N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

Topologie Algébrique

Chapitres 1 à 4

Springer

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

Topologie algébrique

Chapitres 1 à 4

Springer

N. Bourbaki
École normale supérieure
Paris Cedex 05, France

ISBN 978-3-662-49360-1 ISBN 978-3-662-49361-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-49361-8

Library of Congress Control Number: 2016934592

Springer Heidelberg New York Dordrecht London

Printed on acid-free paper

Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg is part of Springer Science+Business Media (www.springer.com)

TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE

MODE D'EMPLOI

1. Le traité prend les mathématiques à leur début et donne des démonstrations complètes. Sa lecture ne suppose donc, en principe, aucune connaissance mathématique particulière, mais seulement une certaine habitude du raisonnement mathématique et un certain pouvoir d'abstraction. Néanmoins, le traité est destiné plus particulièrement à des lecteurs possédant au moins une bonne connaissance des matières enseignées dans la première ou les deux premières années de l'université.

2. Le mode d'exposition suivi est axiomatique et procède le plus souvent du général au particulier. Les nécessités de la démonstration exigent que les chapitres se suivent, en principe, dans un ordre logique rigoureusement fixé. L'utilité de certaines considérations n'apparaîtra donc au lecteur qu'à la lecture de chapitres ultérieurs, à moins qu'il ne possède déjà des connaissances assez étendues.

3. Le traité est divisé en Livres et chaque Livre en chapitres. Les Livres actuellement publiés, en totalité ou en partie, sont les suivants :

Théorie des ensembles	désigné par	E
Algèbre	—	A
Topologie générale	—	TG
Fonctions d'une variable réelle	—	FVR
Espaces vectoriels topologiques	—	EVT
Intégration	—	INT
Algèbre commutative	—	AC
Variétés différentiables et analytiques	—	VAR
Groupes et algèbres de Lie	—	LIE

Théories spectrales	—	TS
Topologie algébrique	—	TA

Dans les *six premiers* Livres (pour l'ordre indiqué ci-dessus), chaque énoncé ne fait appel qu'aux définitions et résultats exposés précédemment dans le chapitre en cours ou dans les chapitres *antérieurs dans l'ordre suivant* : E ; A, chapitres I à III ; TG, chapitres I à III ; A, chapitres IV et suivants ; TG, chapitres IV et suivants ; FVR ; EVT ; INT. À partir du septième Livre, le lecteur trouvera éventuellement, au début de chaque Livre ou chapitre, l'indication précise des autres Livres ou chapitres utilisés (les six premiers Livres étant toujours supposés connus).

4. Cependant, quelques passages font exception aux règles précédentes. Ils sont placés entre deux astérisques : $^*\ldots{}_*$. Dans certains cas, il s'agit seulement de faciliter la compréhension du texte par des exemples qui se réfèrent à des faits que le lecteur peut déjà connaître par ailleurs. Parfois aussi, on utilise, non seulement les résultats supposés connus dans tout le chapitre en cours, mais des résultats démontrés ailleurs dans le traité. Ces passages seront employés librement dans les parties qui supposent connus les chapitres où ces passages sont insérés et les chapitres auxquels ces passages font appel. Le lecteur pourra, nous l'espérons, vérifier l'absence de tout cercle vicieux.

5. À certains Livres (soit publiés, soit en préparation) sont annexés des *fascicules de résultats*. Ces fascicules contiennent l'essentiel des définitions et des résultats du Livre, mais aucune démonstration.

6. L'armature logique de chaque chapitre est constituée par les *définitions*, les *axiomes* et les *théorèmes* de ce chapitre ; c'est là ce qu'il est principalement nécessaire de retenir en vue de ce qui doit suivre. Les résultats moins importants, ou qui peuvent être facilement retrouvés à partir des théorèmes, figurent sous le nom de « propositions », « lemmes », « corollaires », « remarques », etc. ; ceux qui peuvent être omis en première lecture sont imprimés en petits caractères. Sous le nom de « scholie », on trouvera quelquefois un commentaire d'un théorème particulièrement important.

Pour éviter des répétitions fastidieuses, on convient parfois d'introduire certaines notations ou certaines abréviations qui ne sont valables qu'à l'intérieur d'un seul chapitre ou d'un seul paragraphe (par exemple, dans un chapitre où tous les anneaux sont commutatifs, on peut convenir que le mot « anneau » signifie toujours « anneau commutatif »). De telles conventions sont explicitement mentionnées à la tête du chapitre ou du paragraphe dans lequel elles s'appliquent.

7. Certains passages sont destinés à prémunir le lecteur contre des erreurs graves, où il risquerait de tomber ; ces passages sont signalés en marge par le signe ☡ (« tournant dangereux »).

8. Les exercices sont destinés, d'une part, à permettre au lecteur de vérifier qu'il a bien assimilé le texte ; d'autre part à lui faire connaître des résultats qui n'avaient pas leur place dans le texte ; les plus difficiles sont marqués du signe ¶.

9. La terminologie suivie dans ce traité a fait l'objet d'une attention particulière. *On s'est efforcé de ne jamais s'écarter de la terminologie reçue sans de très sérieuses raisons.*

10. On a cherché à utiliser, sans sacrifier la simplicité de l'exposé, un langage rigoureusement correct. Autant qu'il a été possible, les *abus de langage ou de notation*, sans lesquels tout texte mathématique risque de devenir pédantesque et même illisible, ont été signalés au passage.

11. Le texte étant consacré à l'exposé dogmatique d'une théorie, on n'y trouvera qu'exceptionnellement des références bibliographiques ; celles-ci sont parfois groupées dans des *Notes historiques.* La bibliographie qui suit chacune de ces Notes ne comporte le plus souvent que les livres et mémoires originaux qui ont eu le plus d'importance dans l'évolution de la théorie considérée ; elle ne vise nullement à être complète.

Quant aux exercices, il n'a pas été jugé utile en général d'indiquer leur provenance, qui est très diverse (mémoires originaux, ouvrages didactiques, recueils d'exercices).

12. Dans la nouvelle édition, les renvois à des théorèmes, axiomes, définitions, remarques, etc. sont donnés en principe en indiquant successivement le Livre (par l'abréviation qui lui correspond dans la liste donnée au n° 3), le chapitre et la page où ils se trouvent. À l'intérieur d'un même Livre, la mention de ce Livre est supprimée ; par exemple, dans le Livre d'Algèbre,

E, III, p. 32, cor. 3

renvoie au corollaire 3 se trouvant au Livre de Théorie des Ensembles, chapitre III, page 32 de ce chapitre ;

II, p. 24, prop. 17

renvoie à la proposition 17 du Livre d'Algèbre, chapitre II, page 24 de ce chapitre.

Les fascicules de résultats sont désignés par la lettre R ; par exemple : EVT, R signifie « fascicule de résultats du Livre sur les Espaces Vectoriels Topologiques ».

