Entwicklung und Bildung
in der Frühen Kindheit

Jens Holger Lorenz

Kinder begreifen Mathematik

Frühe mathematische Bildung und Förderung

2. Auflage

Kohlhammer

Kohlhammer

Entwicklung und Bildung in der Frühen Kindheit

Herausgegeben von Manfred Holodynski, Dorothee Gutknecht und Hermann Schöler

Jens Holger Lorenz

Kinder begreifen Mathematik

Frühe mathematische Bildung und Förderung

2. Auflage

Verlag W. Kohlhammer

2. Auflage 2016

Gesamtherstellung: W. Kohlhammer GmbH, Stuttgart

Print:
ISBN 978-3-17-029374-8

E-Book-Formate:
pdf: ISBN 978-3-17-029375-5

Vorwort der Herausgeberin und der Herausgeber

Die Lehrbuchreihe *„Entwicklung und Bildung in der Frühen Kindheit“* will Studierenden und Fachkräften das notwendige Grundlagenwissen vermitteln, wie die Bildungsarbeit im Krippen- und Elementarbereich gestaltet werden kann. Die Lehrbücher schlagen eine Brücke zwischen dem aktuellen Stand der einschlägigen wissenschaftlichen Forschungen zu diesem Bereich und ihrer Anwendung in der pädagogischen Arbeit mit Kindern.

Die einzelnen Bände legen zum einen ihren Fokus auf einen ausgewählten Bildungsbereich, wie Kinder ihre sozio-emotionalen, sprachlichen, kognitiven, mathematischen oder motorischen Kompetenzen entwickeln. Hierbei ist der Leitgedanke darzustellen, wie die einzelnen Entwicklungsniveaus der Kinder und Bildungsimpulse der pädagogischen Einrichtungen ineinandergreifen und welche Bedeutung dabei den pädagogischen Fachkräften zukommt. Die Reihe enthält zum anderen Bände, die zentrale bereichsübergreifende Probleme der Bildungsarbeit behandeln, deren angemessene Bewältigung maßgeblich zum Gelingen beiträgt. Dazu zählen Fragen, wie pädagogische Fachkräfte ihre professionelle Responsivität den Kindern gegenüber entwickeln, wie sie Gruppen von Kindern stressfrei managen oder mit Multikulturalität, Integration und Inklusion umgehen können. Die einzelnen Bände bündeln fachübergreifend aktuelle Erkenntnisse aus den Bildungswissenschaften wie der Entwicklungspsychologie, Diagnostik sowie Früh- und Sonderpädagogik und bereiten für den Einsatz in der Aus- und Weiterbildung, aber ebenso für die pädagogische Arbeit vor Ort vor. Die Lehrbuchreihe richtet sich sowohl an Studierende, die sich in ihrem Studium mit der Entwicklung und institutionellen Erziehung von Kindern befassen, als auch an die pädagogischen Fachkräfte des Elementar- und Krippenbereichs.

Im vorliegenden Band „Kinder begreifen Mathematik“ beschreibt der Mathematikdidaktiker und Psychologe Jens Holger Lorenz die Entwicklung, Diagnose und Förderung der wesentlichen Lernvoraussetzungen, die Kinder im Laufe des Vorschulalters für einen erfolgreichen Erwerb der Mathematik erwerben sollten. Schon das sehr junge Kind beschäftigt sich mit dem Umgang mit Zahlen, Formen, Mustern und Größen wie Längen, Gewichten und Zeiten.

Im Buch werden die Entwicklungsmeilensteine der mathematischen Begriffsbildung bei Kindern bis zum Alter von 10 Jahren fundiert und zugleich anschaulich erläutert, ihre selbstentwickelten Einsichten in numerische Zusammenhänge, ihre stolzen Aha-Erlebnisse, aber auch ihre möglichen Irrwege und Verständnisklippen. Daher ist das Buch nicht nur für pädagogische Fachkräfte in Kindertageseinrichtungen, sondern auch für Lehrkräfte im Anfangsunterricht Mathematik eine lesenswerte Einführung. Das Buch offenbart auch für den erwachsenen Leser noch staunenswerte Einsichten über die scheinbar so einfachen Lernvoraussetzungen, die für das Verständnis mathematischer Zusammenhänge notwendig sind und deren verzögerte Aneignung das schulische Lernen massiv beeinträchtigen kann. Die Diagnose dieser Entwicklungsmeilensteine und ihrer Störungen wird praxisorientiert erläutert und darauf abgestimmte Bildungs- und Fördermöglichkeiten anhand eingängiger und reich bebilderter Beispiele vorgestellt. Dabei nimmt das Buch den Alltag in den Einrichtungen in den Blick und greift vielfältige und leicht herstellbare Situationen auf, in denen geometrische Formen und Maßeinheiten untersucht und mathematische Strukturen und Regelhaftigkeiten anschaulich erlebbar werden. Durch eine solche Einbindung in alltägliche Abläufe erfahren Kinder, wie hilfreich ihnen die Mathematik zum Verständnis ihrer Lebenswelt sein kann, so dass sie sich gewappnet den schulischen Anforderungen stellen können.

