

Thomas Hafner

# Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I

Empirische Untersuchung und didaktische Analysen

**WISSENSCHAFT**



**VIEWEG+  
TEUBNER**

Thomas Hafner

Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I

# VIEWEG+TEUBNER RESEARCH

## **Perspektiven der Mathematikdidaktik**

Herausgegeben von:

Prof. Dr. Gabriele Kaiser, Universität Hamburg

Prof. Dr. Rita Borromeo Ferri, Universität Kassel

Prof. Dr. Werner Blum, Universität Kassel

In der Reihe werden Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik publiziert, die diese Felder empirisch untersuchen, qualitativ oder quantitativ orientiert. Die Publikationen sollen daher auch Antworten zu drängenden Fragen der Mathematikdidaktik und zu offenen Problemfeldern wie der Wirksamkeit der Lehrerbildung oder der Implementierung von Innovationen im Mathematikunterricht anbieten. Damit leistet die Reihe einen Beitrag zur empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik und zu sich daraus ergebenden Forschungsperspektiven.

Thomas Hafner

# Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I

Empirische Untersuchung und didaktische Analysen

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Rudolf vom Hofe

VIEWEG+TEUBNER RESEARCH

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der  
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über  
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Dissertation Universität Bielefeld, 2011

1. Auflage 2012

Alle Rechte vorbehalten

© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2012

Lektorat: Ute Wrasmann | Sabine Schöller

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.

Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

[www.viewegteubner.de](http://www.viewegteubner.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-1926-0

# Geleitwort

Die individuelle Entwicklung des Proportionalitäts- und Prozentbegriffs und ihre psychologischen, pädagogischen und didaktischen Bedingungen sind seit Langem ein wichtiges Thema für das Lehren und Lernen von Mathematik. Vor dem Hintergrund der großen internationalen Vergleichsstudien TIMSS und PISA und der durch diese ausgelösten Entwicklung der kompetenzorientierten empirischen Bildungsforschung stellen sich auch für dieses Thema neue und bislang kaum beantwortete Fragen. So ist zum einen bislang ungeklärt, wie sich die Entwicklung des Proportionalitäts- und Prozentbegriffs und ihrer Bedingungen in Large Assessment Studies über längere Entwicklungszeiträume darstellen und inwieweit sich bekannte normative Modelle oder bislang durch Fall- bzw. Feldstudien gewonnene Hypothesen auch quantitativ empirisch bestätigen lassen. Auf der anderen Seite besteht angesichts der zunehmenden Fokussierung auf situiertes Lernen und auf individuelle Diagnostik und Förderung ein erheblicher Bedarf an Erkenntnissen über die Bedingungen individueller Lernprozesse in diesem wichtigen Anwendungsgebiet der Schulmathematik.

Im Bereich dieser Problemstellungen bewegt sich die vorliegende Dissertation von Thomas Hafner. In seinen in das DFG-Projekt PALMA eingebetteten Untersuchungen geht es zum einen um die Erfassung und Analyse der Entwicklung der mit dem Proportionalitäts- und Prozentbegriff zusammenhängenden mathematischen Teilkompetenzen, zum anderen um Rekonstruktion und Analyse spezifischer Schülerstrategien und Fehlermuster. Ziele seiner Untersuchungen sind zum einen die Klärung der Bedingungen der Gesamtentwicklung der untersuchten mathematischen Teilkompetenz und ihrer Differenzierung nach Schularten und Klassen, zum anderen die Identifizierung charakteristischer individueller Strategien und mentaler Muster. Während die Fragen des ersten Bereichs auf eine Klärung der Rahmenbedingungen schulischen Lernens abzielen, wird mit dem zweiten Bereich eine Verbesserung der Grundlagen für die Analyse individueller Lernprozesse angestrebt.

Die Untersuchungen werden auf drei Ebenen durchgeführt, die den Bereich Proportionalität und Prozentrechnung mit zunehmend höherer Auflösung fokussieren: Zunächst werden die quantitativ ermittelten globalen Ergebnisse zur Kompetenzentwicklung dargestellt, es folgt die Untersuchung von Lösungsstrategien anhand von quantitativen und qualitativen Aufgabenanalysen, als dritte Ebene erfolgt die Rekonstruktion authentischer Schülerstrategien und der zugrunde liegenden mentalen Modelle anhand der qualitativen Analyse von Fallbeispielen.

Die quantitativen Analysen dieser Arbeit basieren auf Subskalen der PALMA-Hauptuntersuchung, in der die mathematische Kompetenzentwicklung in einer für Bayern repräsentativen Stichprobe in Hauptschule, Realschule und Gymnasium über die gesamte Sekundarstufe I hinweg erfasst wird. Sie zeichnen ein differenziertes Bild der Leistungsheterogenität der einzelnen Schulformen und Lerngruppen. Dabei wird deutlich, dass nicht nur die Schulartzugehörigkeit, sondern auch die Klassenzugehörigkeit einen erheblichen Einfluss auf die Leistungswerte haben. Diese Ergebnisse dokumentieren u. a., dass ein dreigliedriges, weitgehend undurchlässiges Schulsystem – wie es der vorliegenden Untersuchung zugrunde liegt – die ihm bisweilen zugeschriebene Aufgabe einer angemessenen individuellen Förderung kaum zu erfüllen vermag.

