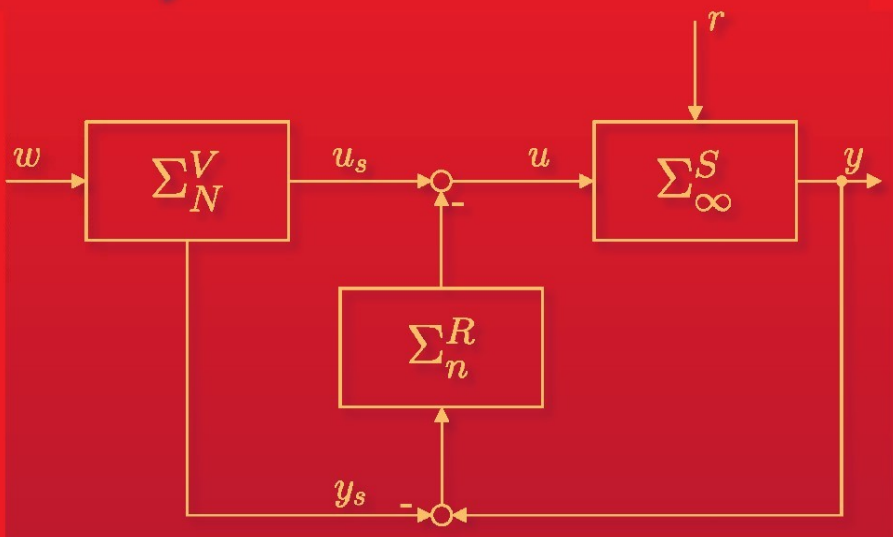


# Zustandsregelung verteilt- parametrischer Systeme



# Zustandsregelung verteilt-parametrischer Systeme

Joachim Deutscher

# Zustandsregelung verteilt-parametrischer Systeme

 Springer

PD Dr.-Ing. habil. Joachim Deutscher  
Lehrstuhl für Regelungstechnik  
Universität Erlangen-Nürnberg  
Cauerstraße 7  
91058 Erlangen  
joachim.deutscher@rt.eei.uni-erlangen.de

ISBN 978-3-642-19558-7 e-ISBN 978-3-642-19559-4  
DOI 10.1007/978-3-642-19559-4  
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

*Einbandentwurf:* WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media ([www.springer.com](http://www.springer.com))

# Vorwort

Bei vielen technischen Prozessen und dynamischen Systemen ändern sich die beschreibenden Systemgrößen nicht nur mit der Zeit, sondern hängen auch signifikant vom Ort ab. Typische Beispiele hierfür sind räumliche Temperaturverteilungen bei thermischen Prozessen oder elastische Verformungen von Leichtbaustrukturen im Anlagen-, Maschinen- und Fahrzeugbau. Im Gegensatz zu konzentriert-parametrischen Systemen, die durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden, führt die Modellbildung dieser Systeme auf partielle Differentialgleichungen. Gegenstand dieses Buches ist der Entwurf von Steuerungen und Regelungen für solche sog. verteilt-parametrische Systeme. Um einen einheitlichen Zugang zu dieser Problemstellung zu ermöglichen, wird die Zustandsbeschreibung verteilt-parametrischer Systeme als Ausgangspunkt gewählt. Damit ist es möglich, bewährte Verfahren der Zustandsraummethodik für konzentriert-parametrische Systeme auf den verteilt-parametrischen Fall zu verallgemeinern. Dies hat auch den Vorteil, dass die Betrachtung konzentriert-parametrischer Systeme in den resultierenden Entwurfsverfahren als Spezialfall enthalten ist, was den Einstieg in die anspruchsvolle Thematik für den Leser erleichtert. Ein weiteres besonderes Merkmal des Buches ist die konsequente Verwendung einer Struktur mit zwei oder mehr Freiheitsgraden für die Steuer- und Regeleinrichtung. Diese Struktur schafft die Voraussetzung für einen zielgerichteten Entwurf, indem sie es ermöglicht, das gewünschte Sollverhalten sowie die geforderte Unterdrückung der Störeinflüsse getrennt und unabhängig voneinander einzustellen.

Vorausgesetzt wird vom Leser, dass er mit der Zustandsraummethodik für konzentriert-parametrische Mehrgrößensysteme vertraut ist, wie man sie beispielsweise in [27, 57] findet. Der Hauptteil des Buches ist so angelegt, dass man auch ohne Vorkenntnisse der Funktionalanalysis der Darstellung leicht folgen kann. Für das Verständnis der Beweise im Anhang sind allerdings Grundlagen zur Funktionalanalysis notwendig, die man beispielsweise in [14, 43, 46, 56] findet. Auf die Modellbildung von verteilt-parametrischen

Systemen wird im Buch nicht eingegangen. Eine anschauliche Einführung in diese Thematik bietet [28].

Dieses Buch ist aus meiner Habilitationsschrift „Zwei-Freiheitsgrade-Regelung linearer verteilt-parametrischer Systeme im Zustandsraum“ für das Fachgebiet Regelungstechnik hervorgegangen, die 2010 von der Technischen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg angenommen wurde. Die vorliegende Fassung ergab sich aus den Erfahrungen mit einer anschließenden Vorlesungstätigkeit zum Themenfeld der Habilitation sowie einer Überarbeitung und Erweiterung der Habilitationsschrift. Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. G. Roppenecker bin ich für die Betreuung der Habilitation sowie für den mir in diesem Zusammenhang gewährten Freiraum zu Dank verpflichtet. Mein Dank gilt auch den weiteren Mitgliedern des Fachmentorats Herrn Prof. Dr.-Ing. M. Albach und Herrn Prof. Dr. J. Jahn, die das Habilitationsvorhaben wissenschaftlich begleitet haben. Externe Gutachten für die Habilitationsschrift wurden von Herrn Prof. Dr.-Ing. U. Konigorski und Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. B. Lohmann angefertigt, wofür ich mich ebenfalls herzlich bedanken möchte. Unterstützt bei der Erstellung des Buches wurde ich auch von meinen Doktoranden aus der Forschungsgruppe „Unendlich-dimensionale Systeme“ am Lehrstuhl für Regelungstechnik der Universität Erlangen-Nürnberg. Herr Dipl.-Ing. Ch. Harkort und Herr Dipl.-Ing. M. Bäuml haben das gesamte Manuskript einer kritischen Prüfung unterzogen und mir durch viele konstruktive Verbesserungsvorschläge bei Erstellung der Endversion geholfen. Teile der Buches wurden auch von Herrn Dipl.-Ing. A. Mohr durchgesehen. All diesen Mitarbeitern sowie den Studenten, die in Projekt-, Studien- und Diplomarbeiten Vorarbeiten zum Buch geleistet haben, möchte ich meinen Dank aussprechen.

Fragen und konstruktive Kritik sowie Verbesserungsvorschläge, die von mir dankbar entgegengenommen werden, können an meine E-Mail-Adresse [joachim.deutscher@rt.eei.uni-erlangen.de](mailto:joachim.deutscher@rt.eei.uni-erlangen.de) gesendet werden.

Erlangen, im September 2011

*Joachim Deutscher*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung und Übersicht</b> .....	1
1.1	Einführung .....	1
1.2	Übersicht .....	4
<b>2</b>	<b>Zustandsbeschreibung linearer verteilt-parametrischer Systeme</b> .....	9
2.1	Einführendes Beispiel .....	10
2.2	Riesz-Spektralsysteme .....	17
2.2.1	Systembeschreibung durch Zustandsgleichungen .....	17
2.2.2	Lösung der Zustandsgleichungen .....	34
2.2.3	Exponentielle Stabilität .....	46
2.2.4	Beschreibung des Ein-/Ausgangsverhaltens im Frequenzbereich .....	48
2.3	Verteilt-parametrische Systeme mit Randeingriff .....	57
<b>3</b>	<b>Regelung mit mehreren Freiheitsgraden</b> .....	67
3.1	Regelungsstruktur mit einem Freiheitsgrad .....	67
3.2	Regelungsstruktur mit zwei Freiheitsgraden .....	68
3.2.1	Vorsteuerung des Führungsverhaltens .....	69
3.2.2	Regelung des Störverhaltens .....	71
3.3	Regelung mit mehr als zwei Freiheitsgraden .....	72
3.4	Verteilt-parametrische Regelung mit mehreren Freiheitsgraden .....	73
<b>4</b>	<b>Entwurf von Vorsteuerungen</b> .....	75
4.1	Stabilisierung durch Zustandsrückführung .....	76
4.1.1	Entwurf durch Eigenwertvorgabe .....	77
4.1.2	Parametrische Lösung des Eigenwertvorgabeproblems .....	83
4.2	Führungs- und Störgrößenaufschaltung .....	95
4.2.1	Problemstellung .....	96
4.2.2	Entwurf der Führungs- und Störgrößenaufschaltung .....	99
4.2.3	Entwurf des Zustandsfolgereglers .....	106