Comme certains Livres doivent être publiés plus tard dans la nouvelle édition, les renvois à ces Livres se font en indiquant successivement le Livre, le chapitre, le paragraphe et le numéro où devrait se trouver le résultat en question ; par exemple :

AC, III, § 4, n° 5, cor. de la prop. 6.

INTRODUCTION

La *Topologie algébrique* vise à étudier les espaces topologiques en leur associant fonctoriellement diverses structures algébriques (modules, groupoïdes, etc.) dont les propriétés reflètent celles des espaces considérés.

Les chapitres I à IV de ce Livre concernent la théorie des revêtements et du groupe de Poincaré ; ils aboutissent à une formulation générale du théorème de van Kampen. Les chapitres suivants traiteront d'homologie et de cohomologie, des groupes d'homotopie supérieurs et des espaces cellulaires.

La notion de *revêtement* fait l'objet du chapitre I. Bien que cette notion porte sur certaines applications continues $p\colon \mathrm{E} \to \mathrm{B}$, où E et B sont des espaces topologiques, la terminologie adoptée considère que l'espace E est le revêtement, l'espace B étant sa base, et l'application p est le plus souvent sous-entendue. Nous sommes ainsi amenés à étudier de façon générale la structure de B-espace (§1). Les B-espaces *étalés* sont définis au §2, mais il est souvent utile de les étudier du point de vue équivalent des *faisceaux* sur B (§3). La notion d'espace fibré localement trivial est introduite au §4 ; ce sont les B-espaces localement isomorphes à un produit $\mathrm{B} \times \mathrm{F}$, où la *fibre* F est un espace topologique. Les revêtements sont ceux dont la fibre est un espace topologique discret. Au §5, nous définissons la notion de *revêtement galoisien* et démontrons que si la base B est non vide, connexe et localement connexe, tout revêtement est associable à un revêtement galoisien. Les espaces simplement connexes sont définis au §6 : ce sont ceux dont tout revêtement est trivialisable ; un intervalle de $\mathbf{R}$, une partie convexe de l'espace numérique $\mathbf{R}^n$, la sphère $\mathbf{S}_n$ de dimension $n \geqslant 2$ sont des espaces simplement connexes, mais pas le cercle $\mathbf{S}_1$.

La notion algébrique de groupoïde est définie au chapitre II ; elle généralise celle de groupe et avait été introduite par H. BRANDT dans son étude des idéaux fractionnaires inversibles des algèbres de quaternions. Les notions de carquois, graphes et catégories sont définies aux §1, 2 et 3 du chapitre II ; un groupoïde est une catégorie dont toute flèche est inversible. Les résultats des §4 et 5 permettront de déduire du théorème de van Kampen, formulé en termes de groupoïdes, des présentations explicites des groupes de Poincaré dans diverses situations.

La classification des revêtements d'un espace topologique donné B se fait par l'introduction, au chapitre III, §3, de son *groupoïde de Poincaré* $\varpi(\mathrm{B})$, qui est défini en termes de classes d'équivalences de *chemins* dans B modulo la *relation d'homotopie stricte.* Lorsque b est un point de B, le *groupe de Poincaré* $\pi_1(\mathrm{B}, b)$ apparaît comme le groupe d'isotropie en b du groupoïde $\varpi(\mathrm{B})$. La notion d'homotopie est introduite au §1 ; on y étudie en particulier l'importante propriété d'extension des homotopies. Le §2 est consacré à la notion de chemin dans un espace topologique et aux notions d'espace connexe par arcs et d'espace localement connexe par arcs. On y établit aussi un théorème de relèvement des chemins.

Le lien entre homotopie et revêtements est étudié aux §4 et 5. Si E est un revêtement d'un espace topologique B et si $b \in \mathrm{B}$, la fibre E_b est munie d'une opération naturelle du groupe $\pi_1(\mathrm{B}, b)$; cette construction donne lieu à un foncteur de la catégorie des revêtements de B dans celle des ensembles munis d'une action de $\pi_1(\mathrm{B}, b)$. Lorsque B est un espace topologique connexe et localement connexe par arcs, ce foncteur est pleinement fidèle ; son image est constituée des opérations du groupe $\pi_1(\mathrm{B}, b)$ sur un ensemble discret qui sont continues pour une certaine topologie, dite « admissible », sur le groupe $\pi_1(\mathrm{B}, b)$.

Le chapitre IV est consacré aux *espaces délaçables ;* ce sont les espaces topologiques localement connexes par arcs pour lesquels la topologie admissible des groupes de Poincaré est la topologie discrète. Pour ces espaces, la correspondance entre revêtements et opérations du groupe de Poincaré est ainsi parfaite : le foncteur décrit ci-dessus fournit une équivalence de catégories entre la catégorie des revêtements de B et celle des ensembles munis d'une opération du groupe $\pi_1(\mathrm{B}, b)$.

On dit qu'un espace topologique B est simplement connexe par arcs s'il est connexe par arcs et si le groupe $\pi_1(\mathrm{B}, b)$ est trivial pour tout point b de B. On démontre qu'un espace délaçable non vide possède un *revêtement universel* qui est simplement connexe par arcs et galoisien. On prouve aussi que le groupe de Poincaré d'un espace topologique compact et délaçable est de présentation finie (§2) ; sans l'hypothèse que l'espace est délaçable, ce groupe de Poincaré peut avoir la puissance du continu (théorème de Shelah). On démontre au §3 que le groupe de Poincaré en l'élément neutre d'un groupe topologique connexe est abélien et (dans le cas délaçable) que son revêtement universel possède une structure naturelle de groupe topologique.

Lorsque $f\colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est une application continue et E est un Y-espace, on décrit au §4 en termes de *données de descente* les éventuels X-espaces dont E provient par changement de base. Nous traduisons ainsi dans le cadre de la Topologie générale un procédé utilisé systématiquement par A. Grothendieck en Géométrie algébrique. On donne aussi des conditions garantissant qu'un revêtement de Y provient d'un revêtement de X. Sous certaines hypothèses sur f, cela permet de démontrer la formulation générale du théorème de van Kampen : le groupoïde de Poincaré de X est isomorphe à un certain groupoïde (coégalisateur, chapitre II, §5) construit à l'aide du groupoïde de Poincaré de Y et de celui du carré fibré $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$.

Pour les applications, il est toutefois nécessaire d'en déduire une *présentation* du groupe de Poincaré de X en un point. Au §5, on applique ainsi les calculs généraux du chapitre II pour obtenir de telles présentations dans de nombreux exemples. On y calcule en particulier le groupe de Poincaré de X lorsqu'on s'est donné un recouvrement de X par une famille de parties ouvertes et connexes par arcs. Ainsi que l'a notamment montré R. Brown, le point de vue des groupoïdes permet de ne faire aucune hypothèse sur la connexité des intersections deux à deux de ces parties. Sous certaines conditions de délaçabilité, on traite également le cas de recouvrements localement finis de X par des parties fermées. On y calcule aussi le groupe de Poincaré du quotient d'un espace délaçable par l'action propre et libre d'un groupe discret. On y explicite enfin le théorème originel de van Kampen, sous des hypothèses un peu différentes.