In den Aufgabenanalysen werden mittels quantitativen und qualitativen Methoden typische Aufgaben aus der Hauptuntersuchung analysiert, um charakteristische Lösungswege und Fehlermuster zu identifizieren und damit Hinweise zur Aufklärung der dokumentierten Defizite zu gewinnen. Es gelingt dem Autor dabei, einen detaillierten Einblick in den Zusammenhang zwischen Aufgabenstruktur, Lösungsstrategien und Fehlermustern zu vermitteln. Auch hier zeigt sich ein differenziertes Bild, das nach Schulformen und Aufgabentypen erhebliche Unterschiede aufweist, wobei Dreisatzmuster als häufigste und solide, Operatorstrategien jedoch als überlegene Lösungsverfahren identifiziert werden. Ein weiteres bemerkenswertes Ergebnis ist es, dass mangelnde Rechenfähigkeiten – entgegen manchen Strömungen aktueller Didaktik, die stark die Rolle prozessorientierter Kompetenzen betonen – für den Erfolg elementarer Aufgaben von erheblicher Bedeutung sind und letztlich eine Voraussetzung für die tragfähige Anwendung prozessorientierter mathematischer Kompetenzen bilden.

Während Lösungs- und Fehlerstrategien im Rahmen der Aufgabenanalysen differenziert dargestellt werden können, wird die Ebene der zugrunde liegenden Grund- bzw. Fehlvorstellung hier nur unzureichend erfasst. Hierzu werden im dritten Ergebnisteil prototypische Fallstudien betrachtet, in denen Lösungsstrategien mittels halbstandardisierter Interviews erhobener Transskripte im Detail rekonstruiert werden. Zusätzlich zur bislang betrachteten Sach- und Strategieebene wird damit die direkte Interaktion in Lösungsprozessen erfassbar. Die Analysen vermitteln einen Einblick in die Komplexität elementarer Modellierungen und bestätigen zahlreiche aus der Literatur bekannte Fehlkonzpte sowie Fehlermuster, die sich bereits in den beiden vorhergehenden Ergebnisteilen der vorliegenden Arbeit andeuteten. So erweisen sich spezifische Zuordnungsfehler als wesentliches Problem, ebenso wie übergeneralisierte Übertragungen aus dem Denken mit natürlichen Zahlen, die über mehrere Jahre zu verfestigten Fehlvorstellungen wurden, wie etwa die intuitive Annahme, dass Multiplikation stets vergrößere.

Insgesamt ergeben die Analysen Thomas Hafners ein präzises und detailliertes Bild der schulischen Behandlung von Prozenten und Proportionen mit zahlreichen interessanten Hinweisen für die Weiterentwicklung dieses wichtigen Gebietes der Schulmathematik in Theorie und Praxis.

Bielefeld im Oktober 2011

Rudolf vom Hofe

# Danksagung

Auf dem Weg zu diesem Buch haben mich viele Menschen begleitet, die sich auf unterschiedlichste Weise für mich eingesetzt haben. Ihnen möchte ich für ihre Unterstützung und ihr Engagement an dieser Stelle danken.

Neben der wissenschaftlichen und fachlichen Betreuung der Arbeit durch Anregungen und Ratschläge bedarf es auch des privaten und familiären Rückhalts, sodass ich vor allem

- meinem Doktorvater Prof. Dr. Rudolf vom Hofe,
- allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern der PALMA-Projektgruppe, sowie den teilgenommenen Schülerinnen und Schülern und Lehrerinnen und Lehrern,
- der Arbeitsgruppe Empirische Unterrichtsforschung des Instituts für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld,
- meiner Familie und
- allen anderen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben,

einen ganz herzlichen Dank aussprechen möchte.

Ebenso möchte ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft danken, die das PALMA-Projekt im Gesamten und die Durchführung meiner Interviews im Besonderen finanziell unterstützt hat.

Bielefeld im Juli 2011

Thomas Hafner

# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis .....	XV
Tabellenverzeichnis .....	XVII
<b>1 Einleitung .....</b>	<b>1</b>
<b>2 Forschungszusammenhang.....</b>	<b>5</b>
2.1 Die Längsschnittuntersuchung PALMA .....	5
2.2 Anlage und Ziele von PALMA.....	6
2.3 Erhebungsinstrumente und Auswertung.....	8
2.4 Einordnung der vorliegenden Arbeit .....	9
<b>3 Mathematische Grundbildung .....</b>	<b>11</b>
3.1 Allgemeinbildender Mathematikunterricht .....	11
3.2 Mathematical literacy .....	12
3.3 Bildungsstandards.....	14
3.4 Modellierungskompetenz.....	16
<b>4 Mentale Modelle mathematischer Inhalte.....</b>	<b>21</b>
4.1 Grundvorstellungen .....	21
4.1.1 Begriffsbestimmung.....	21
4.1.2 Kernpunkte des Grundvorstellungskonzepts.....	22
4.1.3 Ausbildung von Grundvorstellungen .....	23
4.1.4 Didaktischer Nutzen von Grundvorstellungen .....	25
4.2 Concept image und concept definition .....	26
4.2.1 Begriffsbestimmung.....	26
4.2.2 Merkmale und Eigenschaften.....	26
4.2.3 Bezug zu mathematischen Grundvorstellungen .....	28
4.3 Conceptual change.....	29
4.3.1 Begriffsbestimmung.....	29
4.3.2 Bedeutung für die Mathematikdidaktik.....	30
4.3.3 Beziehungen zum das Grundvorstellungskonzept.....	31
<b>5 Proportionalität und Prozentrechnung .....</b>	<b>33</b>
5.1 Proportionalität .....	33
5.1.1 Grundvorstellungen proportionaler Zuordnungen.....	33