4.2.4	Vorsteuerung des Führungs- und Störverhaltens mittels „late-lumping“ . . . . .	113
4.3	Ein-/Ausgangsentkopplung des Führungsverhaltens . . . . .	119
4.3.1	Einführendes Beispiel . . . . .	120
4.3.2	Problemstellung . . . . .	123
4.3.3	Bestimmung des Rückführoperators . . . . .	129
4.3.4	Bestimmung des Vorfilters . . . . .	132
4.3.5	Vorsteuerung des Führungsverhaltens mittels „late-lumping“ . . . . .	140
4.4	Vorsteuerungsentwurf mittels „early-lumping“ . . . . .	142
4.4.1	Führungs- und Störgrößenaufschaltung . . . . .	143
4.4.2	Ein-/Ausgangsentkopplung . . . . .	155
4.5	Entwurf der Vorsteuerung zum Arbeitspunktwechsel . . . . .	164
4.5.1	Problemstellung . . . . .	164
4.5.2	Flachheit endlich-dimensionaler linearer Systeme . . . . .	166
4.5.3	Flachheitsbasierter Steuerungsentwurf . . . . .	173
<b>5</b>	<b>Entwurf von Ausgangsfolgereglern</b> . . . . .	<b>183</b>
5.1	Beobachterbasierte Ausgangsrückführung . . . . .	184
5.1.1	Entwurf von Ausgangsbeobachtern . . . . .	185
5.1.2	Separationsprinzip . . . . .	194
5.1.3	Parametrischer Entwurf . . . . .	199
5.2	Stabilisierung der Folgefehlerdynamik . . . . .	212
5.3	Robuste asymptotische Störkompensation . . . . .	225
<b>6</b>	<b>Abschließende Betrachtungen</b> . . . . .	<b>243</b>
<b>A</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b> . . . . .	<b>245</b>
A.1	$C_0$ -Halbgruppen . . . . .	245
A.2	Adjungierte Operatoren . . . . .	249
A.3	Sturm-Liouville-Operatoren . . . . .	253
<b>B</b>	<b>Ergänzungen zu den Beispielsystemen</b> . . . . .	<b>257</b>
B.1	Wärmeleiter mit Dirichletschen Randbedingungen . . . . .	257
B.2	Beidseitig drehbar gelagerter Euler-Bernoulli-Balken . . . . .	262
<b>C</b>	<b>Beweise und Herleitungen</b> . . . . .	<b>271</b>
C.1	Beweis des Eigenwertkriteriums . . . . .	271
C.2	Beweis von Satz 2.1 . . . . .	272
C.3	Beweis von Satz 4.2 . . . . .	275
C.4	Beweis von Satz 4.4 . . . . .	276
C.5	Beweis von Satz 4.5 . . . . .	277
C.6	Beweis von Satz 4.6 . . . . .	280
C.7	Beweis von Satz 4.7 . . . . .	281
C.8	Beweis von Satz 4.9 . . . . .	283
C.9	Modale Approximation des Verlaufs der Ausgangsgröße $y_s$ . . . . .	286



C.10 Beweis von Satz 4.12 .....	286
C.11 Beweis von Satz 4.13 .....	287
C.12 Herleitung der Zustandsbeschreibung (4.324)–(4.326) .....	288
C.13 Bestimmung der Übertragungsmatrix $F_d(s)$ .....	289
C.14 Nachweis der Regularität der Matrix $T$ .....	291
C.15 Beweis von Satz 5.3 .....	292
C.16 Beweis von Satz 5.4 .....	293
C.17 Beweis von Satz 5.6 .....	294
C.18 Beweis von Satz 5.7 .....	294
C.19 Beweis von Satz 5.8 .....	300
C.20 Beweis von Satz 5.9 .....	303
C.21 Beweis von Satz 5.10 .....	304
C.22 Beweis von Satz 5.11 .....	305
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	<b>307</b>
<b>Sachverzeichnis</b> .....	<b>311</b>

# Kapitel 1

## Einführung und Übersicht

### 1.1 Einführung

Bei vielen technischen Prozessen wird das Systemverhalten durch örtliche Transportprozesse, Ausgleichsvorgänge oder örtliche Wellenausbreitung bestimmt. Damit sind die Systemgrößen nicht nur zeitabhängig sondern auch ortsabhängig. Die Modellbildung solcher technischer Prozesse führt somit auf *verteilt-parametrische Systeme*, deren Dynamik durch *partielle Differentialgleichungen* beschrieben wird, da die dynamische Entwicklung sowohl vom Ort als auch von der Zeit abhängt. Aus diesem Grund ist die Behandlung von verteilt-parametrischen Systemen deutlich aufwändiger als die von *konzentriert-parametrischen Systemen*. Letztere werden nämlich durch gewöhnliche Differentialgleichungen modelliert, weil keine örtliche Abhängigkeit der Systemgrößen auftritt. Beispiele für verteilt-parametrische Systeme sind die Beschreibung der Temperaturverteilung auf einem wärmeleitenden Stab oder die Verbiegung eines Balkens. Diese einfachen Modelle können als Ausgangspunkt zur Modellierung technischer Prozesse wie z.B. von Schmelzöfen für die Glasherstellung oder von mechanischen Schwingungen in elastischen Industrierobotern dienen.

Bei konzentriert-parametrischen Systemen ermöglicht die Beschreibung im Zustandsraum eine systematische Analyse der Systemdynamik. Da der zugehörige Zustandsraum stets ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist, gehören die konzentriert-parametrischen Systeme zur Klasse der *endlich-dimensionalen Systeme*. Die Grundidee der Zustandsbeschreibung im konzentriert-parametrischen Fall besteht darin, die anhand der Modellbildung gewonnenen Differentialgleichungen, die i.Allg. höherer Ordnung sind, durch Einführung von Zustandsgrößen als ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung darzustellen. Die Systemdynamik wird dann durch die Lösung eines *Anfangswertproblems* für dieses Differentialgleichungssystem beschrieben, die für lineare zeitinvariante Systeme bei Kenntnis des Anfangszustands und eventuell auftretender stückweise stetiger Anregungssignale existiert und ein-

deutig ist. Damit erfasst der Zustand die vollständige systeminterne Information, welche die dynamische Weiterentwicklung des Systems festlegt. Die Zustandsbeschreibung ist auch Grundlage für systematische Verfahren zum Entwurf von konzentriert-parametrischen Steuerungs- und Regelungssystemen. Deshalb ist es nahe liegend, zur Steuerung und Regelung eines verteilt-parametrischen Systems dieses durch ein konzentriert-parametrisches System zu approximieren und anschließend die Zustandsraummethodik auf die endlich-dimensionale Approximation anzuwenden. Diese als „*early-lumping*“-Methode bezeichnete Vorgehensweise besitzt jedoch den wesentlichen Nachteil, dass die gewünschten Anforderungen an das resultierende Steuerungs- und Regelungssystem nicht vorab durch den Entwurf sichergestellt werden können. Bestimmt man beispielsweise einen Regler mit dem „*early-lumping*“-Ansatz, dann muss die Stabilität der resultierenden verteilt-parametrischen Regelung nachträglich untersucht werden, weil der Regler i.Allg. nur die Approximation der Strecke stabilisiert (siehe z.B. [2]). Darüber hinaus kommt bei Anwendung dieser Vorgehensweise die Ordnung des Approximationsmodells als weiterer wesentlicher Entwurfparameter hinzu. Da man keine Aussage über dessen genauen Zusammenhang mit dem Entwurfsergebnis hat, wählt man ihn meist vergleichsweise hoch, um den Approximationsfehler klein zu halten. Dies bedeutet aber wiederum einen erhöhten Realisierungsaufwand für die Implementierung des Entwurfsergebnisses, wie z.B. die Realisierung eines Reglers sehr hoher Ordnung. Beim „*late-lumping*“-Ansatz wird nicht die Strecke, sondern das Entwurfsergebnis endlich-dimensional approximiert. Dies bedeutet beim Reglerentwurf, dass man zunächst einen verteilt-parametrischen Regler für die verteilt-parametrische Strecke entwirft. Anschließend muss dieses resultierende verteilt-parametrische System endlich-dimensional approximiert werden, um einen realisierbaren Regler zu erhalten. Dieser Ansatz hat bei der Reglerbestimmung den unmittelbaren Vorteil, dass man einerseits beim Entwurf des verteilt-parametrischen Reglers die Systemeigenschaften der Strecke berücksichtigen kann und sich andererseits die Reglerapproximation so durchführen lässt, dass Regelungseigenschaften, welche der verteilt-parametrische Regler sicherstellt, auch bei Verwendung der Reglerapproximation für die resultierende Regelung gelten. Aus diesen Gründen führt der Entwurf mittels „*late-lumping*“ meist zu besseren Ergebnissen.

Die Durchführung des „*late-lumping*“-Ansatzes erfordert eine allgemeine Methodik zur Bestimmung von Steuerungs- und Regelungssystemen für verteilt-parametrische Systeme. Es ist nahe liegend, auch hier wie bei konzentriert-parametrischen Systemen die Zustandsraummethodik heranzuziehen (siehe [14]). Bei diesen Systemen ergibt sich durch die Modellbildung zunächst ein *Anfangs-Randwertproblem* für eine partielle Differentialgleichung. Durch Einführung eines geeigneten Zustands lässt sich diese Systembeschreibung in ein *abstraktes Anfangswertproblem* überführen, das formal mit dem Anfangswertproblem einer konzentriert-parametrischen Zustandsbeschreibung übereinstimmt. Allerdings muss sowohl bei der Einführung des Zustands als auch

bei der Wahl des Zustandsraums darauf geachtet werden, dass das resultierende abstrakte Anfangswertproblem eine sinnvolle Systembeschreibung darstellt. Dies lässt sich beispielsweise leicht anhand eines Wärmeleiters veranschaulichen. Der Zustand ist offensichtlich durch die Temperaturverteilung auf dem Wärmeleiter gegeben, die neben der Zeit auch vom Ort abhängt. Bei der Zustandsbeschreibung von verteilt-parametrischen Systemen ist der Zustand eine sog. *abstrakte Funktion*, d.h. im betrachteten Beispiel ist die Ortsfunktion der Temperatur für jeden Zeitpunkt Element eines geeigneten Funktionenraums, der als Zustandsraum eingeführt wird. Bei der Wahl des Zustandsraums bzw. des Funktionenraums ist zu beachten, dass die Lösung des Anfangs-Randwertproblems Element dieses Funktionenraums ist. Diese Betrachtung macht bereits deutlich, dass man bei der Zustandsbeschreibung von verteilt-parametrischen Systemen wesentlich sorgfältiger vorgehen muss als bei konzentriert-parametrischen Systemen. Eine systematische Behandlung der im Zusammenhang mit der Zustandsbeschreibung von verteilt-parametrischen Systemen auftretenden Probleme ist mit Hilfe der *linearen Funktionalanalysis* möglich, die man als eine Verbindung der Analysis mit der linearen Algebra ansehen kann. Da der Zustandsraum von verteilt-parametrischen Systemen ein Funktionenraum und damit unendlich-dimensional ist, gehören die verteilt-parametrischen Systeme zur Klasse der *unendlich-dimensionalen Systeme*.