Enfin, on étudie au §6 la notion d'espace classifiant pour un groupe topologique G : lorsqu'on dispose d'un tel espace B_{G}, l'étude des classes d'isomorphisme d'espaces fibrés principaux de groupe G et de base paracompacte B se traduit en un problème d'étude des classes d'homotopies d'applications de B dans B_G. Lorsque G est discret, on construit un espace classifiant qui est un espace métrisable.

Les résultats des chapitres I à IV dépendent des quatre premiers Livres (E, A, TG, FVR) ; certains exemples et remarques utilisent en outre des résultats d'EVT, VAR, LIE III et LIE IV.

Il était initialement prévu que ce Livre fît l'objet du chapitre XI du Livre de *Topologie générale*. Dans les Livres précédents, les références à TG, XI, doivent ainsi être modifiées comme suit :

LIE, III, §1, n°9, p. 114, note 1. Lire « Cf. TA, IV, p. 379, prop. 6. »

LIE, III, §6, p. 192, note 1. Lire « Rappelons (TA, I, p. 124, déf. 3) qu'un espace est dit simplement connexe si chacun de ses revêtements est trivialisable ; un espace simplement connexe est connexe. Rappelons aussi (TA, I, p. 100, cor. 3) que si G_1, G_2, sont des groupes topologiques connexes, si φ est un homomorphisme continu ouvert de G_1 sur G_2 à noyau discret, et si G_2 est simplement connexe, alors φ est un homéomorphisme. »

LIE, III, §6, n°7, p. 206, ligne 11. Au lieu de « d'après TG, XI », lire « d'après TA, IV, p. 379, prop. 6 ».

LIE, VII, p. 66, appendice II, exercice 1. Au lieu de « TG, XI », lire « TA, I, p. 69, déf. 2 ».

LIE, IX, §2, n°4, p. 12, ligne −9. Au lieu de « TG, XI, à paraître », lire « TA, VII, à paraître ».

LIE, IX, §3, n°6, p. 22. Au lieu de « TG, XI, à paraître », lire « TA, I, p. 127, exemple 3 ».

LIE, IX, §4, n°2, p. 27, ligne 11. Au lieu de « TG, XI, à paraître », lire « TA, VII, à paraître ».

LIE, IX, §4, n°6, p. 34, ligne −6. Au lieu de « TG, XI, à paraître », lire « TA, VII, à paraître ».

LIE, IX, §4, n°9, p. 39, ligne 13. Au lieu de « TG, XI, à paraître », lire « d'après TA, IV, p. 379, prop. 6 ».

LIE, IX, §5, n°4, p. 51, ligne −13. Au lieu de « TG, XI, à paraître », lire « d'après TA, IV, p. 358, exemple ».

LIE, IX, §5, n°4, p. 51, ligne −4. Au lieu de « *cf.* TG, XI, à paraître », lire « TA, I, p. 106, exemple 4 et p. 111, prop. 10 ».

LIE, IX, §9, n°1, p. 89, ligne 9. Au lieu de « d'après TG, XI », lire « d'après TA, I, p. 37, th. 2 ».

LIE, IX, p. 112, exercice 8. Au lieu de « TG, XI », lire « TA, VII ».

LIE, IX, p. 118, exercice 2. Au lieu de « TG, XI », lire « TA, III, p. 229, déf. 1 ».

BIBLIOGRAPHIE

BRANDT (H.), « Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes », *Mathematische Annalen* (1926), vol. 96, p. 360–366.

BROWN (R.), « Groupoids and van Kampen's theorem », *Proceedings of the London Mathematical Society (3)* (1967), vol. 17, p. 385–401.

GROTHENDIECK (A.), *Revêtements étales et groupe fondamental* (SGA 1), Documents mathématiques, vol. 3, Société mathématique de France, 2003.

VAN KAMPEN (E. R.), « On the connection between the fundamental groups of some related spaces », *American Journal of Mathematics* (1933), vol. 55, n° 1, p. 261–267.

CHAPITRE PREMIER

Revêtements

§ 1. PRODUITS FIBRÉS ET CARRÉS CARTÉSIENS

1. Structure de B-espace

Soit B un espace topologique.

DÉFINITION 1. — *On appelle* B-espace topologique *(ou simplement* B-espace*) un espace topologique* X*, muni d'une application continue* p *de* X *dans* B*. L'application* p *s'appelle la* projection *du* B*-espace* X.

Soient X, X′ *des* B*-espaces et* p, p' *leurs projections respectives. On appelle* B-morphisme de X dans X′ *une application continue* f *de* X *dans* X′ *telle que* $p' \circ f = p$.

Il est parfois commode de désigner par (X, p) le B-espace obtenu en munissant l'espace topologique X de l'application p continue.

Le composé de deux B-morphismes est un B-morphisme. Les isomorphismes de B-espaces, aussi appelés B-*isomorphismes*, sont les B-morphismes qui sont des homéomorphismes.

Ainsi, si l'on appelle structure de B-espace sur un ensemble X la donnée d'une topologie sur X et d'une application continue $p \colon \mathrm{X} \to \mathrm{B}$, on peut prendre les B-morphismes pour morphismes de la structure de B-espace (E, IV, p. 11).

N. Bourbaki, *Topologie algébrique*, DOI 10.1007/978-3-662-49361-8_1

Soient X, X′ des B-espaces. On note $\mathscr{C}_{\mathrm{B}}(\mathrm{X};\mathrm{X}')$ l'ensemble des B-morphismes de X dans X′, $\mathrm{Isom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{X};\mathrm{X}')$ l'ensemble des B-isomorphismes de X dans X′ et $\mathrm{Aut}_{\mathrm{B}}(\mathrm{X})$ l'ensemble des B-automorphismes de X, c'est-à-dire des B-isomorphismes de X dans X.

Soient X un B-espace et p sa projection. Si l'on munit B de la structure de B-espace dont la projection est Id_{B}, l'ensemble $\mathscr{C}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B};\mathrm{X})$ est l'ensemble des sections (E, II, p. 18, déf. 11) continues de p.

Soient X un B-espace, p sa projection et b un point de B. Le sous-espace $\overset{-1}{p}(b)$ de X est appelé la *fibre de* X *en* b (ou la *fibre de* p *en* b) et noté X_b. Pour qu'une application continue f de X dans un B-espace X′ soit un B-morphisme, il faut et il suffit que $f(\mathrm{X}_b)$ soit contenu dans X'_b pour tout $b \in \mathrm{B}$.

Soient X un B-espace et p sa projection. Soit f une application continue d'un espace topologique B′ dans B. Une application continue $g\colon \mathrm{B}' \to \mathrm{X}$ telle que $p \circ g = f$ est appelée un *relèvement continu de* f *à* X. Autrement dit, si l'on munit B′ de la structure de B-espace de projection f, les relèvements continus de f à X sont les B-morphismes de B′ dans X.

2. Opérations sur les B-espaces

Soit B un espace topologique.