Münster, Freiburg und Heidelberg

Manfred Holodynski, Dorothee Gutknecht und Hermann Schöler

Inhalt

1 Eine kurze fragende Einleitung

Es scheint, als setze mathematisches Lernen erst in der Grundschule ein und seine Störung sei erst dann erkennbar. Dass dem keineswegs so ist, sondern dass der Umgang mit Zahlen, Formen, Mustern und Größen wie Längen, Gewichten und Zeiten das sehr junge Kind schon begleitet, es fasziniert und beschäftigt, ist zentrale Einsicht und Ausgangspunkt des pädagogischen Bemühens im Elementarbereich.

Trotzdem erhebt sich die Frage: Gibt es so etwas wie mathematische Begabung, angeboren gar, welche die einen auf hohe abstrakte Gedanken in der Ideenwelt der Zahlen und Formeln führt, während die anderen in den Niederungen des alltäglichen Umgangs mit schlichtesten Rechnungen bereits versagen? Kennen wir sie nicht beide aus der eigenen Schulzeit, jenen bebrillten Nachdenker über komplexe Zeichengebilde und unverständliche Symbolketten, der sich aber in sozialen Situationen an die Wand drückt, vermeidend den Blick senkt und das Wort „Genuss" aus seinem Vokabular gestrichen hat, während der andere Sitznachbar in rhetorisch brillanter Weise über die Dramen der Antike und die französische Lyrik des 19. Jahrhundert zu parlieren weiß, aber Mathe und Naturwissenschaften als Geheimwissenschaften für Autisten abtut?

Ist Mathematik eine esoterische Geheimwissenschaft?

Ist also die Fähigkeit und Unfähigkeit für einen Wissensbereich genetisch bedingt und unveränderbar für alle Zukunft in unseren Anlagen festgelegt? Dann würden wohl auch frühe Fördermaßnahmen die gleichen unzureichenden Erfolge zeitigen wie die meist vergeblichen Nachhilfebemühungen beim Satz des Pythagoras, wie Generationen von Neuntklässlern bestätigen können.

Oder entwickelt sich im Schulalter erst jene Bereitschaft für Zahlen und Formen, denen die einen ihr Interesse zuwenden, die anderen hingegen faszinierenden Tätigkeiten ihre Aufmerksamkeit schenken, sodass sich notgedrungen eine Spaltung zwischen den Mathematikern und Nichtmathematikern ergibt? Wären also die Unterschiede, die uns tagtäglich begegnen, ein Produkt der Schule oder der verschiedenen Interessenlage?

Eins scheint zumindest deutlich: Es gibt Unterschiede zwischen Kindern, welche wir als mathematische Fähigkeiten klassifizieren, aber woher sie rühren, bleibt noch unklar.

Und wenn wir von Mathematik reden, dann schwebt uns in der Vorstellung jener symbolisch-verquaste esoterische Raum vor, durch dessen Tür nur einige Auserwählte spazieren dürfen, während sie den anderen verschlossen bleibt. Und kleine Kinder haben dort überhaupt keinen Platz.

So kommt es uns vor, seien wir ehrlich. Aber natürlich hat dies mit der Wirklichkeit und insbesondere jener des Kindes wenig zu tun. Wir erleben jeden Tag Kinder, die sich unvoreingenommen den Zahlen und Formen nähern, diese untersuchen und eigene Hypothesen bilden. Sie ordnen Dinge des Alltags, bilden Muster und suchen nach Strukturen. Auch dies sind mathematische Tätigkeiten, auch wenn viele Menschen Mathematik enger sehen.