Bei linearen zeitinvarianten konzentriert-parametrischen Systemen hat sich die Zustandsraummethodik unter Verwendung von Eigenwerten und Eigenvektoren bei der Systemanalyse und -synthese als sehr tragfähig erwiesen. Insbesondere erlaubt diese Betrachtungsweise einen unmittelbaren Einblick in die vorliegende Systemdynamik oder ermöglicht eine klare Vorstellung über die vorzuziehende Dynamik. Aus diesem Grund ist dieser Ansatz für konzentriert-parametrische Systeme bereits weitestgehend untersucht (siehe z.B. [27, 57]). Die bisherige Behandlung der linearen zeitinvarianten verteilt-parametrischen Zustandsregelung mit diesem Ansatz beschränkt sich nur auf den Eingrößenfall (siehe z.B. [5, 68, 71]) oder wird erst gar nicht betrachtet, weil die modale Charakterisierung der Systemdynamik zu aufwändig erscheint. Dies steht aber im Widerspruch zur Tatsache, dass sich die Dynamik von vielen verteilt-parametrischen Mehrgrößensystemen, die in technischen Problemstellungen auftreten, mittels Eigenwerten und Eigenvektoren anschaulich charakterisieren lässt. Darüber hinaus wurden in [14] die sog. *Riesz-Spektralsysteme* eingeführt, mit denen eine sehr große Klasse solcher verteilt-parametrischer Systeme in einem einheitlichen Rahmen geeignet beschrieben werden kann. Ein weiterer Vorteil der modalen Betrachtungsweise ist, dass sich Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen konzentriert-parametrischen und verteilt-parametrischen Systemen einfach herausarbeiten lassen. Damit sind einerseits Vorgehensweisen der Zustandsraummethodik für konzentriert-parametrische Systeme auf den verteilt-parametrischen Fall übertragbar und andererseits können Ergebnisse der Zustandsraummethodik für verteilt-parametrische Systeme im Rahmen der konzentriert-

parametrischen Systeme interpretiert werden. Darüber hinaus wird die Zustandsraummethodik für verteilt-parametrische Systeme unter Verwendung der modalen Betrachtungsweise durch verfügbare leistungsfähige Softwarepakete gestützt, welche die Berechnung modaler Kenngrößen auch für komplizierte Geometrien mittels *Finiter Elemente* erlauben. Deshalb wird in diesem Buch eine *systematische Zustandsraummethodik für lineare verteilt-parametrische Mehrgrößensysteme* zum Entwurf von Steuerungs- und Regelungssystemen entwickelt, wobei Eigenwerte und Eigenvektoren wesentliche Kenngrößen für die Analyse als auch für die Synthese sind.

## 1.2 Übersicht

Bisherige Darstellungen der Zustandsbeschreibung verteilt-parametrischer Systeme setzen fortgeschrittene Kenntnisse im Bereich der Funktionalanalysis voraus und sind meist sehr abstrakt gehalten. Aus diesem Grund wird bei der Einführung der Zustandsbeschreibung von verteilt-parametrischen Systemen im *zweiten Kapitel* besonderer Wert auf eine anschauliche Darstellung gelegt. Voraussetzung sind dabei nur die Grundlagen zur Zustandsbeschreibung konzentriert-parametrischer Systeme. Die Ergebnisse dieses Kapitels werden auch anhand von zwei konkreten Beispielen verdeutlicht. Die Auswahl der dabei betrachteten verteilt-parametrischen Systeme orientiert sich an dem Ziel, den Zugang zu den vorgestellten Ergebnissen zu erleichtern. Das erste verteilt-parametrische System ist der *Wärmeleiter*, d.h. ein eindimensionaler Stab mit endlicher Länge, welcher einen verteilten Energiespeicher besitzt und der zur Klasse der *Sturm-Liouville-Systeme* gehört. Diese Klasse von verteilt-parametrischen Systemen lässt sich mit der modalen Betrachtungsweise sehr einfach und anschaulich behandeln. Beispielsweise besitzt der Wärmeleiter nur einfache reelle Eigenwerte, wobei nur endlich viele in der rechten Halbebene liegen. Darüber hinaus bilden seine Eigenvektoren eine orthogonale Basis im Zustandsraum, womit man Elemente des Zustandsraums problemlos nach den Eigenvektoren entwickeln kann. Aus diesem Grund wird der Wärmeleiter verwendet, um die betrachteten Sachverhalte zunächst anschaulich zu verdeutlichen. Das zweite Beispielsystem ist ein beidseitig drehbar gelagerter *Euler-Bernoulli-Balken*, welcher aufgrund der zwei vorhandenen verteilten Energiespeicher auch Schwingungsverhalten zeigen kann. Anhand dieses verteilt-parametrischen Systems lässt sich die Anwendungsbreite der vorgestellten Ergebnisse gut darstellen, da es kein Sturm-Liouville-System mehr ist. Beispielsweise bilden die Eigenvektoren des Euler-Bernoulli-Balkens im gedämpften Fall keine orthogonale Basis im Zustandsraum. Erst durch Formulierung des Balkens als Riesz-Spektralsystem wird eine modale Analyse sowie die darauf aufbauende modale Synthese ermöglicht. Damit bietet sich dieses System an, um allgemeinere Zusammenhänge zu veranschaulichen. In den nachfolgenden Kapiteln werden der Wärmeleiter und der Euler-Bernoulli-

Balken wieder aufgegriffen, um die vorgestellten Entwurfsverfahren anhand von konkreten Beispielen zu erproben. Im Vordergrund der Betrachtungen stehen verteilt-parametrische Systeme, bei denen der Stelleingriff im Inneren des Ortsbereichs auftritt, d.h. die Systembeeinflussung erfolgt durch einen *verteilten Eingriff*. Beim Wärmeleiter bedeutet dies, dass die Erwärmung entlang des Stabes und nicht am Anfang oder am Ende erfolgt. Bei vielen Anwendungsbeispielen ist ein Eingriff aber nur am Rand möglich oder einfacher zu realisieren. Beispielsweise kann die Erwärmung eines Stabes nur am Stab-anfang oder -ende möglich sein, wenn der Rest des Stabes für die Erwärmung nicht zugänglich ist. In diesem Fall spricht man von verteilt-parametrischen Systemen mit *Randeingriff*. Am Ende des zweiten Kapitels wird gezeigt, dass sich die meisten verteilt-parametrischen Systeme mit Randeingriff in Systeme mit verteiltem Eingriff überführen lassen. Deshalb ist die Betrachtung von verteilt-parametrischen Systemen mit verteiltem Eingriff keine wesentliche Einschränkung.

Ein weiteres besonderes Merkmal dieses Buches ist der durchgängige Entwurf von Steuerungs- und Regelungssystemen auf Grundlage der *Zwei-Freiheitsgrade-Struktur* (siehe [41,45]) und deren Verallgemeinerung auf mehr als zwei Freiheitsgrade. Bei solchen Regelungen wird das Führungsverhalten und das Verhalten bezüglich messbarer Störungen vorgesteuert. Unabhängig davon lässt sich das Störverhalten bezüglich nichtmessbarer Störungen und Modellunsicherheit durch eine Regelung einstellen. Diese Eigenschaften ermöglichen somit einen systematischen Entwurf von Steuerungs- und Regelungssystemen. Diese Zusammenhänge werden im *dritten Kapitel* zunächst allgemein vorgestellt. Danach folgt die Besprechung der Besonderheiten, die man bei Anwendung dieses Ansatzes auf verteilt-parametrische Systeme beachten muss.

Der weitere Aufbau des Buches ist durch den Entwurf von Regelungen mit mehreren Freiheitsgraden festgelegt, der sich in zwei weitere Kapitel zum Entwurf der Vorsteuerung und des Folgereglers gliedert. Im *vierten Kapitel* werden Methoden zur Bestimmung von *Vorsteuerungen* für verteilt-parametrische Systeme entwickelt. Hierbei wird zunächst der Entwurf von *modellgestützten Vorsteuerungen* behandelt. Die Grundidee der modellgestützten Vorsteuerung besteht darin, mittels eines Modellregelkreises den für die Vorsteuerung nötigen Stellsignalverlauf und die zugehörige Solltrajektorie für die Regelgröße zu erzeugen. Damit ist es möglich, Sollwertvorgaben eines Bedieners oder eines übergeordneten Systems online umzusetzen. Im Vergleich zur Regelung der tatsächlichen Strecke zeichnet sich dieser Ansatz durch zwei Besonderheiten aus. Einerseits sind alle Zustände des in der modellgestützten Vorsteuerung vorhandenen Streckenmodells unmittelbar zugänglich und andererseits ist das Modell exakt bekannt. Die erste Eigenschaft legt nahe, die modellgestützte Vorsteuerung mittels einer Zustandsrückführung durch Eigenwertvorgabe zu stabilisieren. Hierfür wird im vierten Kapitel eine explizite Lösung des zugehörigen Eigenwertvorgabeproblems hergeleitet, die eine Verallgemeinerung der von konzentriert-