5.1.2	Lösungsstrategien.....	35
5.2	Prozentrechnung .....	37
5.2.1	Grundvorstellungen zur Prozentrechnung.....	37
5.2.2	Lösungsstrategien bei den Grundaufgaben .....	38
5.2.3	Vermehrter und verminderter Grundwert.....	40
5.3	Lehrplananalyse.....	42
5.4	Untersuchungen zu Proportionalität und Prozentrechnung.....	46
5.4.1	Studien zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen.....	46
5.4.2	Inhaltsspezifische Untersuchungen.....	47
5.4.3	Untersuchungen zur Entwicklung formalen Denkens.....	55
5.4.4	Untersuchungen aus dem anglo-amerikanischen Sprachraum .....	56
5.4.5	Forschungsdesiderata .....	60
<b>6</b>	<b>Konkretisierung der Ziele und Forschungsfragen .....</b>	<b>61</b>
6.1	Leistungsmonitoring und -entwicklung .....	61
6.2	Bearbeitung typischer Aufgabenstellungen .....	62
6.3	Analyse individueller Denkprozesse und Vorstellungen .....	63
<b>7</b>	<b>Anlage und Methoden der Untersuchung .....</b>	<b>65</b>
7.1	Anlage der Untersuchung .....	65
7.1.1	Stichprobe .....	65
7.1.2	Subskala Proportionalität und Prozentrechnung .....	68
7.2	Methoden der Untersuchung.....	70
7.2.1	Das dichotome Rasch-Modell .....	70
7.2.2	Halbstandardisiertes Interview .....	73
<b>8</b>	<b>Leistungsmonitoring und -entwicklung.....</b>	<b>75</b>
8.1	Längsschnittliche Kompetenzentwicklung auf Schulformebene .....	76
8.2	Detailbetrachtung Realschule .....	80
8.3	Analyse auf Klassenebene .....	83
8.4	Zusammenfassung .....	87
<b>9</b>	<b>Bearbeitung typischer Aufgabenstellungen .....</b>	<b>89</b>
9.1	Aufgabe: Aktion Mensch.....	90
9.1.1	Normative Aufgabenanalyse.....	90
9.1.2	Globale Ergebnisse.....	92
9.1.3	Strategie-Analysen .....	93
9.1.4	Fehler-Analysen .....	96
9.2	Aufgabe: Frau Fuchs.....	101

---

9.2.1	Normative Aufgabenanalyse .....	101
9.2.2	Globale Ergebnisse.....	102
9.2.3	Strategie-Analysen .....	104
9.2.4	Fehler-Analysen .....	106
9.3	Aufgabe: Erbsen .....	113
9.3.1	Normative Aufgabenanalyse .....	113
9.3.2	Globale Ergebnisse.....	114
9.3.3	Strategie-Analysen .....	116
9.3.4	Fehler-Analysen .....	119
9.4	Zusammenfassung .....	124
<b>10</b>	<b>Analyse individueller Lösungsprozesse und Vorstellungen.....</b>	<b>131</b>
10.1	Auswahl und Dokumentation der Schülerinterviews.....	132
10.2	Aufgabe: Fahrradkontrolle.....	133
10.2.1	Hinweise zur Aufgabe.....	133
10.2.2	Zuordnungsfehler bei mathematischen Operationen.....	135
10.2.3	Zuordnungsfehler bei Größen .....	138
10.2.4	Formelfehler.....	141
10.3	Aufgabe: Cola.....	144
10.3.1	Hinweise zur Aufgabe.....	145
10.3.2	Zuordnungsfehler bei Größen .....	146
10.3.3	Zuordnungsfehler bei Operationen.....	148
10.4	Aufgabe: iPod .....	156
10.4.1	Einordnung der Aufgabe .....	157
10.4.2	Maxims Lösung.....	159
10.4.3	Lenas Lösungsversuche .....	162
10.5	Zusammenfassung .....	170
<b>11</b>	<b>Resümee und Ausblick.....</b>	<b>173</b>
	<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>185</b>
	<b>Anhang .....</b>	<b>201</b>

# Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.1: PALMA-Längsschnittdesign .....	7
Abbildung 3.1: Dimensionen der Bildungsstandards .....	15
Abbildung 3.2: Mathematischer Modellbildungsprozess .....	17
Abbildung 3.3: Mathematik und der Rest der Welt.....	18
Abbildung 3.4: Modellierungskreislauf mit Grundvorstellungen (GV).....	19
Abbildung 4.1: Vermittelnder Charakter von Grundvorstellungen .....	22
Abbildung 5.1: Vermehrter Grundwert (1).....	41
Abbildung 5.2: Vermehrter Grundwert (2).....	41
Abbildung 5.3: Verminderter Grundwert (1).....	41
Abbildung 5.4: Verminderter Grundwert (2).....	42
Abbildung 7.1: Anforderungsniveaus am Beispiel der Prozentrechnung.....	69
Abbildung 7.2: Item characteristic curves für zwei Items unterschiedlicher Schwierigkeit.....	71
Abbildung 7.3: Normalverteilung.....	72
Abbildung 7.4: Graphischer Modellgeltungstest der Subskala P&P .....	73
Abbildung 8.1: Längsschnittliche Leistungsentwicklung.....	77
Abbildung 8.2: Effektgrößen als Maß für Leistungszuwächse.....	78
Abbildung 8.3: Leistungsverteilung im Schulformvergleich.....	79
Abbildung 8.4: Kompetenzentwicklung der Realschulstichproben.....	82
Abbildung 8.5: Standardabweichungen der Realschulstichprobe.....	83
Abbildung 8.6: Klassenmittelwerte mit Standardabweichung.....	86
Abbildung 9.1: <i>Aktion Mensch</i> - Lösungshäufigkeiten auf Schulklassenebene.....	93
Abbildung 9.2: <i>Aktion Mensch</i> - Absolute Häufigkeiten der Fehlerkategorien.....	96
Abbildung 9.3: <i>Aktion Mensch</i> - Verteilung der Rechenfehler auf Rechenarten.....	97
Abbildung 9.4: <i>Aktion Mensch</i> - Zuordnungsfehler bei mathematischen Operationen .....	99
Abbildung 9.5: <i>Aktion Mensch</i> - Divisionsstrategien .....	99
Abbildung 9.6: <i>Aktion Mensch</i> - Subtraktionsstrategien .....	100
Abbildung 9.7: <i>Aktion Mensch</i> - Defizite im Umgang mit der fiktiven Maßeinheit % .....	100
Abbildung 9.8: <i>Frau Fuchs</i> - Lösungshäufigkeiten auf Schulklassenebene.....	103
Abbildung 9.9: <i>Frau Fuchs</i> - Absolute Häufigkeiten der Fehlerkategorien.....	106