Soient X un B-espace et p sa projection. On munit tout sous-espace topologique Y de X de la structure de B-espace dont la projection est $p \mid \mathrm{Y}$. Soit A un sous-espace de B ; muni de l'application $p_{\mathrm{A}}\colon \overset{-1}{p}(\mathrm{A}) \to \mathrm{A}$ déduite de p par passage aux sous-ensembles, l'espace topologique $\overset{-1}{p}(\mathrm{A})$, est un A-espace. On l'appelle le A-*espace induit par* (X, p) *au-dessus de* A et on le note parfois X_{A}.

Soit $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de B-espaces, et soit p_i la projection de X_i. L'espace somme $\mathrm{X} = \coprod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ (TG, I, p. 15), muni de l'application $p\colon \mathrm{X} \to \mathrm{B}$ définie par $p(i,x) = p_i(x)$ (pour $i \in \mathrm{I}$ et $x \in \mathrm{X}_i$), est un B-espace appelé la *somme* de la famille de B-espaces $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Les injections canoniques $\mathrm{X}_i \to \mathrm{X}$ sont des B-morphismes.

Soient X un B-espace, p sa projection et soit R une relation d'équivalence sur X. Notons X/R l'espace quotient (TG, I, p. 20, déf. 3). Si l'application $p\colon \mathrm{X} \to \mathrm{B}$ est compatible avec la relation R (E, II, p. 44), l'application $p'\colon \mathrm{X}/\mathrm{R} \to \mathrm{B}$ déduite de p par passage au quotient est continue (TG, I, p. 21, prop. 6) ; le B-espace obtenu en munissant X/R de la projection p' est alors appelé le B-*espace quotient* de X par la relation R.

3. Produit fibré de deux B-espaces

Soient B un espace topologique, X et X′ des B-espaces, p et p' leurs projections respectives. Notons $\mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}'$ le sous-espace topologique de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}'$ formé des couples (x, x') tels que $p(x) = p'(x')$. L'application $q\colon \mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}' \to \mathrm{B}$ définie par $q(x, x') = p(x)$ est continue.

DÉFINITION 2. — *L'espace topologique* $\mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}'$ *s'appelle le* produit fibré de X et X′ au-dessus de B. *Le* B-*espace obtenu en munissant* $\mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}'$ *de l'application* q *s'appelle le* B-espace produit de X et X′.

Les restrictions à $\mathrm{X}\times_{\mathrm{B}}\mathrm{X}'$ des projections de $\mathrm{X}\times\mathrm{X}'$ dans X et dans X′ sont encore notées pr_1 et pr_2 et appelées *première* et *seconde projections* du produit fibré. Elles sont continues et sont des B-morphismes, car on a $q = p \circ \mathrm{pr}_1 = p' \circ \mathrm{pr}_2$.

On prendra garde que $\mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}'$ peut être vide même si X et X′ sont non vides : en effet, la relation $\mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}' = \varnothing$ équivaut à dire que $p(\mathrm{X})$ et $p'(\mathrm{X}')$ sont disjoints.

Soient Y un B-espace et $u\colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$, $u'\colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X}'$ des B-morphismes. Il existe un unique B-morphisme $v\colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}'$ tel que $\mathrm{pr}_1 \circ v = u$ et $\mathrm{pr}_2 \circ v = u'$ (*propriété universelle du* B-*espace produit de deux* B-*espaces*) : c'est l'application $y \mapsto (u(y), u'(y))$ de Y dans $\mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}'$, que l'on note parfois (u, u').

Soient $\mathrm{X}, \mathrm{X}', \mathrm{Y}, \mathrm{Y}'$ des B-espaces, soient $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, $f'\colon \mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ des B-morphismes. L'application $(x, x') \mapsto (f(x), f'(x'))$ est un B-morphisme de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}'$ dans $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{Y}'$, que l'on note $f \times_{\mathrm{B}} f'$ et que l'on appelle *l'extension de* f *et* f' *aux produits fibrés.*

Exemples. — 1) Soient X et X′ des B-espaces, alors l'application $(x, x') \mapsto (x', x)$ définit un B-isomorphisme de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}'$ sur $\mathrm{X}' \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}$.

2) Soient X, X′, X″ des B-espaces et p, p', p'' leurs projections respectives. Le B-espace produit $(\mathrm{X}\times_{\mathrm{B}}\mathrm{X}')\times_{\mathrm{B}}\mathrm{X}''$ est le sous-espace topologique $\mathrm{X}\times_{\mathrm{B}}\mathrm{X}'\times_{\mathrm{B}}\mathrm{X}''$ de $\mathrm{X}\times\mathrm{X}'\times\mathrm{X}''$ formé des triplets (x, x', x'') tels que

$p(x) = p'(x') = p''(x'')$, muni de la projection $q\colon \mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}' \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}'' \to \mathrm{B}$ définie par $q(x, x', x'') = p(x)$.

3) Soient X un B-espace et p sa projection. Le produit fibré $\mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}$ de X et X au-dessus de B est appelé le *carré fibré de* X. C'est le sous-espace de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ formé des couples (x, x') tels que $p(x) = p(x')$. Il est muni de la structure de B-espace dont la projection est l'application $(x, x') \mapsto p(x)$. La diagonale Δ_{X} de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ (E, II, p. 13) est contenue dans $\mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}$; on l'appelle encore la *diagonale* de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}$. L'application $x \mapsto (x, x)$ de X dans $\mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}$ est un B-morphisme, appelé le B-*morphisme diagonal* et souvent noté δ_{X} ; il définit un B-isomorphisme de X sur Δ_{X} (TG, I, p. 25, cor. 2).

4) Soit $(\mathrm{B}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille d'espaces topologiques et soient, pour tout $i \in \mathrm{I}$, (X_i, p_i) et (Y_i, q_i) des B_i-espaces. Posons $\mathrm{B} = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{B}_i$, $\mathrm{X} = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ et $\mathrm{Y} = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{Y}_i$. Muni de l'application continue $p = \prod_i p_i$ (resp. $q = \prod_i q_i$), l'espace topologique X (resp. Y) est un B-espace. Par l'isomorphisme d'associativité des produits topologiques de $\prod_i (\mathrm{X}_i \times \mathrm{Y}_i)$ sur $(\prod_i \mathrm{X}_i) \times (\prod_i \mathrm{Y}_i) = \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ (TG, I, p. 25, prop. 2), le sous-espace $\prod_i (\mathrm{X}_i \times_{\mathrm{B}_i} \mathrm{Y}_i)$ de $\prod_i (\mathrm{X}_i \times \mathrm{Y}_i)$ s'identifie à $\mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{Y}$.