parametrischen Systemen her bekannten *Vollständigen Modalen Synthese* ist (siehe [57]). Die zweite Eigenschaft der modellgestützten Vorsteuerung kann genutzt werden, um das Führungs- und Störverhalten mittels einer *Führungs- und Störgrößenaufschaltung* einzustellen. Die Robustheitsproblematik dieser Entwurfsmethode kommt bei Bestimmung der Steuerung nämlich nicht zum Tragen, da sie für das bekannte Streckenmodell entworfen wird. Da in diesem Buch von verteilt-parametrischen Mehrgrößensystemen ausgegangen wird, muss auch die Einstellung des Führungsverhaltens durch eine *Ein-/Ausgangsentkopplung* behandelt werden. Auf Grundlage des zu Beginn des Kapitels entwickelten parametrischen Entwurfsverfahrens für Zustandsrückführungen wird hierzu ein Ansatz zur systematischen Ein-/Ausgangsentkopplung von Riesz-Spektralsystemen angegeben. Nach dem Entwurf von modellgestützten Vorsteuerungen für verteilt-parametrische Systeme ergibt sich noch das Problem der endlich-dimensionalen Realisierung. Begleitend zur Entwicklung der Entwurfsverfahren für die Bestimmung der modellgestützten Vorsteuerung wird deshalb die Realisierung der resultierenden unendlich-dimensionalen Vorsteuerung mittels „late-lumping“ vorgestellt. In manchen Fällen kann die sich ergebende Vorsteuerung jedoch von vergleichsweise hoher Ordnung sein. Aus diesem Grund wird diese Vorgehensweise noch um eine weitere Entwurfsmethodik für Vorsteuerungen niedriger Ordnungen ergänzt. Bei diesem Ansatz erfolgt die Bestimmung der Vorsteuerung mittels „early-lumping“. Die beim Entwurf vernachlässigte Streckendynamik lässt sich anschließend durch Bestimmung einer zusätzlichen Störgrößenaufschaltung auf Grundlage der verteilt-parametrischen Strecke berücksichtigen, die stationäre Genauigkeit im vorgesteuerten Führungs- und Störverhalten sicherstellt. Dieses Ergebnis macht deutlich, dass auch der klassische „early-lumping“-Ansatz durch die Zustandsraumbetrachtung des verteilt-parametrischen Systems beim Entwurf sinnvoll erweitert werden kann. Das Kapitel zum Vorsteuerungsentwurf wird durch die Realisierung von Arbeitspunktwechsel abgeschlossen, die in praktischen Anwendungen häufig vorkommen. Bei dieser Problemstellung wird im Gegensatz zur modellgestützten Vorsteuerung die Solltrajektorie und die zugehörige Steuerung offline bestimmt. Damit muss kein dynamisches System in der Vorsteuerung realisiert werden, was die Verwendung modaler Approximationsmodelle sehr hoher Ordnung für den Steuerungsentwurf nahe legt. Ausgehend von diesem Ansatz wird der zugehörige Steuerungsentwurf für den Arbeitspunktwechsel unter Verwendung der Flachheitseigenschaft des Approximationsmodells vorgestellt.

Um nichtmessbare Störungen und Modellunsicherheit zu berücksichtigen, muss man die modellgestützte Vorsteuerung um eine Regelung ergänzen. Hierzu sind *endlich-dimensionale Regler* für verteilt-parametrische Systeme zu entwerfen. Da sich nur solche Regler in praktischen Anwendungen realisieren lassen, stellt die endlich-dimensionale Regelung von verteilt-parametrischen Systemen eine grundlegende Problemstellung dar. Sie wird durch die Tatsache erschwert, dass sich der systematische Entwurf einer be-

obachterbasierten Zustandsrückführung nicht auf verteilt-parametrische Systeme übertragen lässt, da der resultierende Regler unendlich-dimensional ist. Durch die endlich-dimensionale Approximation dieses Reglers im Rahmen des „late-lumping“-Ansatzes verliert das Separationsprinzip seine Gültigkeit, womit dem Entwurf seine Grundlage entzogen wird. Im *fünften Kapitel* wird deshalb ein alternativer Ansatz zum systematischen Entwurf endlich-dimensionaler Regler vorgestellt, der weder auf einer Streckenapproximation noch auf einer Reglerapproximation aufbaut. Vielmehr wird der endlich-dimensionale Regler direkt für die verteilt-parametrische Strecke entworfen, weshalb man auch von einem *direkten Reglerentwurf* spricht. Beim vorgestellten Ansatz wird die Grundidee der klassischen Zustandsregelung, beobachtete Systemgrößen zurückzuführen, so verallgemeinert, dass sie sich auch zur endlich-dimensionalen Regelung von verteilt-parametrischen Systemen verwenden lässt. Dies wird durch Entwurf eines *endlich-dimensionalen Ausgangsbeobachters* erreicht, der zusätzliche Ausgangsgrößen asymptotisch rekonstruiert. Mit ihm lässt sich dann eine statische Ausgangsrückführung der verfügbaren Messgrößen und der rekonstruierten Ausgangsgrößen implementieren. Für diese *beobachterbasierte Ausgangsrückführung* gilt das Separationsprinzip, weshalb der resultierende Regler bereits beim Entwurf die Stabilität der Regelung sicherstellt. Die systematische Durchführung des Entwurfs von beobachterbasierten Ausgangsrückführungen mittels Eigenwertvorgabe wird durch die allg. Parametrierung solcher Regler auf Grundlage der Vollständigen Modalen Synthese ermöglicht. Damit lassen sich endlich-dimensionale Regler für verteilt-parametrische Systeme mittels Parameteroptimierung gezielt bestimmen. Um externe Störungen, die sich durch Signalmodelle darstellen lassen, robust asymptotisch kompensieren zu können, wird die beobachterbasierte Ausgangsrückführung mit Hilfe des *internen Modellprinzips* erweitert. Der endlich-dimensionale Reglerentwurf wird durch Einführung von strukturellen Maßnahmen zur Vermeidung der durch Stellsignalbegrenzungen ausgelösten Probleme abgeschlossen.

Das *sechste Kapitel* gibt einen Ausblick auf die Anwendungsmöglichkeiten der vorgestellten Ergebnisse auf weitere Klassen linearer Systeme.

Um die Lesbarkeit des Buches zu verbessern, wurden die Beweise von Sätzen sowie umfangreichere Herleitungen in den Anhang verschoben. Er enthält auch einige wichtige mathematische Grundlagen sowie weitere Ergänzungen zu den beiden verteilt-parametrischen Beispielsystemen.



# Kapitel 2

## Zustandsbeschreibung linearer verteilt-parametrischer Systeme

In diesem Kapitel sind die wesentlichen *systemtheoretischen Grundlagen* zur Beschreibung von linearen verteilt-parametrischen Systemen im Zustandsraum zusammengestellt. Die Auswahl orientiert sich dabei an den im weiteren Verlauf des Buches vorgestellten Methoden zum Steuerungs- und Regelungsentwurf, weshalb kein Anspruch auf Vollständigkeit besteht. Eine umfassende Darstellung der Zustandsbeschreibung unendlich-dimensionaler Systeme findet man im Standardwerk [14], das in diesem Buch auch als Referenz für funktionalanalytische Grundlagen dient. Die Struktureigenschaften *Steuerbarkeit* und *Beobachtbarkeit* sind in dieser Zusammenfassung nicht aufgenommen, sondern werden erst in den nachfolgenden Kapiteln als Voraussetzungen für die Anwendung der Entwurfsverfahren eingeführt.

Zu Beginn des Kapitels wird zunächst die Problematik bei der Beschreibung verteilt-parametrischer Systeme im Zustandsraum anhand eines einfachen *Wärmeleiters* aufgezeigt. Diese Betrachtungen dienen als Motivation für die bei verteilt-parametrischen Systemen umfangreicheren Begriffsbildungen sowie für den mathematischen Aufwand, der nötig ist, um zu einer fundierten Systembeschreibung für den Steuerungs- und Regelungsentwurf zu kommen. Darüber hinaus wird im weiteren Verlauf des Buches dieses einfache Beispielsystem verwendet, um die eingeführten Entwurfsverfahren möglichst anschaulich darstellen zu können.

Der darauf folgende Abschnitt führt die *Riesz-Spektralsysteme* ein, mit denen sich viele lineare verteilt-parametrische Systeme im Zustandsraum beschreiben lassen. Diese Systeme zeichnen sich insbesondere dadurch aus, dass sich ihre Eigenschaften unter Verwendung von Eigenwerten und Eigenvektoren analysieren lassen. Da bei diesen Systemen ein verteilter Eingriff angenommen wird, stimmen ihre Zustandsgleichungen formal mit denen konzentriert-parametrischer Systeme überein. Dies ermöglicht eine Einführung der systemtheoretischen Grundlagen verteilt-parametrischer Systeme in naher Analogie zum konzentriert-parametrischen Fall, womit Gemeinsamkeiten sowie Unterschiede in den Eigenschaften dieser Systemklassen deutlich dargestellt werden können. Im Gegensatz zu konzentriert-parametrischen

Systemen setzt die Wahl eines geeigneten Zustandsraums sowie die Einführung geeigneter Zustandsvariablen bei verteilt-parametrischen Systemen eine genaue Analyse des zugrundeliegenden Anfangs-Randwertproblems voraus, damit sich für den Steuerungs- und Regelungsentwurf ein geeignetes mathematisches Modell ergibt. Um diese Problematik aufzeigen zu können, wird die Zustandsbeschreibung eines *Euler-Bernoulli-Balkens* ausführlich hergeleitet. Bei diesem System ist nämlich die Wahl des Zustandsraums und der Zustandsgrößen nicht offensichtlich und bedarf einer genauen Untersuchung. Zudem eignet sich dieses System auch zur Veranschaulichung der in diesem Kapitel vorgestellten allgemeinen Aussagen, da es bei der Systemanalyse wesentlich schwieriger zu behandeln ist als der zu Beginn eingeführte Wärmeleiter. Anschließend wird die Lösung der Zustandsgleichungen in Abhängigkeit der Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt. Dies erlaubt einen Einblick in die Möglichkeiten der Systembeeinflussung im verteilt-parametrischen Fall, wenn man bei der Regelung auf eine Eigenwert- und Eigenvektorgabe abzielt. Ausgehend von der Lösung der Zustandsgleichungen wird ein für die Betrachtungen in diesem Buch geeigneter Stabilitätsbegriff eingeführt. Für diese Stabilitätsdefinition lässt sich zeigen, dass damit die Stabilität von Riesz-Spektralsystemen anhand der Eigenwerte überprüfbar ist. Neben der Systembeschreibung im Zeitbereich wird auch die Beschreibung des Übertragungsverhaltens von Riesz-Spektralsystemen im Frequenzbereich durch die Übertragungsmatrix näher erläutert. Diese Systembeschreibung ist von besonderer Bedeutung, da sich viele in diesem Buch vorgestellte Steuerungen und Regelungen unter Verwendung der Übertragungsmatrix exakt angeben lassen. Weil dabei die Übertragungsmatrix nur an bestimmten Punkten ausgewertet werden muss, ist eine effiziente numerische Durchführung des Entwurfs dann immer möglich.