Abbildung 9.10: <i>Frau Fuchs</i> - Verteilung der Rechenfehler auf Rechenarten.....	107
Abbildung 9.11: <i>Frau Fuchs</i> - Zuordnungsfehler beim Prozentwert .....	108
Abbildung 9.12: <i>Frau Fuchs</i> - Zuordnungsfehler bei Größen.....	109
Abbildung 9.13: <i>Frau Fuchs</i> - Zuordnungsfehler beim Grundwert .....	109
Abbildung 9.14: <i>Frau Fuchs</i> - Zuordnungsfehler in Verbindung mit Operatorstrategien .....	110
Abbildung 9.15: <i>Frau Fuchs</i> - Anpassung von Ergebnissen .....	110
Abbildung 9.16: <i>Frau Fuchs</i> - Zuordnungsfehler bzgl. Operationen .....	111
Abbildung 9.17: <i>Frau Fuchs</i> - Multiplikation und subjektive Anpassung des Ergebnisses.....	111
Abbildung 9.18: <i>Frau Fuchs</i> - Division mit Antwortsatz.....	112
Abbildung 9.19: <i>Frau Fuchs</i> - Addition mit Antwortsatz .....	112
Abbildung 9.20: <i>Erbsen</i> - Lösungshäufigkeiten auf Schulklassenebene .....	115
Abbildung 9.21: <i>Erbsen</i> - Lösungsstrategien mit Operator- und Dreisatz-Merkmalen .....	117
Abbildung 9.22: <i>Erbsen</i> - Absolute Häufigkeiten der Fehlerkategorien .....	119
Abbildung 9.23: <i>Erbsen</i> - Verteilung der Rechenfehler auf Rechenarten .....	120
Abbildung 9.24: <i>Erbsen</i> - Fehler beim Erweitern des Bruches .....	120
Abbildung 9.25: <i>Erbsen</i> - Zuordnungsfehler .....	121
Abbildung 9.26: <i>Erbsen</i> - Summe aus 500 g und 100 g als Bezugswert.....	121
Abbildung 9.27: <i>Erbsen</i> - Zuordnungsfehler bei Operationen.....	121
Abbildung 9.28: <i>Erbsen</i> - Fehlstrategie <i>große Zahl : kleine Zahl</i> .....	122
Abbildung 9.29: <i>Erbsen</i> - Subtraktion und Anpassung des Ergebnisses .....	122
Abbildung 9.30: <i>Erbsen</i> - Multiplikation und Anpassungsstrategien.....	123
Abbildung 9.31: <i>Erbsen</i> - Falsche Prozentformeln zur Berechnung des Prozentsatzes .....	123
Abbildung 10.1: Florians Berechnung des Quotienten $100 : 40$ .....	135
Abbildung 10.2: Lucias Gleichung zur Aufgabe Fahrradkontrolle .....	141
Abbildung 10.3: Lucias Lösungsweg im erweiterten Episodenplan.....	143
Abbildung 10.4: Rainers Berechnung des Teils einer Größe.....	151
Abbildung 10.5: Rainers erweiterter Episodenplan .....	155
Abbildung 10.6: Maxims Lösung zur Aufgabe iPod.....	160
Abbildung 10.7: Lenas Ausgangsgleichung .....	162
Abbildung 10.8: Lenas Subtraktion von 19 %.....	165
Abbildung 10.9: Lenas Rechnung zum Teilschritt der Rabattierung.....	167
Abbildung 10.10: Lenas erweiterter Episodenplan.....	169
Abbildung 11.1: Kompetenzentwicklung der Längsschnittstichprobe .....	174