Dieses Buch handelt von dem erkenntnisreichen Weg, den Kinder im Vor- und Grundschulalter beschreiten, und den Bemühungen, ihre Kenntnisse über den reichhaltigen Schatz mathematischer Ideen ständig auszuweiten. Es wird davon ausgegangen, dass Kinder nicht nur „aus sich selbst heraus“ die Mathematik (oder irgendwelche anderen Ideen der Erwachsenenwelt) neu erfinden, sondern dass ihnen dies in Auseinandersetzung und in Begleitung von eben diesen Erwachsenen gelingt. Und somit wächst den Eltern, den pädagogischen Fachkräften in den Kindertagesstätten und den Lehrkräften in der Grundschule eine besondere Aufgabe zu.

Das Buch möchte sie hierbei unterstützen, indem es ihre Kenntnisse über die kindlichen Lernfortschritte erweitert, ihnen Beispiele an die Hand gibt, die Kinder zu unterstützen, und Materialien und Programme vorstellt, die im Alltag einsetzbar sind. Vor allem möchte es aber zwei Ziele erreichen:

1. dass auch Erwachsene in vielen Alltagssituationen die Reichhaltigkeit mathematischer Ideen erstaunt zur Kenntnis nehmen und ihre Kinder auf diesem Weg begleiten,
2. dass die Erwachsenen ein wohlwollendes, aber genaues Auge auf die Prozesse lenken, welche die Kinder durchlaufen, ihre Entwicklungen mit Fortschritten und Stagnationen, ohne sie sofort (wenngleich durchaus gut gemeint) mit Förderprojekten zu überfallen.

Das Buch beschreibt die Phasen der mathematischen Begriffsentwicklung im Alter von 0–10 Jahren, die vom Kind selbst entwickelten Einsichten in Zusammenhänge, den allmählichen Aufbau von Strukturen, den auch notwendigen Irrwegen und plötzlichen Aha-Erlebnissen des Kindes auf dem Weg zur Mathematik. Hierbei wird besonderer Wert auf die Beschreibung jener kognitiver Faktoren gelegt, die für das Verständnis mathematischer Zusammenhänge notwendig sind und deren Entwicklungsverzögerung zu Beeinträchtigungen des Lernprozesses führen. Die pränummerischen Fertigkeiten und Vorläuferfähigkeiten der Kinder und die darauf bezogenen verschiedenen diagnostischen Möglichkeiten in den jeweiligen Alterstufen werden beschrieben, ebenso die daraus abgeleiteten Fördermöglichkeiten. Betont wird die Wichtigkeit der sehr frühen Diagnose, nicht im Sinne von Testungen, sondern begleitender Beobachtung der kindlichen Entwicklung in den sensiblen Phasen.

Das Buch zentriert sich auf den Alltag in den Kindertagesstätten und der Grundschule, die Einbindung mathematischer Aktivitäten in den täglichen Ablauf. Es beschreibt Situationen, die von den Erzieherinnen und Lehrerinnen leicht hergestellt werden können und in denen Strukturen und Regelhaftigkeiten erlebbar sind, in denen Zahlzusammenhänge und Maße von den Kindern entwickelt und geometrische Formen untersucht werden. Damit wird Mathematik von den Kindern als eine wichtige Perspektive ihres Lebens erkannt, sodass Lernschwierigkeiten im Schulalltag vermieden werden.

Das Buch ist als Beispielsammlung gemeint, auch wenn es viele theoretische Diskurse durchziehen. Diese erscheinen notwendig, um die Besonderheiten kindlicher Entwicklung im Land der mathematischen Ideen zu verstehen.

Und das Buch sollte Ihnen Spaß bereiten und Sie auf die Beobachtung der Kinder und ihrer (und Ihrer) Mathematik freuen lassen.

2 Die Entwicklung mathematischer Basiskompetenzen im Alter von 0–3 Jahren

2.1 Gibt es vorsprachliche mathematische Fähigkeiten?

Ein Neugeborenes ist ein Anblick der Wonne, aber ihm mathematische Fähigkeiten unterstellen zu wollen doch eher vermessen. Aber dann erhebt sich die Frage, wann die mathematische Entwicklung beginnt, denn sie startet nicht erst in der Grundschule. Schon lange vorher benutzen Kinder Zahlen und malen Formen.