In diesem Buch werden ausschließlich verteilt-parametrische Systeme mit *verteilttem Eingriff* betrachtet, d.h. die Systembeeinflussung erfolgt im Inneren des physikalischen Prozesses. Allerdings tritt in praktischen Anwendungen häufig der Fall auf, dass der Stelleingriff am Rand des Systems erfolgt. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird deshalb gezeigt, dass sich solche Systeme mit *Randeingriff* in den meisten Fällen als Riesz-Spektralsysteme mit verteiltem Eingriff formulieren lassen. Damit sind die in diesem Buch vorgestellten Methoden ebenfalls auf Systeme mit Randeingriff anwendbar und die Betrachtung von Systemen mit verteiltem Eingriff stellt somit keine allzu restriktive Einschränkung dar.

## 2.1 Einführendes Beispiel

Die Grundideen der Zustandsbeschreibung linearer verteilt-parametrischer Systeme sollen anhand eines typischen Beispiels dargestellt werden, nämlich mittels des örtlich eindimensionalen *Wärmeleiters*. Dieses mathemati-

sche Modell beschreibt die dynamische Entwicklung der über einen Leiter verteilten Temperatur durch Wärmeleitung unter dem Einfluss von Wärmequellen und -senken. Die gleiche Systembeschreibung erhält man auch bei anderen Ausgleichsprozessen wie z.B. Diffusionsvorgängen. Mit dem Wärmeleiter lassen sich auch zahlreiche industrielle Prozesse, wie z.B. Induktionsöfen, Durchlauf- und Stoßöfen oder Metall- und Glasvorherde modellieren.

Betrachtet wird ein beheizter Stab der normierten Länge 1, wie er in Abbildung 2.1 skizziert ist. Er wird als hinreichend dünn angenommen, so dass die Temperatur über dem Querschnitt nahezu konstant ist, was eine eindimensionale Modellierung der Ausgleichsvorgänge ermöglicht. Die orts- und zeitabhängige Temperatur auf dem Stab ist durch das Temperaturprofil  $x(z, t)$  gegeben. Zur Einstellung einer gewünschten Temperaturverteilung wird angenommen, dass zwei Wärmequellen zur Verfügung stehen, die das Temperaturprofil durch die *Quellenfunktion*  $u_\Omega(z, t) = b_1(z)u_1(t) + b_2(z)u_2(t)$  beeinflussen. Die *Ortscharakteristiken*  $b_1(z)$  und  $b_2(z)$  der Eingänge  $u_1$  und  $u_2$  sind durch

$$b_1(z) = \begin{cases} 1 & : 0.5 \leq z \leq 0.6 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (2.1)$$

und

$$b_2(z) = \begin{cases} 0.5 & : 0.15 \leq z \leq 0.25 \\ 0.5 & : 0.75 \leq z \leq 0.85 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (2.2)$$

definiert und geben an, wie sich die Heizleistungen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  der Wärmequellen auf den Stab im Inneren des *Ortsbereichs*  $0 \leq z \leq 1$  verteilen. Durch Aufstellung einer Bilanzgleichung für die Wärme (siehe hierzu z.B. Kapitel 2.2 in [28]) und Einführung des Vektors

$$b^T(z) = [b_1(z) \ b_2(z)] \quad (2.3)$$

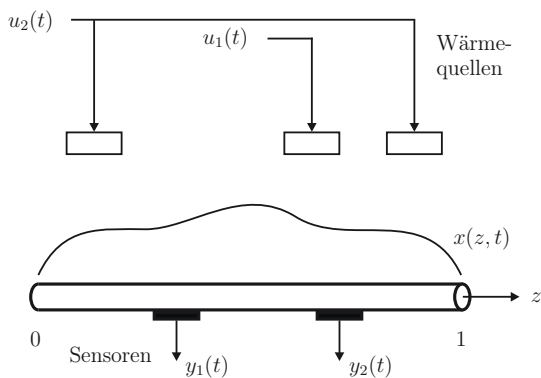
ergibt sich die *parabolische partielle Differentialgleichung (PDgl.)*

$$\partial_t x(z, t) = \partial_z^2 x(z, t) + b^T(z)u(t), \quad t > 0, \quad z \in (0, 1) \quad (2.4)$$

für das Temperaturprofil  $x(z, t)$ . Hierbei werden zur Vereinfachung der Darstellung alle Größen als dimensionslos und normiert angenommen. In (2.4) sind die *partiellen Differentialoperatoren*  $\partial_t$  und  $\partial_z^2$  durch

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{und} \quad \partial_z^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.5)$$

definiert. Diese abkürzende Schreibweise für partielle Differentialoperatoren wird im Buch durchgehend verwendet. Die PDgl. (2.4) beschreibt die dynamische Entwicklung der Temperaturverteilung  $x(z, t)$  im Intervall  $0 < z < 1$ . Da der Wärmeleiter nur einen *verteilten Energiespeicher* besitzt, tritt in (2.4)



**Abb. 2.1:** Wärmeleiter mit der Temperatur  $x(z, t)$ , den Eingängen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  sowie den Regelgrößen  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$

nur die erste zeitliche Ableitung auf. Bei Systemen mit zwei verteilten Energiespeichern, wie z.B. Balken oder schwingende Saiten, können auch zweite Zeitableitungen sowie gemischte Zeit- und Ortsableitungen vorkommen. Da die Stellgrößen in einem Bereich innerhalb des Intervalls  $0 < z < 1$  und nicht am Rand eingreifen, liegt ein verteilt-parametrisches System mit *verteilttem Eingriff* vor. Zur vollständigen Charakterisierung des Problems müssen noch die Rand- und Anfangsbedingungen gegeben sein. Die *Randbedingungen* beschreiben, wie das verteilt-parametrische System mit seiner Umgebung wechselwirkt. Im Unterschied zu den Anfangsbedingungen legen die Randbedingungen damit wesentliche Eigenschaften des verteilt-parametrischen Systems fest. Im vorliegenden Beispiel wird der Stab an den Rändern  $z = 0$  und  $z = 1$  auf einer konstanten Temperatur  $x(0, t) = x(1, t) = 0$  gehalten, was sog. *Dirichletschen Randbedingungen* entspricht. Die Temperaturverteilung zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist durch die *Anfangsbedingung*  $x(z, 0) = x_0(z)$  vorgegeben. Die Regelgrößen  $y_1$  und  $y_2$  sind Temperaturen, welche über endliche Ortsintervalle gemittelt werden. Diese Intervalle sind durch die *Ortscharakteristiken*

$$c_1(z) = \begin{cases} 1 & : 0.37 \leq z \leq 0.43 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (2.6)$$

und

$$c_2(z) = \begin{cases} 1 & : 0.67 \leq z \leq 0.73 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (2.7)$$

der Ausgänge  $y_1$  und  $y_2$  mit

$$c(z) = \begin{bmatrix} c_1(z) \\ c_2(z) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

beschrieben. Damit wird entsprechend zum Eingriff eine *verteilte Messung* vorgenommen, wenn man die Regelgrößen als messbar voraussetzt. Insgesamt ergibt sich für den Wärmeleiter die Beschreibung durch das *Anfangs-Randwertproblem*

$$\partial_t x(z, t) = \partial_z^2 x(z, t) + b^T(z)u(t), \quad t > 0, \quad z \in (0, 1) \quad (2.9)$$

$$x(0, t) = x(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.10)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in [0, 1] \quad (2.11)$$

$$y(t) = \int_0^1 c(z)x(z, t)dz, \quad t \geq 0 \quad (2.12)$$

mit zwei Eingangsgrößen zusammengefasst im Vektor  $u$  und zwei Ausgangsgrößen als Elemente des Vektors  $y$ . Hierbei wird angenommen, dass der Anfangswert  $x_0$  in (2.11) mit den Randbedingungen (2.10) *konsistent* ist, d.h.  $x_0(0) = x_0(1) = 0$  gilt. Aufgrund der zwei Ein- und Ausgänge handelt es sich beim Wärmeleiter um ein *lineares verteilt-parametrisches Mehrgrößensystem*.

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie sich eine Zustandsbeschreibung des Wärmeleiters in Form des (*abstrakten*) *Anfangswertproblems*

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0 \in H \quad (2.13)$$

$$y(t) = \mathcal{C}x(t), \quad t \geq 0 \quad (2.14)$$

einführen lässt. Wie man sofort erkennt, stimmt (2.13)–(2.14) formal mit der Zustandsdarstellung konzentriert-parametrischer Systeme überein (siehe z.B. [27]). Im Unterschied zu solchen Systemen ist der zugehörige Zustandsraum jedoch nicht von vorneherein festgelegt. Vielmehr gehört die Wahl des Zustandsraums bei verteilt-parametrischen System mit zur Modellbildung. Gesichtspunkte für die Bestimmung des Zustandsraums und i.Allg. auch der Zustandsgrößen sind Aussagen über die Existenz- und Eindeutigkeit der Lösung von (2.13). Im vorliegenden Beispiel wählt man als Zustandsgröße die Temperatur des Wärmeleiters, d.h. man führt den (skalaren) *Zustand*  $x(\cdot, t) = \{x(z, t), z \in [0, 1]\}$  ein. Besitzt das verteilt-parametrische System mehr als einen verteilten Energiespeicher, dann ist  $x(t)$  ein Vektor und die Wahl des Zustands kann nicht mehr so offensichtlich sein wie hier (siehe Beispiel 2.4 und z.B. Kapitel 7.2 in [29]). Als *Zustandsraum*  $H$  wählt man den Funktionenraum  $L_2(0, 1)$  der im Intervall  $[0, 1]$  absolut quadratisch Lebesgue-integrierbaren und komplexwertigen Funktionen, d.h.