# Tabellenverzeichnis

Tabelle 5.1: Proportionalität und Prozentrechnung im Lehrplan.....	45
Tabelle 7.1: Gesamtstichprobe .....	67
Tabelle 7.2: Längsschnittstichprobe .....	67
Tabelle 7.3: Anzahl der Testitems zur Prozentrechnung .....	69
Tabelle 7.4: Likelihood-Ratio-Test.....	72
Tabelle 8.1: Normierte Leistungswerte der Längsschnittstichprobe.....	76
Tabelle 8.2: Realschulstichprobe.....	81
Tabelle 9.1: Einordnung der Aufgaben.....	89
Tabelle 9.2: <i>Aktion Mensch</i> - Globale Ergebnisse .....	92
Tabelle 9.3: <i>Aktion Mensch</i> - Lösungsstrategien .....	94
Tabelle 9.4: <i>Aktion Mensch</i> - Erfolgsquote der Lösungsstrategien.....	95
Tabelle 9.5: <i>Aktion Mensch</i> - Zusammenhang zwischen Rechenfehler und Schulform .....	97
Tabelle 9.6: <i>Aktion Mensch</i> - Zuordnungsfehler bei Größen.....	98
Tabelle 9.7: <i>Frau Fuchs</i> - Globale Ergebnisse .....	103
Tabelle 9.8: <i>Frau Fuchs</i> - Lösungsstrategien .....	104
Tabelle 9.9: <i>Frau Fuchs</i> - Erfolgsquote der Lösungsstrategien.....	105
Tabelle 9.10: <i>Frau Fuchs</i> - Zusammenhang Rechenfehler und Schulform.....	107
Tabelle 9.11: <i>Erbsen</i> - Globale Ergebnisse .....	115
Tabelle 9.12: <i>Erbsen</i> - Lösungsstrategien.....	116
Tabelle 9.13: <i>Erbsen</i> - Erfolgsquote der Lösungsstrategien .....	118
Tabelle 9.14: Zusammenfassung - Aufgaben .....	124
Tabelle 9.15: Zusammenfassung - Lösungsstrategien .....	126
Tabelle 9.16: Zusammenfassung - Rechenfehler.....	127
Tabelle 9.17: Zusammenfassung - Zuordnungsfehler.....	128
Tabelle 10.1: Aufgaben aus der Interview-Studie .....	131
Tabelle 11.1: Aufgaben zur Prozentrechnung im Vergleich.....	176
Tabelle 11.2: Lösungsstrategien im Vergleich .....	177
Tabelle 11.3: Zuordnungsfehler bei mathematischen Operationen und Größen.....	179

# 1 Einleitung

Seit den ersten Veröffentlichungen der Ergebnisse aus TIMSS-1995 (*Third International Mathematics and Science Study*) und PISA-2000 (*Programme for International Student Assessment*) sind die Schulausbildung und insbesondere der Mathematikunterricht in der Öffentlichkeit in aller Munde. Da diese beiden Studien Deutschland einen Rangplatz bescheinigten, der unter dem Durchschnitt der OECD-Länder liegt, meldeten sich zu diesem Thema nicht nur Wissenschaftler aus Mathematikdidaktik, Psychologie und Pädagogik, sondern auch Politiker, Wirtschaftsvertreter, Medien, Lehrerverbände und Elterninitiativen zu Wort. Neben plakativen und provozierenden Aussagen wie „Deutschland ist gefährdet“ (Merkens, 2003) wurde auch sehr schnell nach möglichen Ursachen für das vergleichsweise schlechte Abschneiden deutscher Schülerinnen und Schüler<sup>1</sup> gesucht und erste Forderungen wurden diskutiert und abgeleitet.

Unter dem Einfluss der ersten PISA-Ergebnisse und der sog. Klieme-Expertise (vgl. Klieme, Avenarius, Blum, Döbrich, Gruber, Prenzel, Reiss, Riquarts, Rost, Tenorth & Vollmer, 2003), die von der *Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland* in Auftrag gegeben wurde, wurden 2003 unter anderem die *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss* von der Kultusministerkonferenz beschlossen und für alle Bundesländer verpflichtend eingeführt. Ein Jahr später wurden entsprechende Standards auch für den Primarbereich und Hauptschulabschluss formuliert (vgl. Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2004). Diese Regelstandards erweitern die bestehenden, inhaltlich orientierten Lehrpläne um prozessbezogene, inhaltsübergreifende Kompetenzen, die Schüler in Zusammenhang mit mathematischen Inhalten erwerben sollen.

Die Auswertungen der PISA-Erhebungen von 2003, 2006 und 2009 machten weiterhin deutlich, dass zwar im Vergleich zum Jahre 2000 deutliche Leistungssteigerungen erzielt wurden, insgesamt die Leistungen deutscher Schüler im internationalen Vergleich jedoch nur im Mittelfeld anzusiedeln sind.

Die oben erwähnten Vergleichsstudien sind querschnittlich angelegt und daher nur begrenzt in der Lage, Entwicklungsverläufe zu erfassen und das Zustandekommen der Leistungen bzw. Leistungsdefizite zu erklären. Aus diesem

---

<sup>1</sup> Die Personenbezeichnungen Schüler, Lehrer, usw. sind im Folgenden geschlechtsneutral zu verstehen. Es wird zugunsten der besseren Lesbarkeit auf die entsprechende weibliche Form verzichtet, ohne das eine oder andere Geschlecht zu bevorzugen bzw. zu benachteiligen.

Grund wurde die von der DFG geförderte Längsschnittstudie PALMA (*Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik*) ins Leben gerufen. Dieses Projekt untersuchte neben Entwicklungsverläufen von Mathematikleistungen während der Sekundarstufe I im Hinblick auf mathematische Grundbildung auch Voraussetzungen der Leistungen auf Seiten der Schüler und Kontextbedingungen in Unterricht, Schulklasse und Elternhaus.

Die vorliegende Arbeit ist Teil des PALMA-Projekts und bezieht sich auf die kerncurricularen Inhalte *Proportionalität* und *Prozentrechnung*. Hauptziel dieser Untersuchung ist es, die Leistungsentwicklung von Schülern in diesen Inhaltsbereichen über die Sekundarstufe I hinweg zu analysieren.