5) Soient $(\mathrm{X}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ et $(\mathrm{Y}_j)_{j \in \mathrm{J}}$ des familles de B-espaces. Soient X et Y leurs sommes. Pour tout $(i, j) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$, l'application $(x, y) \mapsto ((i, x), (j, y))$ est un B-isomorphisme de $\mathrm{X}_i \times_{\mathrm{B}} \mathrm{Y}_j$ sur le sous-espace $(\{i\} \times \mathrm{X}_i) \times_{\mathrm{B}} (\{j\} \times \mathrm{Y}_j)$ de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{Y}$. Comme ces derniers forment une partition de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{Y}$ en sous-ensembles ouverts, l'application

$$h\colon \coprod_{(i,j) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}} (\mathrm{X}_i \times_{\mathrm{B}} \mathrm{Y}_j) \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{Y}$$

définie par $h((i, j), (x, y)) = ((i, x), (j, y))$ est un B-isomorphisme.

4. Changement de base

Soient B, B′ des espaces topologiques et $f\colon \mathrm{B}' \to \mathrm{B}$ une application continue. Soit X un B-espace. L'application f munit B′ d'une structure de B-espace, ce qui permet de définir le produit fibré $\mathrm{B}' \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}$. Celui-ci, muni de l'application $\mathrm{pr}_1\colon \mathrm{B}' \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X} \to \mathrm{B}'$ est un B′-espace appelé le B′-*espace déduit du* B-*espace* X *par le changement de base* $f\colon \mathrm{B}' \to \mathrm{B}$ (ou *par changement de base de* B *à* B′ *suivant* f). On l'appelle aussi le B′-*espace image réciproque de* X *par* f. On le note $f^*(\mathrm{X})$, ou parfois $\mathrm{X}_{\mathrm{B}'}$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur l'application f.

Lorsque B′ est un sous-espace de B et que $f \colon \mathrm{B}' \to \mathrm{B}$ est l'injection canonique, l'application $(b', x) \mapsto x$ de $\mathrm{B}' \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}'$ dans $\overset{-1}{p}(\mathrm{B}')$ (où p est la projection de X) est un B′-isomorphisme de $f^*(\mathrm{X})$ sur le B′-espace induit par X au-dessus de B′.

Soient Y un second B-espace et $u \colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un B-morphisme. L'application $\mathrm{Id}_{\mathrm{B}'} \times_{\mathrm{B}} u \colon \mathrm{B}' \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X} \to \mathrm{B}' \times_{\mathrm{B}} \mathrm{Y}$ est un B′-morphisme, appelé le B′-*morphisme déduit du* B-*morphisme* u *par le changement de base* $f \colon \mathrm{B}' \to \mathrm{B}$ et parfois noté $f^*(u)$, ou $u_{\mathrm{B}'}$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur l'application f. C'est l'unique B′-morphisme v de $\mathrm{B}' \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}$ dans $\mathrm{B}' \times_{\mathrm{B}} \mathrm{Y}$ tel que $\mathrm{pr}_2 \circ v = u \circ \mathrm{pr}_2$.

Soit B″ un espace topologique et soit $g \colon \mathrm{B}'' \to \mathrm{B}'$ une application continue. Alors l'application donnée par $(b'', (b', x)) \mapsto (b'', x)$ est un isomorphisme de B″-espaces de $g^*(f^*(\mathrm{X}))$ sur $(f \circ g)^*(\mathrm{X})$, qu'on dira canonique.

5. Produit fibré d'une famille de B-espaces

Soit $(\mathrm{X}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille de B-espaces. Soient $p_i \colon \mathrm{X}_i \to \mathrm{B}$ leurs projections. Notons $\prod_{\mathrm{B}} \mathrm{X}_i$ le sous-espace topologique de $\mathrm{B} \times \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ formé des couples $(b, (x_i)_{i \in \mathrm{I}})$ tels que $p_i(x_i) = b$ pour tout $i \in \mathrm{I}$. L'application $p \colon \prod_{\mathrm{B}} \mathrm{X}_i \to \mathrm{B}$ définie par $p(b, (x_i)_{i \in \mathrm{I}}) = b$ est continue.

DÉFINITION 3. — *L'espace topologique* $\prod_{\mathrm{B}} \mathrm{X}_i$ *s'appelle le* produit fibré de la famille $(\mathrm{X}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ au-dessus de B. *Le* B-*espace obtenu en munissant* $\prod_{\mathrm{B}} \mathrm{X}_i$ *de l'application* p *s'appelle le* B-espace produit de la famille $(\mathrm{X}_i)_{i \in \mathrm{I}}$.

Soit $j \in \mathrm{I}$. L'application $(b, x) \mapsto \mathrm{pr}_j(x)$ de $\prod_{\mathrm{B}} \mathrm{X}_i$ dans X_j est appelée la *projection d'indice* j du produit fibré et encore notée pr_j. Elle est continue. C'est un B-morphisme, car on a $p = p_j \circ \mathrm{pr}_j$.

Soient Y un B-espace et q sa projection. Pour tout $i \in \mathrm{I}$, soit $u_i \colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X}_i$ un B-morphisme. Il existe un unique B-morphisme $v \colon \mathrm{Y} \to \prod_{\mathrm{B}} \mathrm{X}_i$ tel que $\mathrm{pr}_i \circ v = u_i$ pour tout $i \in \mathrm{I}$ (*propriété universelle du* B-*espace produit*) : c'est l'application de Y dans $\prod_{\mathrm{B}} \mathrm{X}_i$, définie par $y \mapsto (q(y), (u_i(y))_{i \in \mathrm{I}})$, que l'on note parfois $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$.

Soient $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(\mathrm{Y}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ des familles de B-espaces et, pour tout $i \in \mathrm{I}$, soit $f_i\colon \mathrm{X}_i \to \mathrm{Y}_i$ un B-morphisme. L'application $(b,(x_i)_{i\in\mathrm{I}}) \mapsto (b,(f_i(x_i))_{i\in\mathrm{I}})$ est un B-morphisme de $\prod_{\mathrm{B}} \mathrm{X}_i$ dans $\prod_{\mathrm{B}} \mathrm{Y}_i$ que l'on note $\prod_{\mathrm{B}} f_i$ et que l'on appelle *l'extension de la famille* $(f_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *aux produits fibrés.*

Exemples. — 1) Lorsque l'ensemble I est vide, l'ensemble $\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ est réduit à un élément et le B-espace $\prod_{\mathrm{B}} \mathrm{X}_i$ s'identifie à B (muni de la projection Id_{B}).

2) Lorsque I n'est pas vide, on déduit de l'application $(b,x) \mapsto x$ de $\mathrm{B} \times \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ dans $\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{X}_i$, par passage aux sous-espaces, un homéomorphisme de $\prod_{\mathrm{B}} \mathrm{X}_i$ sur le sous-espace de $\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ formé des familles $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ telles que $p_i(x_i) = p_j(x_j)$ pour tous $i, j \in \mathrm{I}$. Ce sous-espace sera appelé, par abus, le produit fibré de la famille $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$.