$$L_2(0, 1) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_0^1 |f(z)|^2 dz < \infty\}, \quad (2.15)$$

und führt dort das *Skalarprodukt*

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(z)\overline{y(z)}dz \quad (2.16)$$

ein, worin  $\bar{y}$  die zu  $y$  konjugiert komplexe Größe bezeichnet. Man kann zeigen, dass der Raum  $L_2(0, 1)$  zusammen mit dem Skalarprodukt (2.16) ein *Hilbertraum* ist. Solche Vektorräume sind *vollständig* (d.h. jede *Cauchy-Folge* ist in diesem Raum konvergent) und *normiert*, wobei die *Norm* durch das im Raum eingeführte Skalarprodukt induziert wird, d.h.  $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ . Der Zustand  $x(t)$  ist eine *abstrakte Funktion*, d.h. für jeden festen Zeitpunkt  $t \geq 0$  ist die Ortsfunktion  $x(z, t)$  im Intervall  $[0, 1]$  Element des Hilbertraums  $H$ . Da hierbei nur die Zeit  $t$  als Ordnungsparameter auftritt, wird in (2.13)–(2.14) die Ortsabhängigkeit weggelassen. Auf dem Zustandsraum  $H$  lässt sich nun der *Systemoperator*  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H$  mit dem *Definitionsbereich*  $D(\mathcal{A})$  gemäß

$$\mathcal{A}h = \frac{d^2}{dz^2}h \quad (2.17)$$

$$h \in D(\mathcal{A}) = \left\{ h \in L_2(0, 1) \mid h, \frac{d}{dz}h \text{ absolut stetig,} \right. \\ \left. \frac{d^2}{dz^2}h \in L_2(0, 1) \text{ und } h(0) = h(1) = 0 \right\} \quad (2.18)$$

definieren (für Details siehe Anhang B.1). Anhand von (2.18) erkennt man, dass die in (2.10) geforderten Randbedingungen bei der Formulierung (2.13) im Definitionsbereich von  $\mathcal{A}$  berücksichtigt werden. Hierbei ist zu beachten, dass die Randbedingungen homogen sein müssen. Diese Forderung macht Probleme, wenn z.B. am Rand des Wärmeleiters eine Störung eingreift. Dies würde bedeuten, dass sich der Definitionsbereich von  $\mathcal{A}$  nicht mehr unabhängig von dieser Anregung einführen lässt. Deshalb muss man in diesem Fall die Randbedingungen erst homogenisieren, bevor man solche Systeme im Zustandsraum darstellen kann (für weitere Details siehe Abschnitt 2.3). Beim Definitionsbereich  $D(\mathcal{A})$  in (2.18) ist zu beachten, dass  $\frac{d}{dz}h$  und  $\frac{d^2}{dz^2}h$  *schwache Ableitungen* von  $h$  sind (siehe Anhang B.1), welche auch für nicht klassisch differenzierbare Funktionen  $h$  existieren. Der zweite in (2.13) auftretende Operator ist der *Eingangoperator*  $\mathcal{B}$ , der durch

$$\mathcal{B}u(t) = b_1 u_1(t) + b_2 u_2(t) \quad (2.19)$$

gegeben ist (siehe (2.3) sowie (2.9)). In der Ausgangsgleichung (2.14) tritt der *Ausgangoperator*  $\mathcal{C}$  auf, der sich mit Hilfe des Skalarprodukts (2.16) gemäß

$$\mathcal{C}x(t) = \begin{bmatrix} \langle x(t), c_1 \rangle \\ \langle x(t), c_2 \rangle \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

eingeführen lässt (siehe (2.8) und (2.12)). Wie man anhand von (2.1)–(2.2) und (2.6)–(2.7) erkennt, sind die Ortscharakteristiken Element des Zustandsraums  $H = L_2(0, 1)$ . Dies ist wichtig, weil sich für die modale Analyse von verteilt-parametrischen Systemen diese Kenngrößen im Zustandsraum entwickeln lassen müssen. Hätte man für  $H$  einen klassischen Funktionenraum, wie z.B. den Raum der zweifach stetig differenzierbaren Funktionen gewählt,

dann würde sich der Wärmeleiter nicht mit den im Folgenden dargestellten Methoden behandeln lassen, da die Ortscharakteristiken unstetig sind.

In Beispiel 2.3 wird gezeigt, dass durch Wahl des Zustandsraums  $H$  und des Definitionsbereichs  $D(\mathcal{A})$  der Operator  $\mathcal{A}$  ein *infinitesimaler Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe* ist (für Details siehe Anhang A.1). Dies bedeutet, dass die *milde Lösung* der homogenen Zustandsgleichung

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0 \in H \quad (2.21)$$

(siehe (2.13)) in der Form

$$x(t) = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)x_0 \quad (2.22)$$

dargestellt werden kann, worin die durch  $t$  parametrisierte Familie  $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)$  von Operatoren eine  $C_0$ -Halbgruppe ist. Diese Aussage erinnert formal an die bei linearen konzentriert-parametrischen Systemen bekannte Lösung der homogenen Zustandsgleichungen mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion. In der Tat kann man die  $C_0$ -Halbgruppe als Verallgemeinerung der Matrixexponentialfunktion auf verteilt-parametrische Systeme ansehen. Diese Betrachtungsweise hat den Vorzug, dass man aufgrund des Zusammenhangs des Generators  $\mathcal{A}$  mit  $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)$  Aussagen über  $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)$  und damit über das System machen kann, ohne dazu  $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)$  explizit berechnen zu müssen. Die *milde Lösung* der inhomogenen Zustandsgleichung (2.13) ist analog zum konzentriert-parametrischen Fall durch

$$x(t) = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)x_0 + \int_0^t \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t - \tau)\mathcal{B}u(\tau)d\tau \quad (2.23)$$

gegeben. An dieser Stelle kann man sich fragen, wie die Lösung des abstrakten Anfangswertproblems (2.13) mit der Lösung des Anfangs-Randwertproblems (2.9)–(2.11) zusammenhängt. Hierzu wird in [14] gezeigt, dass die milde Lösung (2.23) des abstrakten Anfangswertproblems (2.13) mit der *schwachen Lösung* des Anfangs-Randwertproblems (2.9)–(2.11) übereinstimmt. Die schwache Lösung stellt einen allgemeineren Lösungsbegriff dar als die *klassische Lösung*. Letztere besitzt die durch die Differentialgleichung (2.9) geforderte Differenzierbarkeitseigenschaft. In vielen Fällen wird das Verhalten technischer Systeme aber durch Lösungen beschrieben, die nicht die nötigen Differenzierbarkeitseigenschaften besitzen. Man denke beispielsweise bei linearen konzentriert-parametrischen Systemen an die sprunghafte Anregung eines Integrierers, welche auf eine nicht differenzierbare Systemantwort führt. Diese Sprungantwort ist dann eine schwache Lösung der zugehörigen Differentialgleichung. In manchen Fällen ist es sogar so, dass die physikalische Modellbildung gar nicht die Differenzierbarkeitseigenschaften fordert. Erst durch den Übergang zur Beschreibung mittels einer Differentialgleichung kommt diese Forderung hinzu. Dies wird auch bei der Wahl des Definitionsbereichs  $D(\mathcal{A})$  in (2.18) berücksichtigt, da dort nur die Existenz der schwachen Ortsableitungen gefordert wird, die beispielsweise auch für Funktionen mit „Knicken“ definiert sind. Damit sind auch nicht (klassisch) differenzierbare Temperaturprofile zulässig, die beispielsweise Knicke in der ersten Ableitung

besitzen. Ein weiterer Grund, warum man bei der Betrachtung von PDgl. immer erst von der schwachen Lösung ausgeht, besteht darin, dass sich dann die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung mit den Methoden der Funktionalanalysis systematisch untersuchen lässt, was für klassische Lösungen nicht so einfach möglich ist. Falls eine schwache Lösung existiert, kann man sie nachträglich auf ihre klassische Differenzierbarkeit untersuchen. Allerdings sind die Methoden zur Untersuchung der klassischen Differenzierbarkeit der Lösung von der jeweiligen PDgl. abhängig und können deshalb nicht für eine große Klasse von PDgl. allgemein angegeben werden. Damit lässt sich eine systematische Zustandsraummethodik für eine große Klasse von verteilt-parametrischen Systemen nur ausgehend von der schwachen bzw. milden Lösung formulieren.

Diese Betrachtungen zeigen, dass man ein Anfangs-Randwertproblem als abstraktes Anfangswertproblem (2.13) im Zustandsraum darstellen kann, indem ein geeigneter Zustandsraum  $H$  eingeführt wird und man den örtlichen Differentialoperator auf diesem Zustandsraum als Operator  $\mathcal{A}$  mit homogenen Randbedingungen und geeignetem Definitionsbereich interpretiert. Die Systembeeinflussung durch den Eingang  $u$  und die Messung von Systemgrößen  $y$  lässt sich dann durch die Operatoren  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  beschreiben. Um die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des abstrakten Anfangswertproblems sowie deren stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten sicherzustellen, ist vom Operator  $\mathcal{A}$  nachzuweisen, dass er ein infinitesimaler Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe ist. Zur Überprüfung dieser Eigenschaft von  $\mathcal{A}$  kann man auf Ergebnisse der Funktionalanalysis zurückgreifen, die z.B. in [14] zu finden sind.