Bei *Proportionalität* und *Prozentrechnung* handelt es sich um zentrale und zusammenhängende schulmathematische Themengebiete, die weit über den schulischen Unterricht hinaus im Alltag präsent sind und ihre Anwendungen in vielen lebenspraktischen Situationen finden.

Diese alltagsrelevanten Inhalte wurden noch vor einigen Jahren als Kerngebiete der Hauptschule angesehen, in der *Sachrechnen* und *bürgerliches Rechnen* eine weitaus bedeutendere Rolle einnahm als an Realschulen oder Gymnasien. Seit den PISA-Untersuchungen werden jedoch gerade diesen anwendungsorientierten Themen und der damit eng verbundenen prozessbezogenen Kompetenz des *mathematischen Modellierens* eine weitaus höhere Bedeutung beigemessen. Dies gewinnt insofern an Brisanz, als auch bei Schülern an Gymnasien in diesen Themenbereichen Defizite nachgewiesen werden konnten (vgl. PISA-Konsortium Deutschland, 2004b, S. 86ff).

Daher besteht im Rahmen dieser Arbeit besonderes Interesse an folgenden zentralen Punkten:

- Wie ist der aktuelle Leistungsstand hinsichtlich der Inhalte Proportionalität und Prozentrechnung von Schülern in der Sekundarstufe I?
- Welche Leistungsentwicklung lässt sich feststellen?
- Welche Gemeinsamkeiten, Unterschiede und Auffälligkeiten gibt es in den einzelnen Schulformen?
- Welche Rolle spielt die Klassenzugehörigkeit?
- Welche Strategien verwenden Schüler zum Lösen typischer Aufgabenstellungen und wie erfolgreich sind sie?
- Wo liegen besondere Leistungsdefizite bei Schülern?
- Worin sind die Fehler der Schüler begründet?
- Lassen sich Hinweise zur Verbesserung der Schul- und Unterrichtspraxis aus den Ergebnissen ableiten?

Die Arbeit gliedert sich in drei Teilbereiche. Zuerst werden zugrunde liegende theoretische, kognitionspsychologische und didaktische Aspekte dargestellt (Kapitel 2-5). Anschließend werden sowohl Ziele als auch Forschungsfragen konkretisiert (Kapitel 6). Im dritten Teil erfolgen empirische Untersuchungen, Analysen und Auswertungen (Kapitel 7-10), die abschließend (Kapitel 11) zusammengefasst werden.

## 2 Forschungszusammenhang

### 2.1 Die Längsschnittuntersuchung PALMA

Sowohl auf internationaler als auch auf nationaler Ebene wurden in den letzten Jahrzehnten zahlreiche Vergleichsuntersuchungen zu Mathematikleistungen von Schülern durchgeführt, z. B. die *Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS), das *Programme for International Student Assessment* (PISA) oder die *Internationale Grundschul-Lese-Untersuchung* (IGLU). Diese Studien dokumentieren eine erhebliche Streuung der Schülerleistungen, insbesondere in Naturwissenschaften und dem Fach Mathematik. Die dabei festgestellten Leistungsdifferenzen beziehen sich auf *inter-* und *intra-*nationale Unterschiede. Neben dem durchschnittlichen Abschneiden deutscher Schüler im internationalen Vergleich ist den Auswertungen der nationalen PISA-Daten zusätzlich zu entnehmen, dass signifikante Unterschiede in den Mathematikleistungen zwischen Bundesländern, Schulformen und auch Klassenverbänden zu verzeichnen sind (vgl. etwa PISA-Konsortium Deutschland, 2002 und 2004a; Baumert, 2003; Bos, Lankes, Prenzel, Schwippert, Valtin & Walther, 2004; Möller & Prasse, 2009). Darüber hinaus wurden mehrfach korrelative Zusammenhänge zwischen Mathematikleistungen von Schülern und Individual- bzw. Kontextvariablen konstatiert (vgl. etwa Helmke & Weinert, 1997; Baumert & Lehmann, 1997; Baumert, Bos & Lehmann, 2000; PISA-Konsortium Deutschland, 2007). Damit entsteht zwar ein differenziertes und umfassendes Monitoring des Bildungssystems zu einem bestimmten Zeitpunkt, aber aufgrund der querschnittlichen, nicht experimentellen Untersuchungsanlage sind

„Aussagen zu prognostischen Beziehungen, Bedingungsbeziehungen und Handlungsmöglichkeiten aus den Daten dieser Studien selber nicht ableitbar“ (Pekrun, 2002, S. 113).

Dies liegt daran, dass Querschnittstudien prinzipiell nur begrenzt dazu beitragen, Entwicklungsverläufe von Mathematikleistungen darzustellen, Ursachen für Leistungsdefizite zu erkunden, präventive Handlungsmöglichkeiten abzuleiten, den Einfluss von Sozialkontexten auf die Kompetenzentwicklung zu analysieren und die Bedeutung von Emotionen beim Mathematiklernen zu untersuchen, da ihre Erhebungen entweder punktuell angelegt sind, oder sich wiederholende Erhebungswellen auf unterschiedliche Stichproben beziehen.

Diese Desiderata (vgl. Pekrun, 2002) waren unter anderem Motivation für die Längsschnittstudie *Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik* (PALMA), eine empirische und interdisziplinäre Forschungsk Kooperation aus Pädagogischer Psychologie und Didaktik der Mathematik. Die PALMA-Studie wurde durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) im Zeitraum von 2000 bis 2008 gefördert und war zugleich von 2000 bis 2006 ein Teil des DFG-Schwerpunktprogramms *Die Bildungsqualität von Schule* (BIQUA). Geleitet wird dieses DFG-Projekt von Prof. R. Pekrun (Department Psychologie, Universität München), Prof. R. vom Hofe (Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld<sup>2</sup>) und Prof. W. Blum (Didaktik der Mathematik, Universität Kassel). Sowohl Anlage, Konzeption und Ziele dieser Untersuchung werden im Folgenden genauer erläutert.