3) Lorsque l'ensemble I est un ensemble à un élément α (resp. à deux éléments α et β ; resp. à trois éléments α, β, γ), l'application pr_α (resp. $(\mathrm{pr}_\alpha, \mathrm{pr}_\beta)$; resp. $(\mathrm{pr}_\alpha, \mathrm{pr}_\beta, \mathrm{pr}_\gamma)$) de $\prod_{\mathrm{B}} \mathrm{X}_i$ dans X_α (resp. dans $\mathrm{X}_\alpha \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}_\beta$; resp. dans $\mathrm{X}_\alpha \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}_\beta \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}_\gamma$) est un B-isomorphisme. Cela nous permettra de déduire les propriétés du produit fibré de deux ou trois B-espaces de celles du produit fibré de familles de B-espaces.

Soit $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de B-espaces et soit J une partie de I. On déduit de l'application $\mathrm{Id}_{\mathrm{B}} \times \mathrm{pr}_{\mathrm{J}}$ de $\mathrm{B} \times \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ dans $\mathrm{B} \times \prod_{i\in\mathrm{J}} \mathrm{X}_i$, par passage aux sous-ensembles, un B-morphisme $\prod_{\substack{\mathrm{B}\\ i\in\mathrm{I}}} \mathrm{X}_i \to \prod_{\substack{\mathrm{B}\\ i\in\mathrm{J}}} \mathrm{X}_i$. On le note encore pr_{J} et on l'appelle la *projection d'indice* J *du produit fibré.*

Soit $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de B-espaces. Soit $(\mathrm{J}_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{L}}$ une partition de I. L'application $(\mathrm{pr}_{\mathrm{J}_\lambda})_{\lambda\in\mathrm{L}}$ de $\prod_{\substack{\mathrm{B}\\ i\in\mathrm{I}}} \mathrm{X}_i \to \prod_{\substack{\mathrm{B}\\ \lambda\in\mathrm{L}}} \left(\prod_{\substack{\mathrm{B}\\ i\in\mathrm{J}_\lambda}} \mathrm{X}_i \right)$ est un B-isomorphisme (« associativité » des produits fibrés de B-espaces).

6. Carrés cartésiens

Soient B, B′, X, X′ des espaces topologiques et soient $f\colon \mathrm{B}' \to \mathrm{B}$, $f'\colon \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$, $p\colon \mathrm{X} \to \mathrm{B}$, $p'\colon \mathrm{X}' \to \mathrm{B}'$ des applications continues. On peut représenter un tel quadruplet (f, f', p, p') par un diagramme

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

(E, II, p. 14). On dira alors : « Considérons le diagramme carré (1) », ou simplement « le carré (1) », au lieu de dire : « Considérons le quadruplet (f, f', p, p') d'applications continues ». On dit que le carré (1) est *commutatif*, si l'égalité

$$f \circ p' = p \circ f'$$

est satisfaite. Dans ce cas, on munit souvent B', X et X' des structures de B-espaces définies par les applications f, p et $f \circ p' = p \circ f'$ respectivement ; les applications p' et f' sont alors des B-morphismes.

DÉFINITION 4. — *On dit que le carré* (1) *est un* carré cartésien d'espaces topologiques *(ou, simplement, qu'il est* cartésien*) s'il est commutatif et que, pour tout espace topologique* Y *et tout couple d'applications continues* $u\colon Y \to B'$, $v\colon Y \to X$ *telles que* $f \circ u = p \circ v$, *il existe une unique application continue* $w\colon Y \to X'$ *telle que* $p' \circ w = u$ *et* $f' \circ w = v$.

Pour que le carré (1) soit cartésien, il faut et il suffit que le carré

$$(1') \qquad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{p'} & B' \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

soit cartésien.

PROPOSITION 1. — *Pour que le carré* (1) *soit cartésien, il faut et il suffit qu'il soit commutatif et que, pour tout* B-*espace* Y *et tout couple de* B-*morphismes* $u\colon Y \to B'$, $v\colon Y \to X$, *il existe un unique* B-*morphisme* $w\colon Y \to X'$ *tel que* $p' \circ w = u$ *et* $f' \circ w = v$.

Supposons que le carré (1) est cartésien. Soit Y un B-espace et soient $u\colon Y \to B'$, $v\colon Y \to X$ des B-morphismes. Les applications $f \circ u$ et $p \circ v$ sont toutes deux égales à la projection du B-espace Y ; l'unique application continue w telle que $p' \circ w = u$ et $f' \circ w = v$ est alors un B-morphisme. Cela prouve la nécessité de la condition.

Inversement, supposons cette condition satisfaite. Soit Y un espace topologique et soient $u\colon \mathrm{Y} \to \mathrm{B}'$, $v\colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ des applications continues telles que $f \circ u = p \circ v$. Lorsqu'on munit Y de la structure de B-espace définie par $f \circ u$, u et v sont des B-morphismes. Toute application continue $w\colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X}'$ telle que $p' \circ w = u$ et $f' \circ w = v$ étant un B-morphisme, il en existe une et une seule.

Proposition 2. — *Soient* B, B′ *et* X *des espaces topologiques et* $p\colon \mathrm{X} \to \mathrm{B}$, $f\colon \mathrm{B}' \to \mathrm{B}$ *des applications continues.*

a) *Le carré*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B}' \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X} \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & \mathrm{X} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{B}' \arrow[r, "f"] & \mathrm{B} \end{tikzcd} \tag{2}$$

est un carré cartésien.

b) *Pour tout carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"] & \mathrm{X} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{B}' \arrow[r, "f"] & \mathrm{B} \end{tikzcd} \tag{3}$$

il existe une unique application continue $h\colon \mathrm{X}' \to \mathrm{B}' \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}$ *telle que* $\mathrm{pr}_1 \circ h = p'$ *et* $\mathrm{pr}_2 \circ h = f'$.

c) *Le carré commutatif* (3) *est cartésien si et seulement si* h *est un homéomorphisme.*

L'assertion *a*) résulte de la prop. 1 et de la propriété universelle du B-espace produit de deux B-espaces (I, p. 3). L'assertion *b*) en découle.

Si le carré (3) est cartésien, il existe une unique application continue $h'\colon \mathrm{B}' \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ telle que $f' \circ h' = \mathrm{pr}_2$ et $p' \circ h' = \mathrm{pr}_1$. On a $f' \circ h' \circ h = f'$ et $p' \circ h' \circ h = p'$, d'où $h' \circ h = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}'}$ puisque le carré (3) est cartésien. On a $\mathrm{pr}_1 \circ h \circ h' = \mathrm{pr}_1$ et $\mathrm{pr}_2 \circ h \circ h' = \mathrm{pr}_2$, d'où $h \circ h' = \mathrm{Id}_{\mathrm{B}' \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}}$ puisque le carré (2) est cartésien. Cela prouve que h est un homéomorphisme.

Inversement, supposons que h soit un homéomorphisme ; comme le carré (2) est cartésien, le carré (3) est aussi cartésien.

L'application $h\colon X' \to B' \times_B X$ dont l'existence et l'unicité est affirmée par l'assertion *b*) de la proposition précédente sera dite *canonique* : c'est l'application notée (p', f') en I, p. 3.