Dies würde bedeuten, dass erst mit oder nach dem Spracherwerb, also im Alter von zweieinhalb bis drei Jahren überhaupt ein Begriff von Zahlen möglich ist. Und selbst dann, handelt es sich tatsächlich um einen Zahlbegriff? Der Entwicklungspsychologe Jean Piaget hätte dies verneint. Umso überraschter ist man angesichts eindrucksvoller Studien, welche belegen, dass Kinder sehr früh bereits Mengenanzahlen wahrnehmen und unterscheiden können.

2.2 Frühe, vorsprachliche mathematische Fähigkeiten?

2.2.1 Mengenwahrnehmung

Einfallsreiche Untersuchungen an sehr jungen Kleinkindern scheinen zu zeigen, dass eine gewisse mathematische Kompetenz angeboren ist. So können Säuglinge bereits im ersten Lebensjahr, ja sogar in den ersten Lebenswochen, Anzahlen unterschiedlicher Größe unterscheiden.

Diese Untersuchungen sind einfallsreich konzipiert, denn man kann ja die Kinder nicht fragen, wie viele Puppen sie hinter dem Vorhang vermuten. Es handelt sich um „Habituationsexperimente", in denen man sich die Neugier der Säuglinge zu eigen macht: Offensichtlich möchten Kinder Neues sehen und aufnehmen, Altes und Vertrautes wird bei zunehmender Darbietungsdauer als langweilig erlebt, sodass sich die Aufmerksamkeit auf etwas anderes lenkt, die Augen schweifen ab und suchen neue Information.

Zeigt man den Kindern Bilder mit jeweils zwei Gegenständen, dann erlahmt ihre Aufmerksamkeit mit der Zeit, auch wenn es sich jeweils um verschiedene Gegenstände handelt (Sophian, 2008; Wynn, 1998). Tritt dann ein Bild mit drei (oder nur einem) Gegenstand in ihr Blickfeld, dann springt ihre Aufmerksamkeit wieder an.

Es stellt sich die Frage, ob es sich um eine Fähigkeit der Säuglinge handelt, die Anzahl konkreter Objekte eines bestimmten Typs und einer festen, gleichen Ausdehnung zu erkennen, und dies natürlich nur für kleine Zahlen. Dem scheint aber nicht so zu sein. Bereits Säuglinge zeigen die Fähigkeit, Anzahlen auch dann zu unterscheiden bzw. als gleich zu erkennen, wenn die Mengen in Lage und Dichtheit unterschiedlich dargeboten wurden. Antell und Keating (1983) zeigten Säuglingen Karten mit unterschiedlicher oder gleicher Punktanzahl und variabler Ausdehnung bzw. Punktdichte. Die Befunde verdeutlichen, dass Säuglinge

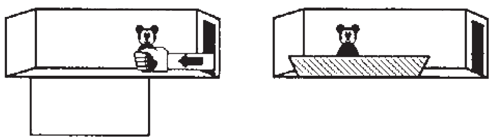
Studie

Mengenwahrnehmung von Säuglingen

Kinder können erkennen, dass eine Menge von Puppen, z. B. zwei, die ihnen gezeigt wird und hinter einem Vorhang verschwindet, nicht mit einer anderen, die vier Puppen enthält und hinter dem Vorhang hervortritt, übereinstimmt (Wynn, 1990, 1992a, 1992b, 1995).

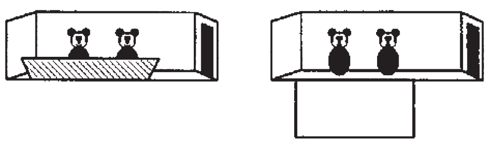
In Abb. 1 sehen die Kinder eine Puppe, die hinter einem Vorhang bzw. einer Abdeckung verschwindet. Für sie sichtbar wird nun eine weitere Puppe hinter dem Vorhang versteckt. Verschwindet nun die Abdeckung, und es erscheinen zwei Puppen, dann wenden die Kinder sich anderen Dingen zu, denn die Überraschung ist gering: Sie hatten ja zwei Puppen erwartet. Ebenso ist die Überraschung gering, wenn wie in Abbildung 2 erst zwei Puppen auf die Bühne gestellt werden, sich anschließend die Abdeckung senkt und eine Puppe sichtbar hinter dem Vorhang vorgeholt wird. Geht der Vorhang wieder hoch, und es erscheint nur eine Puppe, dann war dies erwartet worden. Erscheinen hingegen wieder, und damit erwartungswidrig, zwei Puppen, dann ist die Überraschung groß und es wird länger (und ungläubiger?) hingeschaut.