## 2.2 Anlage und Ziele von PALMA

Das PALMA-Projekt ist als prospektiv-längsschnittliche Erweiterung der OECD-Studie PISA angelegt und verfolgt das übergeordnete Ziel, Leistungsentwicklungen und deren Bedingungen im Fach Mathematik während der Sekundarstufe I, also von der 5. bis zur 10. Jahrgangsstufe, zu analysieren (vgl. vom Hofe, Pekrun, Kleine & Götz, 2002).

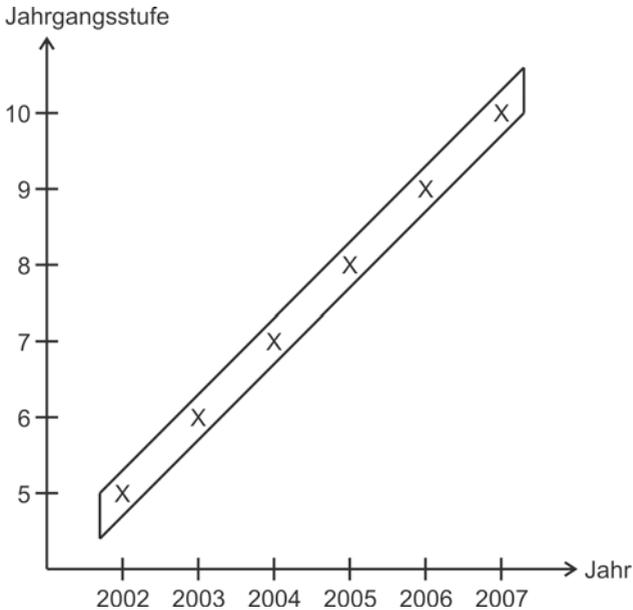
Die Längsschnittuntersuchung wurde erstmalig gegen Ende des Schuljahres 2001/2002 mit einer für die 5. Jahrgangsstufe repräsentativen Stichprobe bayerischer Schüler durchgeführt. Die Stichprobenziehung erfolgte durch das *Data Processing and Research Center* (DPC) der *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA) in Hamburg, das unter anderem die drei Schulformen Hauptschule, Realschule und Gymnasium bei der Auswahl der Schüler berücksichtigte. Zum ersten Messzeitpunkt (abgekürzt: MZP 1) wurden ausschließlich gesamte Klassenverbände getestet, die – sofern es möglich war – weiter verfolgt wurden. Dadurch sollen klassenbezogene Effekte bzgl. Unterrichts- und Kontextvariablen abgeschätzt werden. Der Längsschnitt wird komplettiert durch sich jährlich wiederholende Erhebungswellen bis zum sechsten Messzeitpunkt (MZP 6) in der 10. Jahrgangsstufe (siehe Abbildung 2.1).

Bei der Weiterverfolgung der ausgewählten Schülerkohorte werden nach Möglichkeit auch Klassenwiederholer – also Schüler, die das Bestehen der Jahrgangsstufe nicht erreicht hatten – in der Längsschnittstichprobe belassen und weiter in die Studie einbezogen. Diese Stichprobenstrategie versucht dem Problem der zunehmenden Positivselektion zu begegnen, das in schulischen Längs-

---

<sup>2</sup> bis April 2006: Didaktik der Mathematik, Universität Regensburg

schnittuntersuchungen häufig anzutreffen ist. (vgl. Pekrun, Götz, vom Hofe, Blum, Jullien, Zirngibl, Kleine, Wartha, & Jordan, 2004). Darüber hinaus werden wichtige Informationen über das bislang wenig analysierte Problem der Klassenwiederholung in Deutschland gesammelt (vgl. Bellenberg, 1999).



**Abbildung 2.1:** PALMA-Längsschnittdesign

Mit dem zugrunde gelegten Testdesign werden insbesondere (1) Entwicklungsverläufe von Mathematikleistungen im Hinblick auf mathematische Grundbildung, (2) Voraussetzungen der Leistungen auf Seiten der Schüler und (3) Kontextbedingungen in Unterricht, Schulklasse und Elternhaus untersucht (vgl. vom Hofe et al., 2002).

In Bezug auf die Leistungsentwicklung in Mathematik werden folgende Aspekte fokussiert:

- Neben einer allgemeinen mathematischen Kompetenz werden die Teilfähigkeiten Modellieren und Kalkül-orientiertes Rechnen gegenübergestellt. (Näheres zum Begriff des Modellierens siehe Kapitel 3.4 auf S. 16ff.)
- Im Zentrum steht die Analyse von Modellierungskompetenzen und die damit zusammenhängende Rolle mathematischer Grundvorstellungen von Schülern. (Näheres zum Begriff der Grundvorstellungen siehe Kapitel 4.1 auf S. 21ff.)

- Die Entwicklung der Fähigkeiten wird nach spezifischen mathematischen Inhaltsbereichen (z. B. Arithmetik, Algebra oder Geometrie) bzw. mathematischen Schlüsselbegriffen (z. B. Bruchzahl- oder Funktionsbegriff) untersucht.
- Die Untersuchungen sollen auch Aufschluss über die Entwicklung von Kompetenzdefiziten und Fehlkonzepten geben (vgl. vom Hofe, Kleine, Blum & Pekrun, 2005).
- Aus den gewonnenen Erkenntnissen sollen Produkte für die pädagogische Praxis entwickelt werden, die sowohl in der Unterrichtsgestaltung und -evaluation als auch in der Lehrerbildung eingesetzt werden können (vgl. Pekrun et al. 2004).

