbunden mit dem Merkmal der Vereinfachung ist die Sicht auf das Überschlagsrechnen als ein Kopfrechnen (auch mündliches Rechnen, vgl. Selter 1999b), wobei hier mitunter zwei Sichtweisen auszumachen sind.

So wird in mehreren Definitionen des Überschlagsrechnens explizit vom Kopfrechnen bzw. mental computation/processes gesprochen (Oehl 1965; Reys, R. & Bestgen 1982; Reys B. 1986b; Koyama 1994; Kirk 1998). LeFevre, Greenham & Waheed (1993, S. 95) sprechen zum Beispiel von einem „process of simplifying an arithmetic problem […] through mental calculation“. In anderen Veröffentlichungen ist hingegen zusätzlich oder stattdessen die Rede von Rechnungen, die ohne externe Hilfen wie beispielsweise Notizen oder schriftlichen Rechnungen auskommen (Dickey 1934; Reys, R., Rybolt, Bestgen & Wyatt 1980; Reys, R.E, Trafton, Reys, B.B., Zawojewski 1984; Koyama 1994).

Diesen unterschiedlichen Sichtweisen begegnen Reys R., Lindquist, Lambdin, Smith & Suydam in neueren Veröffentlichungen, indem sie deutlich machen, dass das Überschlagsrechnen zwar in der Regel im Kopf durchgeführt werden sollte, es aber auch Situationen gibt, in denen es sinnvoll sein kann etwas aufzuschreiben (2004, S. 239). Insbesondere erscheint es für längere Überschlagsrechnungen hilfreich Zwischenergebnisse oder die gerundeten Zahlen zu notieren, um das Kurzzeitgedächtnis zu entlasten. Auch wird man im Unterricht nur schwer vollständig auf Verschriftlichungen verzichten können.

Somit gilt es also das Kopfrechnen mit Notizen nicht mit dem schriftlichen Rechnen im Sinne der Algorithmen zu vermischen. In diesem Zusammenhang sei auf die Unterscheidung der Rechenmethoden in das Zahlen- und Ziffernrechnen verweisen, so wie sie von Selter (1999b) formuliert wird. Zwar unterscheidet man traditionellerweise in das schriftliche, das halbschriftliche und das mündliche Rechnen (Kopfrechnen). Während das schriftliche Rechnen ein Ziffernrechnen ist, geht es beim halbschriftlichen und mündlichen Rechnen aber um das Operieren mit Zahlganzheiten und wird somit von Selter als Zahlenrechnen zusammengefasst und dem Ziffernrechnen gegenübergestellt. Mit Bezug auf die oben dargestellten unterschiedlichen Sichtweisen auf das Überschlagsrechnen, erscheint somit der Blick auf das Überschlagsrechnen als ein Zahlenrechnen sinnvoll, auch das mündliche Rechnen ist zutreffend, insofern informelle Notationen eingeschlossen werden.

**Schnelligkeit**

Teilweise in Ergänzung und teilweise unabhängig von dem Aspekt der Vereinfachung, findet man in einigen Definitionen zum Überschlag den Aspekt der Schnelligkeit, welcher wiederum in Beziehung zum Überschlagsrechnen als Kopfrechnen steht. So betont Oehl (1965), dass der Überschlag „schnell im Kopf durchgeführt werden kann“ (S. 89), Reys, R. & Bestgen (1982) sprechen von einem „mental process which is performed quickly“ (S. 142). Auch wenn die Schnelligkeit in einem Großteil der Literatur nicht direkt in den jeweiligen Definitionen des Überschlags erwähnt wird, so spielt dieses Merkmal in empirischen Untersuchungen häufig eine zentrale Rolle. In vielen Untersuchungen zum Überschlagsrechnen bekommen die Versuchspersonen nur eine stark begrenzte Zeit (z.B. 15 Sekunden pro Aufgabe), um die Tests zu lösen (z.B. Reys, R. et al. 1980; Rubenstein 1985), sodass in diesen Untersuchungen eben davon ausgegangen wird, dass es sich bei einer Überschlagsrechnung um eine schnelle Rechnung handelt.

**Kontextabhängiger Grad der Genauigkeit**

Während der Überschlag nahezu einheitlich als ungefähre Lösung verstanden wird, so wird darüber hinaus häufig auf den Grad der Genauigkeit beziehungsweise die Nähe zum genauen Ergebnis verwiesen.

So sprechen zum Beispiel LeFevre et al. (1993, S. 95) von einer „approximate but satisfactory answer“. Reys et al. beschreiben Überschläge als „answers that are reasonably close to a correctly computed result" (Reys et al. 1980; Reys & Bestgen 1982; Reys et al. 1984), und Reys, B. definiert einen Überschlag als „answer that is sufficiently close to allow decisions to be made" (Reys, B. 1986a, S. 22). Smart (1982) argumentiert ähnlich, stellt den Grad der Genauigkeit in Abhängigkeit vom jeweiligen Kontext aber noch deutlicher heraus. Ein Überschlag ist für ihn eine ungefähre Lösung „that is sufficiently exact for a specified purpose" (S. 642).

Auch Lorenz (2005) sieht diese Kontextabhängigkeit und hält diese für zentral. Er betont aber ebenso, dass das Überschlagsergebnis nicht zu weit vom genauen Ergebnis abweichen und innerhalb tolerierbarer Grenzen liegen sollte. Solche Grenzen werden nicht selten durch prozentuale Abweichungen festgelegt, wobei aber bisweilen kein Konsens herrscht, welche Abweichung sinnvoll ist. Clayton (1996) hat in diesem Zusammenhang mehrere Studien zum Schätzen und Überschlagen verglichen und konnte feststellen, dass in einigen Studien nur diejenigen Ergebnisse als sinnvoll erachtet wurden, die um höchstens 15 % vom genauen Ergebnis abwichen (z.B. Paull 1971, zitiert in Clayton 1996), bei anderen Studien galten alle Ergebnisse, die bis zu 50 % vom genauen Ergebnis abwichen (z.B. Siegel et al. 1982), noch als korrekt. Folglich stellt sich die Frage, wie sinnvoll die prozentuale Abweichung des Überschlagsergebnisses vom genauen Ergebnis in Hinblick auf den Grad der Genauigkeit überhaupt ist (vgl. auch Sowder 1992a).

Insgesamt finden sich somit drei Richtungen in Bezug auf den Grad der Genauigkeit eines Überschlags: Entweder der Grad der Genauigkeit spielt in einzelnen Untersuchungen und Artikeln gar keine Rolle, der Grad der Genauigkeit spielt eine Rolle, ist kontextabhängig, aber nicht näher definiert bzw. muss kontextabhängig diskutiert werden oder der Grad der Genauigkeit wird durch prozentuale Abweichungen definiert.

**Übersicht zum Vorkommen der verschiedenen Merkmale**

Abschließend erlaubt die Tabelle 2.1 einen Überblick, in welchen Beiträgen die aufgezeigten und diskutierten Merkmale in welcher Ausprägung vorkommen.

Die Tabelle verdeutlicht einerseits die unterschiedliche Häufigkeit der verschiedenen Merkmale, andererseits die unterschiedlichen Ausprägungen. Insgesamt gibt es somit bisweilen keinen klaren Konsens darüber, was einen (guten) Überschlag ausmacht, wobei die verschiedenen Begriffsklärungen sicher auch vor dem Hintergrund des jeweiligen Forschungsinteresses der einzelnen Beiträge zu sehen sind.