1 + 1 = 2

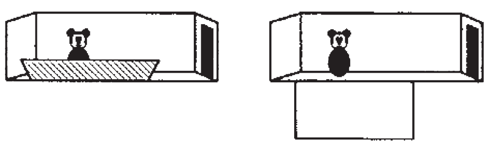


Puppe wird sichtbar aufgestellt und ein Schirm hochgeklappt.

Eine zweite Puppe wird sichtbar hinter den Schirm geschoben.



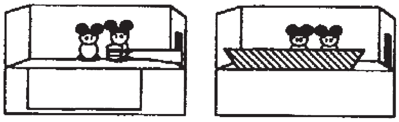
Richtiges Ergebnis: Der Schirm wird herunter geklappt und zwei Puppen erscheinen.



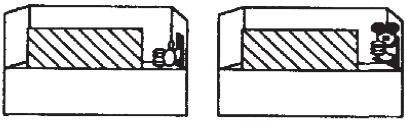
Unmögliches Ergebnis: Der Schirm klappt herunter und nur eine Puppe erscheint.

Abbildung 1: Mögliches und unmögliches Ergebnis einer verdeckten Handlung bei 1 + 1 = 2, die von Säuglingen erkannt wird (Bilder aus Wynn, 1992a)

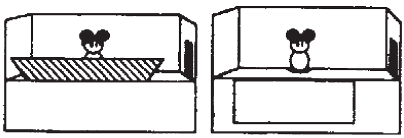
2 − 1 = 2



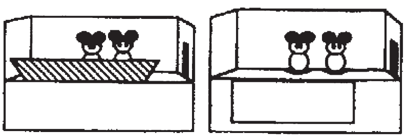
Zwei Puppen werden sichtbar aufgestellt und ein Schirm hochgeklappt.



Eine Puppe wird sichtbar entnommen.



Richtiges Ergebnis: Der Schirm wird herunter geklappt und nur eine Puppe erscheint.



Unmögliches Ergebnis: Der Schirm klappt herunter und zwei Puppen erscheinen.

Abbildung 2: Mögliches und unmögliches Ergebnis einer verdeckten Handlung bei 2 − 1 = 1, die von Säuglingen erkannt wird (Bilder aus Wynn, 1992a)

über die Fähigkeit verfügen, Anzahlen zu unterscheiden, indem sie die Anzahl der vorangehenden Darbietungen abstrahieren und intern repräsentieren und so die unterschiedliche Anzahl der neuen Darbietung erkennen. Dies würde bedeuten, dass Kinder schon in sehr frühem Alter über bild-schematische Repräsentationen verfügen (was der Piagetschen Annahme widerspricht).

Natürlich können Kinder bereits sehr früh Farben, Größen und Formen unterscheiden und erkennen. In Nachfolgeuntersuchungen konnte gezeigt werden, dass die Kinder aber nicht (nur) auf diese Objekteigenschaften reagieren, sondern ebenso auf die Mächtigkeit der dargebotenen Menge, also ihre Anzahl, auch wenn Farbe und Formen ebenfalls variierten (Starkey, Gelman & Spelke, 1985). Dies heißt, dass bereits Säuglinge ihre Wahrnehmung auf numerische Veränderungen lenken können und gleichzeitig andere, durchaus interessante Wahrnehmungsinhalte ignorieren.

Studie

Wahrnehmung von Häufigkeiten bei Säuglingen

Wynn (1996) ließ in einem Versuch eine Puppe vor den Augen der Säuglinge hüpfen, zweimal oder dreimal. Wenn sich die Anzahl der Sprünge wiederholte, die z. B. Puppen immer zweimal hüpften, dann erlahmte das Interesse der Säuglinge schnell. Kam hingegen (unerwartet) eine dreimal hüpfende Puppe, dann schnellte die Aufmerksamkeit wieder nach oben.