PROPOSITION 3. — *Soit*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

un carré cartésien. Pour toute section continue s de p', l'application $f' \circ s$ est un relèvement continu de f à X. L'application $s \mapsto f' \circ s$ est une bijection de $\mathscr{C}_{B'}(B'; X')$ sur $\mathscr{C}_B(B'; X)$.

Si $s\colon B' \to X'$ est une section continue de p', on a $p \circ f' \circ s = f \circ p' \circ s = f$, ce qui prouve que $f' \circ s$ est un relèvement continu de f à X, *i.e.* un B-morphisme de B′ dans X. Inversement, soit $g\colon B' \to X$ un B-morphisme. On a $f \circ \mathrm{Id}_{B'} = p \circ g$; il existe donc, par définition d'un carré cartésien, une unique application continue $s\colon B' \to X'$ telle que $p' \circ s = \mathrm{Id}_{B'}$ et $f' \circ s = g$, d'où la proposition.

7. Carrés cartésiens construits par passage aux sous-espaces

PROPOSITION 4. — *Soit*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array} \tag{4}$$

un carré cartésien et soient B_0, B'_0, X_0 des sous-espaces de B, B' et X respectivement. Supposons qu'on ait $f(B'_0) \subset B_0$, $p(X_0) \subset B_0$ et posons $X'_0 = \overset{-1}{(p')}(B'_0) \cap \overset{-1}{(f')}(X_0)$. Alors, le carré

$$\begin{array}{ccc} X'_0 & \xrightarrow{f'_0} & X_0 \\ \downarrow{\scriptstyle p'_0} & & \downarrow{\scriptstyle p_0} \\ B'_0 & \xrightarrow{f_0} & B_0 \end{array} \tag{4'}$$

(où les applications f_0, f_0', p_0, p_0' sont déduites de f, f', p, p' respectivement par passage aux sous-ensembles) est cartésien.

Considérons l'application canonique $h\colon \mathrm{X}' \to \mathrm{B}' \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}$ déduite du diagramme commutatif (4). Comme le carré (4) est cartésien, h est un homéomorphisme. Par construction, on a $\mathrm{X}_0' = \overset{-1}{h}(\mathrm{B}_0' \times_{\mathrm{B}_0} \mathrm{X}_0)$ et l'application $h_0\colon \mathrm{X}_0' \to \mathrm{B}_0' \times_{\mathrm{B}_0} \mathrm{X}_0$ déduite du diagramme commutatif (4′) est déduite de h par passage aux sous-ensembles. C'est donc un homéomorphisme et le carré (4′) est cartésien (prop. 2).

Corollaire. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"] & \mathrm{X} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{B}' \arrow[r, "f"] & \mathrm{B} \end{tikzcd}$$

un carré cartésien.

a) *Pour tout point b' de B', l'application f' induit un homéomorphisme de la fibre $\mathrm{X}'_{b'}$ de p' sur la fibre $\mathrm{X}_{f(b')}$ de p.*

b) *Si l'application p est injective (*resp. *surjective,* resp. *bijective), il en est de même de p'.*

Soit b' un point de B'. Posons $b = f(b')$. Pour tout $x' \in \mathrm{X}'_{b'}$, on a $p(f'(x')) = f(p'(x')) = f(b') = b$, d'où $f'(x') \in \mathrm{X}_b$. Cela prouve que l'on a $\mathrm{X}'_{b'} \subset \overset{-1}{(f')}(\mathrm{X}_b)$. Dans la prop. 4, prenons $\mathrm{B}_0 = \{b\}$, $\mathrm{B}_0' = \{b'\}$ et $\mathrm{X}_0 = \mathrm{X}_b$; on a alors $\mathrm{X}_0' = \mathrm{X}'_{b'}$, d'où l'assertion a).

Pour que l'application p soit injective (resp. surjective, resp. bijective), il faut et il suffit que le cardinal de chacune de ses fibres soit inférieur (resp. supérieur, resp. égal) à 1. L'assertion b) en résulte.

Exemple. — Soient (X, p) un B-espace et A un sous-espace de B. Le carré

$$\begin{tikzcd} \overset{-1}{p}(\mathrm{A}) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p_{\mathrm{A}}"] & \mathrm{X} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{A} \arrow[r, "i"] & \mathrm{B} \end{tikzcd} \tag{5}$$

(où i et j sont les injections canoniques) est cartésien.

En particulier, si A et A′ sont des sous-espaces de l'espace topologique B, le carré

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{A}\cap\mathrm{A}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{A}' \arrow[d] \\
\mathrm{A} \arrow[r] & \mathrm{B}
\end{tikzcd}
\tag{6}
$$

(où les flèches sont les injections canoniques) est cartésien.

8. Carrés cartésiens construits par produits, produits fibrés et sommes

Proposition 5. — *Soit* I *un ensemble et, pour tout* $i \in \mathrm{I}$, *soit*

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{X}'_i \arrow[r, "f'_i"] \arrow[d, "p'_i"] & \mathrm{X}_i \arrow[d, "p_i"] \\
\mathrm{B}'_i \arrow[r, "f_i"] & \mathrm{B}_i
\end{tikzcd}
\tag{7}
$$

un carré cartésien. Le carré

$$
\begin{tikzcd}
\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{X}'_i \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"] & \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{X}_i \arrow[d, "p"] \\
\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{B}'_i \arrow[r, "f"] & \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{B}_i
\end{tikzcd}
\tag{7'}
$$

(où f, f', p, p' sont les extensions des familles (f_i), (f'_i), (p_i), (p'_i) aux produits) est cartésien.

Soit Y un espace topologique, soient $u\colon \mathrm{Y} \to \prod_i \mathrm{B}'_i$ et $v\colon \mathrm{Y} \to \prod_i \mathrm{X}_i$ des applications continues telles que $f \circ u = p \circ v$. Pour $i \in \mathrm{I}$, posons $u_i = \mathrm{pr}_i \circ u$ et $v_i = \mathrm{pr}_i \circ v$; on a $f_i \circ u_i = p_i \circ v_i$ et il existe une unique application continue $w_i\colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X}'_i$ telle que $p'_i \circ w_i = u_i$ et $f'_i \circ w_i = v_i$. Alors, l'application $w = (w_i)$ est une application continue de Y dans $\prod_i \mathrm{X}'_i$ telle que $p' \circ w = u$ et $f' \circ w = v$, et c'est la seule ayant ces propriétés.

Corollaire 1. — *Soit* X *un* B-*espace, soit* p *sa projection et soit* F *un espace topologique. Le carré*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X}\times\mathrm{F} & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & \mathrm{X} \\ \big\downarrow{\scriptstyle p\times\mathrm{Id}_{\mathrm{F}}} & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathrm{B}\times\mathrm{F} & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & \mathrm{B} \end{array} \tag{8}$$

est cartésien.