Weitere besondere Vorteile der Beschreibung von linearen verteilt-parametrischen Systemen durch die Zustandsgleichungen (2.13)–(2.14) sind:

- Mit den Zustandsgleichungen (2.13)–(2.14) kann formal nahezu wie mit der Zustandsbeschreibung linearer konzentriert-parametrischer Systeme gearbeitet werden, womit Vorgehensweisen beim Reglerentwurf für konzentriert-parametrische Systeme auf verteilt-parametrische Systeme übertragbar sind.
- Bei der Regelung von verteilt-parametrischen Systemen treten neben partiellen Differentialgleichungen auch partielle Integro-Differentialgleichungen (z.B. bei der Zustandsregelung in Abschnitt 4.1) oder Kombinationen aus gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen (siehe z.B. die Führungs- und Störgrößenaufschaltung in Kapitel 4.2) auf. All diese Beschreibungsformen lassen sich im Rahmen der Zustandsgleichungen (2.13)–(2.14) einheitlich darstellen und analysieren.
- Die Zustandsbeschreibung (2.13)–(2.14) umfasst neben den verteilt-parametrischen Systemen nicht nur die konzentriert-parametrischen Systeme als Spezialfall, sondern auch lineare Totzeitsysteme (siehe Kapitel 6 und [14]). Damit können Entwurfsmethoden für die Zustandsbeschreibung (2.13)–(2.14) auf mehrere Klassen linearer Systeme angewendet werden.



Diese Betrachtungen machen deutlich, dass die Zustandsbeschreibung als Grundlage für die systematische Analyse und Synthese von verteilt-parametrischen Systemen dienen kann.

## 2.2 Riesz-Spektralsysteme

Im Abschnitt 2.1 wurde eine Zustandsbeschreibung für den Wärmeleiter exemplarisch eingeführt. In den folgenden Abschnitten 2.2.1–2.2.3 wird diese Zeitbereichsbeschreibung von linearen verteilt-parametrischen Systemen allgemein betrachtet und die damit verbundenen systemtheoretischen Grundlagen dargestellt. Damit die Ergebnisse für eine große Klasse von verteilt-parametrischen Systemen anwendbar sind, ist die Zustandsbeschreibung von sog. *Riesz-Spektralsystemen* Ausgangspunkt der Betrachtungen, bei welcher der Systemoperator ein Riesz-Spektraloperator ist und die Ein- und Ausgangsoperatoren beschränkte lineare Operatoren darstellen. Im letzten Abschnitt 2.2.4 wird auf die Frequenzbereichsbeschreibung des Ein-/Ausgangsverhaltens von Riesz-Spektralsystemen eingegangen.

### 2.2.1 Systembeschreibung durch Zustandsgleichungen

Eine große Klasse linearer verteilt-parametrischer Systeme mit verteiltem Eingriff kann durch die Zustandsbeschreibung

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0 \in H \quad (2.24)$$

$$y(t) = \mathcal{C}x(t), \quad t \geq 0 \quad (2.25)$$

dargestellt werden, worin  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  der Vektor der Eingangsgrößen und  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  der Vektor der Ausgangsgrößen ist. Der *Zustand*  $x(t)$  hat die Form

$$x(\cdot, t) = \{x(z, t), z \in \Omega\}. \quad (2.26)$$

Darin ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^l$ ,  $l \in \{1, 2, 3\}$ , der Abschluss eines Gebiets, den man als *Ortsbereich* des verteilt-parametrischen Systems bezeichnet. Bei verteilt-parametrischen Systemen mit einem *verteilten Energiespeicher* — wie z.B. beim Wärmeleiter — ist  $x(t)$  skalar. Besitzt das verteilt-parametrische System jedoch  $n > 1$  verteilte Energiespeicher, dann ist  $x(t)$  ein  $n$ -dimensionaler Vektor und  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  sowie  $\mathcal{C}$  sind Matrizen mit Operatoren als Elemente. Dies ist für den in Beispiel 2.4 vorgestellten Balken der Fall, der zwei Energiespeicher hat. Der Zustandsraum des Systems ist ein unendlich-dimensionaler und komplexer *Hilbertraum*, d.h.  $x(t) \in H$ ,  $\forall t \geq 0$ , in dem das *Skalarprodukt*  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  eingeführt ist.

Der beschränkte lineare *Eingangoperator*  $\mathcal{B}$  in (2.24) hat die allgemeine Darstellung

$$\mathcal{B}u(t) = \sum_{i=1}^p b_i u_i(t) \quad \text{für } b_i \in H, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (2.27)$$

worin  $b_i$  die *Ortscharakteristiken der Eingänge* sind. Dabei ist  $\mathcal{B}$  ein *beschränkter linearer Operator*, wenn es eine reelle Zahl  $\alpha$  gibt, so dass

$$\|\mathcal{B}h\| \leq \alpha \|h\|_{\mathbb{C}^p}, \quad \forall h \in \mathbb{C}^p \quad (2.28)$$

erfüllt ist. Der Operator  $\mathcal{B}$  beschreibt wie der Stelleingriff  $u$  im Inneren des Ortsbereichs  $\Omega$ , d.h. in  $\Omega \setminus \partial\Omega$ , auf das System einwirkt. Es handelt sich also um einen *verteilten Eingriff*. Man beachte, dass der Operator  $\mathcal{B}$  den komplexwertigen Vektorraum  $\mathbb{C}^p$  als Definitionsbereich hat und auch der Bildbereich ein komplexwertiger Hilbertraum  $H$  ist, d.h.  $\mathcal{B} : \mathbb{C}^p \rightarrow H$  (siehe auch Abschnitt 2.2.2). Der beschränkte lineare *Ausgangoperator*  $\mathcal{C} : H \rightarrow \mathbb{C}^m$  (siehe (2.25)) ist durch den Operator

$$\mathcal{C}x(t) = \begin{bmatrix} \langle x(t), c_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x(t), c_m \rangle \end{bmatrix} \quad \text{für } c_i \in H, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.29)$$

mit den *Ortscharakteristiken der Ausgänge*  $c_i$  gegeben, der die *verteilte Messung*  $y(t)$  charakterisiert. Mit Hilfe des *Rieszschen Darstellungssatzes* lässt sich nachweisen, dass sich jede Messung  $y(t)$  eindeutig in der Form (2.29) beschreiben lässt (siehe Satz 4.1), sofern man die Elemente von  $\mathcal{C}$  als *beschränkte lineare Funktionale* ansetzt. Dies sind lineare Operatoren  $f$ , die von  $H$  nach  $\mathbb{C}$  abbilden und beschränkt sind, d.h. es gilt  $f : D(f) \subseteq H \rightarrow \mathbb{C}$  sowie

$$|f(h)| \leq \alpha \|h\|, \quad \forall h \in D(f) \subseteq H \quad (2.30)$$

für eine reelle Zahl  $\alpha$ . Damit stellt der in (2.29) definierte Operator in diesem Sinn keine Einschränkung der Allgemeinheit dar.

Die Systembeschreibung (2.24)–(2.25) schließt den Fall von *punktförmigem Eingriff*

$$u_\Omega(z, t) = \sum_{i=1}^p \delta(z - z_i) u_i(t), \quad z_i \in \Omega \setminus \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.31)$$

in (2.24) und *punktförmiger Messung*

$$y(t) = \begin{bmatrix} x(\bar{z}_1, t) \\ \vdots \\ x(\bar{z}_m, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x(t), \delta(z - \bar{z}_1) \rangle \\ \vdots \\ \langle x(t), \delta(z - \bar{z}_m) \rangle \end{bmatrix}, \quad \bar{z}_i \in \Omega \setminus \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.32)$$

aus, wobei  $\delta(z - z_0)$  den *örtlichen Dirac-Impuls* bei  $z = z_0$  bezeichnet. Dies liegt daran, dass die Ortscharakteristiken  $b_i(z) = \delta(z - z_i)$  in (2.31) sowie  $c_i(z) = \delta(z - \bar{z}_i)$  in (2.32) nicht Element des Hilbertraums  $H$  sind, da dieser Raum Dirac-Impulse nicht enthält. Dies macht auch deutlich, dass wegen  $b_i \in H$  in (2.27) und  $c_i \in H$  in (2.29) der Operator  $\mathcal{B}$  einen verteilten Eingriff und  $\mathcal{C}$  eine verteilte Messung beschreiben. Jedoch können die Betrachtungen durch Einbettung des Zustandsraums in einen erweiterten Raum, der auch Distributionen umfasst, verallgemeinert werden (für Details siehe Kapitel 8 in [12]). Allerdings setzt dies voraus, dass die von  $\mathcal{A}$  generierte  $C_0$ -Halbgruppe (siehe Abschnitt A.1) eine „glättende“ Wirkung besitzt. Dies ist beispielsweise für parabolische Systeme der Fall, zu denen auch der bereits vorgestellte Wärmeleiter gehört. Ein allgemeineres Konzept zur Zustandsdarstellung von verteilt-parametrischen Systemen mit punktförmiger Messung und Eingriff sind die „*linear regular systems*“ (siehe [13, 69]). Diese Systembeschreibung ist allgemein genug, um viele Regelungsprobleme auch für solche verteilt-parametrische Systeme zu lösen. Im Rahmen der in diesem Buch vorgestellten Methoden lassen sich punktförmige Eingriffe oder Messungen stets durch Annäherung mittels Rechteckimpulse wie z.B. in (2.1) oder (2.6) behandeln. Darüber hinaus wird in Abschnitt 2.3 gezeigt, wie sich verteilt-parametrische Systeme mit Randeingriff in der Form (2.24)–(2.25) darstellen lassen. Damit sind die in diesem Buch beschriebenen Entwurfsverfahren auf viele in Anwendungen auftretende Systeme mit verteilten Parametern anwendbar.

Ist der *Systemoperator*  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H$  ein *Riesz-Spektraloperator*, zu denen auch der Operator in (2.17)–(2.18) und die Systemoperatoren vieler Anwendungsbeispiele gehören, dann ist das System (2.24)–(2.25) mit dem beschränkten Eingangoperator  $\mathcal{B}$  in (2.27) und dem beschränkten Ausgangoperator  $\mathcal{C}$  in (2.32) ein *Riesz-Spektralsystem* (siehe auch Definition 4.1.1 in [14]).