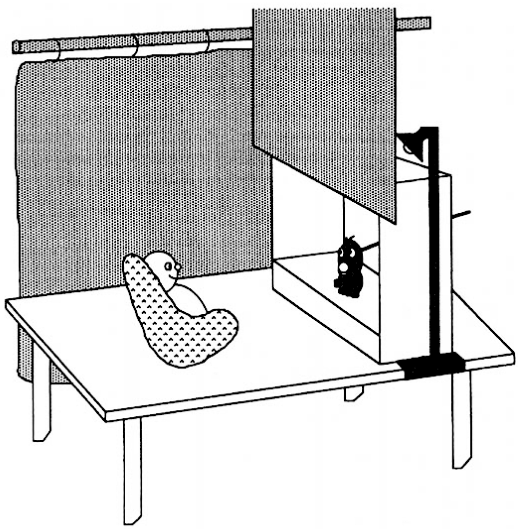


Abbildung 3: Versuchsanordnung mit der „springenden Puppe" zur Erfassung der Wahrnehmung von Häufigkeiten bei Säuglingen (aus Wynn, 1996)

Anzahlen zu unterscheiden, gelingt bereits sechs bis acht Monate alten Säuglingen. Sie können aber darüber hinaus auch Gleichmächtigkeitsbeziehungen zwischen einer Menge visuell dargebotener und einer Menge auditiv dargebotener Items herstellen. Sie stellen also intermodale Beziehungen zwischen Anzahlen her (Starkey et al., 1985; Starkey, Spelke & Gelman, 1990; Moore, Benenson, Reznick, Peterson & Kagan, 1987), d. h. zwischen Reizen, die unterschiedliche Sinnesmodalitäten ansprechen. Sie beachten also mit wachsender Aufmerksamkeit, ob die Anzahl einer Menge gleichbleibt oder sich ändert. Und bereits im

Alter von zwölf Monaten sind sie in der Lage, Mengen nach der Anzahlgröße zu ordnen und erwartungswidrige Anzahlveränderungen in einer Objektmenge zu erkennen (Cooper, 1984; Sophian & Adams, 1987).

Es scheint also, dass Säuglinge ein Konzept der Einheit (im Sinne der Zähleinheit) bilden können. Resnick (1989, 1992) spricht bei der frühen mathematikbezogenen Leistung der Säuglinge von der Entwicklung vorsprachlicher, so genannter „protoquantitativer" Schemata mit dem „Zunahme-Abnahme-Schema" und dem „Teil-Ganzes-Schema".

Kleinkinder erfassen auf der Grundlage solcher Schemata rein wahrnehmungsgestützt und vor der Verfügbarkeit sprachlicher Begriffe das Prinzip des Mehr- und Wenigerwerdens bzw. des Zerteilens und des Zusammenfügens (v. Aster, 1994; v. Aster & Goebel, 1990).

Fasst man die Ergebnisse zusammen, dann bedeutet dies, dass die relativ späte Zahlbegriffskompetenz, die Piaget den Kindern in ihrer Entwicklung zuschreibt, in dieser Form nicht stimmen kann.

2.2.2 Subitizing

Die frühe Fähigkeit der Kinder, Anzahlen festzustellen, könnte auch mit der Fähigkeit zum „Subitizing" zusammenhängen, jener Fähigkeit, kleine Anzahlen bis 5 quasi überblickend zu erfassen und auf Abzählen verzichten zu können (von lat. „subito": plötzlich, sofort). Auch dies könnte auf einem Aufzählungsprozess (Enumerationsprozess) beruhen (Mandler & Shebo, 1982; Gallistel & Gelman, 1992), es könnte sich aber auch um einen reinen Wahrnehmungsakt handeln (Glasersfeld, 1982; Mack, 2002). Für die weitere Entwicklung ist dies insofern von Bedeutung, als die Aussage „Fünf" dann von Kindern lediglich verwendet wird wie die Bezeichnung eines Objekts („Auto").

Beispiel

Die „Fünf" als Wahrnehmungsobjekt (Würfelbild)

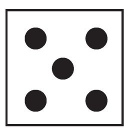


Abbildung 3.1: Würfelbild

Allerdings, so wird eingewendet, könnte man dies lediglich für die Anzahl „Fünf" auf dem Würfel verwenden, da dort die Punktanordnung immer in der gleichen Weise erfolgt (Lorenz, 1993). Aber die Anzahl „Fünf" ist nicht in gleicher Weise wahrnehmbar wie „Blau". Die Anzahl ist etwas, das der menschliche Geist der Umgebung bzw. den Wahrnehmungsinhalten aufdrückt. Werden spezifische räumliche Anordnungen wie auf dem Würfel nicht verwendet, dann ist ein Anzahlbestimmungsprozess notwendig (Karmiloff-Smith, 1996). Die kindliche Verwendung des „Subitizing" ist also zahlenrelevant (Gelman & Meck, 1986).