„Insgesamt ist es ein Ziel von PALMA, ein detailliertes Bild der Genese mathematischer Fähigkeiten zu zeichnen. Dies soll dem übergeordneten Ziel dienen, empirisch begründete, methodisch-didaktische und stofflich-curriculare Konsequenzen zu gewinnen“ (vom Hofe et al., 2005, S.280).

Die Schwerpunkte bei der Erhebung zu Schülervoraussetzungen liegen in den Bereichen *Mathematikemotionen*, *selbstreguliertes Lernen* und *Motivation*. Bezüglich der Kontextbedingungen wird über die Kontexte *Mathematikunterricht* und *Schulklasse* hinaus auch das *Elternhaus* und der Umgang der Eltern mit Leistungsanforderung im Fach Mathematik berücksichtigt (vgl. vom Hofe et al., 2002).

## 2.3 Erhebungsinstrumente und Auswertung

Das Instrumentarium zur empirischen Analyse besteht aus vorhandenen sowie neu entwickelten Erhebungsinstrumenten. Kognitive Grundfähigkeiten der Schüler werden mithilfe des Kognitiven Fähigkeitstests (KFT) von Heller und Perleth (2000) erfasst. Die Erhebungen weiterer Variablen zu Schülermerkmalen (z. B. selbstbezogene Kognitionen, Motivation, Lern- und Problemlöseverhalten und Aufmerksamkeitsressourcen) erfolgt über Schülerfragebögen mit Selbstberichtsskalen. Die *Münchener Skalen zu Mathematikemotionen* wurden für diese Längsschnittuntersuchung neu entwickelt und erprobt. Bei den Erhebungsinstrumenten von Kontextvariablen zu Unterricht, Klasse und Elternhaus handelt es sich um auf das Fach Mathematik abgestimmte Fragebögen und Skalen, die nicht nur aus Sicht der Schüler, sondern in analoger Weise auch aus Lehrer- bzw. Elternperspektive beantwortet werden (vgl. etwa zu MZP 6 Pekrun, Lichtenfeld,

Frenzel, Götz, Blum, vom Hofe, Jordan & Kleine, 2008). Eine detaillierte Übersicht der erhobenen Variablen findet sich bei Pekrun et al., 2004.

Mathematische Kompetenzen werden mithilfe des *Regensburger Mathematikleistungstests für 5.-10. Klassen* erhoben, der im Rahmen von PALMA entwickelt und in Pilotstudien und Voruntersuchungen erfolgreich erprobt wurde (vgl. Kleine, 2004). Dieser beruht auf dem PISA-Kompetenzkonzept im Sinne von *mathematical literacy* unter Einbeziehung mathematischer Grundvorstellungen, wie es in Kapitel 3 detaillierter beschrieben wird.

Der Rasch-skalierte Test gestattet die längsschnittliche Darstellung der mathematischen Leistungsentwicklung über mehrere Messzeitpunkte hinweg und eignet sich zudem zur differenzierten quantitativen Erfassung unterschiedlicher Kompetenzbereiche (vgl. vom Hofe et al., 2002).

Implementierte Itemserien in Form von Subtests erfassen Modellierungskompetenzen in den zentralen mathematischen Inhaltsgebieten (1) Arithmetik, (2) Algebra, (3) Geometrie und orientieren sich damit an den entsprechenden inhaltlichen Leitideen (1) *Quantität*, (2) *Veränderung und Beziehung* und (3) *Raum und Form* der PISA-Konzeption (vgl. PISA-Konsortium Deutschland, 2004a). Parallel dazu lassen sich in einer eigenen Subskala Entwicklungsverläufe zu Kalkül-Kompetenzen darstellen. Zur Bearbeitung der Kalkül-Items müssen lediglich Regeln, schematische Lösungsverfahren oder Algorithmen angewendet werden. Diese Aufgabengruppe entspricht den technischen Items der PISA-Aufgaben (vgl. vom Hofe et al., 2005; Neubrand, Biehler, Blum, Cohors-Fresenborg, Flade, Knoche, Lind, Löding, Möller & Wynands, 2001).

Die Erhebungen zu mathematischen Kompetenzen werden durch qualitative Interviewstudien abgerundet, die ab dem zweiten Messzeitpunkt (6. Klasse) durchgeführt werden. Bei der Zusammenstellung der Interviewaufgaben kommen aus dem Haupttest parallelisierte Aufgaben zum Einsatz; entsprechend der Jahrgangsstufe werden auch inhaltliche Schwerpunkte gesetzt, z. B. in der 6. Jahrgangsstufe Bruchrechnung, in der 7. Jahrgangsstufe negative Zahlen und ab der 8. Jahrgangsstufe Funktionen.

Ziel der Interviews ist es, Lösungsstrategien, Details des Lösungsprozesses und mögliche Fehlvorstellungen aufzudecken und zu analysieren, die im Rahmen der quantitativen Untersuchung nicht ausreichend erfasst werden können.

## 2.4 Einordnung der vorliegenden Arbeit

Diese Arbeit ist inhaltlich und methodisch in das PALMA-Projekt eingebettet und verfolgt das Ziel, Mathematikleistungen von Schülern der Sekundarstufe I in