Soit P un espace topologique réduit à un point. Le corollaire 1 résulte de la prop. 5 appliquée aux carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X} & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathrm{X}}} & \mathrm{X} \\ \big\downarrow{\scriptstyle p} & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathrm{B} & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathrm{B}}} & \mathrm{B} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{P} \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_{\mathrm{P}}} \\ \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{P}\ . \end{array}$$

Soient B et B′ des espaces topologiques et soit $f\colon \mathrm{B}' \to \mathrm{B}$ une application continue. Soit I un ensemble et, pour tout $i \in \mathrm{I}$, soient X_i un B-espace, X'_i un B′-espace et $f'_i\colon \mathrm{X}'_i \to \mathrm{X}_i$ une application continue telle que le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X}'_i & \xrightarrow{f'_i} & \mathrm{X}_i \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{B}' & \xrightarrow{f} & \mathrm{B} \end{array} \tag{9}$$

soit commutatif. Il existe une unique application continue

$$f'\colon \prod_{i\in\mathrm{I}}{}_{\mathrm{B}'} \mathrm{X}'_i \to \prod_{i\in\mathrm{I}}{}_{\mathrm{B}} \mathrm{X}_i$$

telle que $\mathrm{pr}_i \circ f' = f'_i \circ \mathrm{pr}_i$ pour tout $i \in \mathrm{I}$ et telle que le carré

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i\in\mathrm{I}}{}_{\mathrm{B}'} \mathrm{X}'_i & \xrightarrow{f'} & \prod_{i\in\mathrm{I}}{}_{\mathrm{B}} \mathrm{X}_i \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{B}' & \xrightarrow{f} & \mathrm{B} \end{array} \tag{9′}$$

soit commutatif (cette dernière condition résultant des autres si $\mathrm{I} \neq \varnothing$) : c'est l'application déduite de l'application

$$f \times \prod_{i \in \mathrm{I}} f'_i \colon \mathrm{B}' \times \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}'_i \to \mathrm{B} \times \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$$

par passage aux sous-ensembles. Avec ces notations :

Corollaire 2. — *Si le carré* (9) *est cartésien pour tout* $i \in \mathrm{I}$, *le carré* (9′) *est cartésien.*

On déduit de la prop. 5 un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B}' \times \prod_i \mathrm{X}'_i \arrow[r, "\mathrm{Id}_\mathrm{B} \times \prod_i f'_i"] \arrow[d] & \mathrm{B} \times \prod_i \mathrm{X}_i \arrow[d] \\ \mathrm{B}' \times (\mathrm{B}')^\mathrm{I} \arrow[r, "f \times \prod_i f"] & \mathrm{B} \times \mathrm{B}^\mathrm{I} . \end{tikzcd}$$

Notons $\Delta_{\mathrm{B}'}$ et Δ_B les diagonales de $\mathrm{B}' \times (\mathrm{B}')^\mathrm{I}$ et $\mathrm{B} \times \mathrm{B}^\mathrm{I}$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \prod_{\mathrm{B}'}\limits_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}'_i \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & \prod_{\mathrm{B}}\limits_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i \arrow[d] \\ \Delta_{\mathrm{B}'} \arrow[r] & \Delta_\mathrm{B} \end{tikzcd}$$

déduit du précédent par passage aux sous-espaces est cartésien (I, p. 9, prop. 4). Il s'identifie au diagramme (9′).

Exemple 1. — Soit

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"] & \mathrm{X} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{B}' \arrow[r, "f"] & \mathrm{B} \end{tikzcd}$$

un carré cartésien. Alors le corollaire 2 fournit un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}' \times_{\mathrm{B}'} \mathrm{X}' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathrm{X} \times_\mathrm{B} \mathrm{X} \arrow[d] \\ \mathrm{B}' \arrow[r, "f"] & \mathrm{B} . \end{tikzcd}$$

On a la relation $\overset{-1}{\varphi}(\Delta_\mathrm{X}) = \Delta_{\mathrm{X}'}$. En effet, par la prop. 2 de I, p. 8, il suffit de considérer le cas où $\mathrm{X}' = \mathrm{B}' \times_\mathrm{B} \mathrm{X}$. Soit alors $((b, x), (b, x'))$ un élément de $\mathrm{X}' \times_{\mathrm{B}'} \mathrm{X}'$ avec $b \in \mathrm{B}'$ et $x, x' \in \mathrm{X}$. Cet élément appartient à $\overset{-1}{\varphi}(\Delta_{\mathrm{X}})$ si et seulement si $x = x'$.

PROPOSITION 6. — *Soit* I *un ensemble et, pour tout* $i \in \mathrm{I}$, *soit*

$$(10) \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{X}'_i & \xrightarrow{f'_i} & \mathrm{X} \\ \downarrow{\scriptstyle p'_i} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathrm{B}'_i & \xrightarrow{f_i} & \mathrm{B} \end{array}$$

un carré cartésien. Soient X' *et* B' *les espaces sommes des familles* (X'_i) *et* (B'_i) *respectivement. Soient* $f \colon \mathrm{B}' \to \mathrm{B}$, $f' \colon \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *et* $p' \colon \mathrm{X}' \to \mathrm{B}'$ *les applications déduites des familles* (f_i), (f'_i) *et* (p'_i) *respectivement. Le carré*

$$(10') \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{X}' & \xrightarrow{f'} & \mathrm{X} \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathrm{B}' & \xrightarrow{f} & \mathrm{B} \end{array}$$

est cartésien.

Les applications f, f' et p' sont continues. La commutativité du carré (10′) résulte de sa définition. Notons h_i l'homéomorphisme canonique de X'_i sur $\mathrm{B}'_i \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}$ (I, p. 8, prop. 2) et $h \colon \mathrm{X}' \to \mathrm{B}' \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}$ l'application canonique (*loc. cit.*). On a $h = h'' \circ h'$ où $h' \colon \mathrm{X}' \to \coprod(\mathrm{B}'_i \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X})$ est l'homéomorphisme déduit des h_i et $h'' \colon \coprod(\mathrm{B}'_i \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}) \to (\coprod \mathrm{B}'_i) \times_{\mathrm{B}} \mathrm{X}$ est celui défini dans l'exemple 5 de I, p. 4. On conclut par la prop. 2 de I, p. 8.

Exemple 2. — Soit (X, p) un B-espace et soit $(\mathrm{A}_k)_{k \in \mathrm{K}}$ une famille de sous-espaces de B. Soit A l'espace somme de la famille $(\mathrm{A}_k)_{k \in \mathrm{K}}$ et soit Y l'espace somme de la famille $(\overset{-1}{p}(\mathrm{A}_k))_{k \in \mathrm{K}}$; notons $i \colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, $j \colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ et $p' \colon \mathrm{Y} \to \mathrm{A}$ les applications déduites des injections canoniques de A_k dans B, des injections canoniques de $\overset{-1}{p}(\mathrm{A}_k)$ dans X, et des applications $p_{\mathrm{A}_k} \colon \overset{-1}{p}(\mathrm{A}_k) \to \mathrm{A}_k$, pour $k \in \mathrm{K}$. Le carré

$$(11) \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Y} & \xrightarrow{j} & \mathrm{X} \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathrm{A} & \xrightarrow{i} & \mathrm{B} \end{array}$$