Um Riesz-Spektraloperatoren genauer zu charakterisieren, betrachtet man das *Eigenwertproblem*

$$\mathcal{A}\phi_i = \lambda_i\phi_i, \quad i \geq 1 \quad (2.33)$$

für den Operator  $\mathcal{A}$  mit den *Eigenvektoren* (oder auch *Eigenfunktionen*)  $\phi_i$  und den *Eigenwerten*  $\lambda_i$ , die bei Riesz-Spektraloperatoren immer abzählbar sind. In (2.33) ist zu beachten, dass die Eigenvektoren  $\phi_i$  nur bei verteilt-parametrischen Systemen mit mehr als einem Energiespeicher vektorwertig sind. Diese (abstrakte) Darstellung des Eigenwertproblems wird im folgenden Beispiel für den im vorhergehenden Abschnitt vorgestellten Wärmeleiter veranschaulicht.

*Beispiel 2.1. Eigenwerte und Eigenvektoren des Wärmeleiters mit Dirichletschen Randbedingungen*

Für den im Abschnitt 2.1 betrachteten Wärmeleiter sollen die Eigenwerte  $\lambda_i$  und die zugehörigen Eigenvektoren  $\phi_i$  von  $\mathcal{A}$  bestimmt werden. Wegen (2.33) müssen die Eigenvektoren  $\phi_i$  in dem durch (2.18) beschriebenen Definitionsbereich von  $\mathcal{A}$  enthalten sein, d.h. es gilt  $\phi_i \in D(\mathcal{A})$ . Hieraus folgen für die Eigenvektoren die Randbedingungen  $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$ . Zusammen mit der Definitionsgleichung (2.17) des Operators  $\mathcal{A}$  handelt es sich somit beim Eigenwertproblem (2.33) um das *Randwertproblem*

$$\frac{d^2}{dz^2}\phi_i(z) = \lambda_i\phi_i(z), \quad z \in (0, 1), \quad i \geq 1 \quad (2.34)$$

$$\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0, \quad (2.35)$$

bei dem der Parameter  $\lambda_i$  zunächst unbestimmt ist. Jede nichtverschwindende Lösung  $\phi_i$  dieses Randwertproblems, die sich für einen bestimmten Wert  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  ergibt, ist ein *Eigenvektor* zum *Eigenwert*  $\lambda_i$  von  $\mathcal{A}$ . Um dieses Randwertproblem zu lösen, bestimmt man zunächst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2.34). Die charakteristische Gleichung von (2.34) lautet

$$p^2 - \lambda_i = 0 \quad (2.36)$$

und besitzt die Nullstellen

$$p_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda_i}. \quad (2.37)$$

Im Folgenden wird angenommen, dass  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  gilt. D.h. es werden nur reelle Eigenwerte bestimmt, was sich später noch als ausreichend herausstellt. Da man leicht nachweisen kann, dass es für  $\lambda_i > 0$  keine Eigenvektoren gibt, wird zunächst der Fall  $\lambda_i = 0$  untersucht. Für diesen Fall wird aus (2.34) die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dz^2}\phi_i(z) = 0 \quad (2.38)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\phi_i(z) = A_i z + B_i. \quad (2.39)$$

Einsetzen von (2.39) in die Randbedingungen (2.35) führt auf

$$\phi_i(0) = B_i \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.40)$$

$$\phi_i(1) = A_i \stackrel{!}{=} 0, \quad (2.41)$$

womit sich die triviale Lösung  $\phi_i = 0$  ergibt. Folglich ist Null kein Eigenwert von  $\mathcal{A}$ . Für den noch verbleibenden Fall  $\lambda_i < 0$  lautet die allgemeine Lösung von (2.34)

$$\phi_i(z) = A_i \sin(\sqrt{|\lambda_i|}z) + B_i \cos(\sqrt{|\lambda_i|}z), \quad A_i, B_i \in \mathbb{R}. \quad (2.42)$$

Weil (2.42) die Randbedingungen (2.35) erfüllen muss, folgt

$$\phi_i(0) = B_i \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.43)$$

$$\phi_i(1) = A_i \sin \sqrt{|\lambda_i|} \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.44)$$

Wegen (2.43) ergibt sich für  $A_i = 0$  gerade die triviale Lösung  $\phi_i = 0$  (siehe (2.42)). Um eine nichttriviale Lösung zu erhalten, folgt deshalb aus (2.44) die transzendente *charakteristische Gleichung*

$$\sin \sqrt{|\lambda_i|} = 0 \quad (2.45)$$

von  $\mathcal{A}$ . Sie besitzt die Lösungen

$$\sqrt{|\lambda_i|} = i\pi, \quad i = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.46)$$

womit

$$|\lambda_i| = i^2 \pi^2 \quad (2.47)$$

bzw. mit  $\lambda_i < 0$

$$\lambda_i = -i^2 \pi^2 \quad (2.48)$$

gilt. Hierbei wird der Fall  $i = 0$  ausgeschlossen, da — wie bereits gezeigt — Null kein Eigenwert von  $\mathcal{A}$  ist. Insgesamt ergeben sich somit die Eigenwerte

$$\lambda_i = -i^2 \pi^2, \quad i \geq 1 \quad (2.49)$$

und mit (2.42)–(2.43) die Eigenvektoren

$$\phi_i(z) = A_i \sin(i\pi z), \quad i \geq 1, \quad A_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.50)$$

Diese Vorgehensweise zur Lösung des Eigenwertproblems geht von einer *klassischen Lösung* des Randwertproblems (2.34)–(2.35) aus. Aufgrund des Definitionsbereichs  $D(\mathcal{A})$  in (2.18) werden wegen  $\phi_i \in D(\mathcal{A})$  und (2.33) aber die bei der klassischen Lösung vorausgesetzten Differenzierbarkeitseigenschaften gar nicht gefordert. Es könnten deshalb noch Lösungen der schwachen Formulierung von (2.34)–(2.35) existieren. Da es sich bei  $-\mathcal{A}$  jedoch um einen *Sturm-Liouville-Operator* handelt (siehe Anhang A.3), ist aus der Literatur bekannt, dass es keine weiteren Lösungen von (2.34)–(2.35) bzw. Eigenvektoren mehr gibt. Wie man anhand von (2.49) erkennt, sind die Eigenwerte einfach und isoliert. Dies bedeutet, dass das *Punktspektrum* von  $\mathcal{A}$  (d.h. die Menge aller Eigenwerte) *diskret* ist. Im allgemeinen Fall setzt sich das *Spektrum* eines Operators jedoch aus dem Punktspektrum, dem *kontinuierlichen Spektrum* und dem *Restspektrum* zusammen. Die Bezeichnung „kontinuierliches Spektrum“ kommt daher, dass Spektralpunkte aus diesem Anteil des Spektrums möglicherweise kontinuierlich verteilt sind, d.h. beispielsweise ein ganzes reelles Intervall einnehmen können. Solche Spektralanteile treten bei parabolischen Systemen mit einem halb-unendlichen Ortsbereich auf

(siehe [50]). In Beispiel A.1 im Anhang A.2 wird für den Operator  $\mathcal{A}$  in (2.17)–(2.18) nachgewiesen, dass sein Spektrum nur aus dem eben berechneten reellen diskreten Punktspektrum besteht. Damit besitzt  $\mathcal{A}$  ein *diskretes Spektrum*, das aber i.Allg. auch isolierte reelle wie konjugiert komplexe Eigenwerte mit endlicher algebraischer Vielfachheit haben darf. Man beachte, dass bei verteilt-parametrischen Systemen die Stabilitätseigenschaften nicht nur von den Eigenwerten allein, sondern von allen *Spektralpunkten*, d.h. allen Elementen des Spektrums, abhängen. Dies erklärt, warum im Gegensatz zu konzentriert-parametrischen Systemen der Begriff des Spektrums im verteilt-parametrischen Fall allgemeiner eingeführt werden muss. Aufgrund der *Orthogonalitätsrelation*

$$\int_0^1 \sin(i\pi z) \sin(j\pi z) dz = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (2.51)$$

gilt mit dem in  $H$  eingeführten Skalarprodukt (2.16) für die Eigenvektoren

$$\begin{aligned} \langle \phi_i, \phi_j \rangle &= \int_0^1 A_i \sin(i\pi z) A_j \sin(j\pi z) dz \\ &= \frac{1}{2} A_i A_j \delta_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} A_i A_j & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

worin  $\delta_{ij}$  das *Kronecker-Delta* bezeichnet. Damit sind die Eigenvektoren paarweise zueinander *orthogonal*. Die in (2.50) auftretende multiplikative Konstante  $A_i$  kann genutzt werden, um die Eigenvektoren zu orthonormieren. Hierzu muss die *Orthonormalitätsrelation*

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int_0^1 A_i \sin(i\pi z) A_j \sin(j\pi z) dz \stackrel{!}{=} \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases} \quad (2.53)$$

gelten, die wegen (2.52) für  $A_i = \sqrt{2}$ ,  $i \geq 1$ , erfüllt ist. Damit lauten die orthonormierten Eigenvektoren von  $\mathcal{A}$

$$\phi_i(z) = \sqrt{2} \sin(i\pi z), \quad i \geq 1. \quad (2.54)$$

Da dieses Funktionensystem sogar eine orthonormale Basis in  $H$  bildet (siehe Beispiel A.1 in Anhang A.2) und damit ein vollständiges Funktionensystem ist, lässt sich jedes Element von  $H$  nach den Eigenvektoren von  $\mathcal{A}$  eindeutig entwickeln. ◀

Bei vielen Analyse- und Syntheseverfahren für verteilt-parametrische Systeme werden Elemente des Zustandsraums nach den Eigenvektoren von  $\mathcal{A}$  entwickelt. Dazu müssen die Eigenvektoren eine Basis im Zustandsraum bilden. Bei einer großen Klasse verteilt-parametrischer Systeme, den sog. *Sturm-Liouville-Systemen* (siehe Anhang A.3), bilden die Eigenvektoren nach geeigneter Normierung eine orthonormale Basis im Zustandsraum, was eine Reihenentwicklung nach den Eigenvektoren ermöglicht. In Anwendungen treten