Die vorliegenden Befunde scheinen daraufhin zu deuten, dass Kinder bereits im frühen Alter numerische Beziehungen durch eine Eins-zu-Eins-Zuordnung erstellen und gleichzeitig andere, durchaus interessante Eigenschaften wie Farbe, Größe, Form und Orientierung vernachlässigen können. Es spielt dabei keine Rolle, um welche Art von Stimuli es sich handelt, ob die Darbietung visuell, auditiv oder taktil ist, unter welchem Winkel die Objekte betrachtet werden, welche Lichtintensität herrscht etc., sondern wesentlich ist lediglich die numerische Veränderung.

Ist mathematisches Denken genetisch bedingt? Dies scheint ja zu bedeuten, dass Kleinstkinder bereits „zählen" können, zumindest eine angeborene Fähigkeit besitzen, Mengen in geringer Größe „abzuzählen". Und dies natürlich zu einem Zeitpunkt, in dem die sprachliche Fähigkeit nicht entwickelt ist. Damit scheint gezeigt, dass mathematische Begriffe bereits vorsprachlich vorhanden und nicht an die Sprachkompetenz gekoppelt sind.

Aber ist dem wirklich so? Das hier beschriebene und häufig replizierte Phänomen, das sog. „subitizing" von Kleinkindern würde man gerne als frühe mathematische Kompetenz interpretieren, aber leider ist dem nicht so. Detaillierte Untersuchungen an Säuglingen zeigen zwar diesen Effekt, aber dies ist eher ein Wahrnehmungsvorgang, eine frühe Fähigkeit, die Umwelt zu repräsentieren (über die übrigens alle Organismen verfügen) und vergangene mit aktueller Information zu vergleichen (Mack, 2002).

Das „subitizing" stellt somit ein Fähigkeit dar, Anzahlen bis vier (fünf) schnell und fehlerarm mit Hilfe des visuellen Systems zu erfassen, nicht aber die Fähigkeit zu zählen im Sinne eines hochroutinisierten Anwendens von Abzählfertigkeiten. Es ist demnach *keine* vorsprachliche (prä-)-mathematische Fähigkeit, sodass die Interpretation, mathematische und sprachliche Entwicklung verliefe unabhängig von einander, nicht hieraus abgeleitet werden kann.

Zwar ist eine grundlegende Voraussetzung der (sich entwickelnden) Zählkompetenz sicherlich die Fähigkeit, zählbare Einheiten bilden und indizieren zu können. Allerdings werden diese Einheiten nicht gebildet, um zu zählen, sondern um dem Organismus den Aufbau einer Umgebungsrepräsentation und damit adaptives Verhalten zu ermöglichen. Die Analyse von Umgebungseinheiten wird fortlaufend mit vorausgegangenen verglichen und bei Fehlanalysen finden Re-Analysen und Re-Synthesen statt. Hierauf bauen komplexere psychische Strukturen wie das Gedächtnis auf.

> *„Die Segmentations- und Bindungsprozesse der Wahrnehmung sind Instanzen solcher Analyse-durch-Synthese-Prozesse, die zur Bildung von Objekt- und Ereignisprimitiven führen, aus denen Objekte, Szenen, Rhythmen, Melodien und Sprechmuster hergestellt werden. Die Experimente zum Phänomen Subitizing bestätigen die Auffassung, dass Subitizing nicht als Zählen im Sinne der hochroutinisierten Anwendung von Abzählfertigkeiten zu interpretieren ist. Das die Numerositäten von bis zu 4 Elementen sehr schnell und fehlerarm erfasst werden können, lässt sich nur als Vorgang der frühen Merkmalsanalyse im visuellen System erklären. … Zusammengefasst lässt sich sagen, dass Subitizing ein eigenständiger Prozess ist, der sich als Resultat von Segmentations- und Bindungsprozessen*

in frühen Phasen der visuellen Informationsverarbeitung ergibt. Daher ist Subitizing nicht als Ausdruck numerischer Kompetenz zu interpretieren“ (Mack, 2002, S. 180f.).

Nichtsdestoweniger bleibt Subitizing aber eine Vorläuferfähigkeit, auf der spätere Zählkompetenzen aufbauen.

2.3 Zusammenfassung

Es scheint, dass Säuglinge bereits über die Fähigkeit verfügen, Anzahlen von Mengen wahrzunehmen, und entscheiden können, ob zwei Mengen die gleiche Anzahl haben oder nicht. Dies bezieht sich auf sehr kleine Zahlenräume, ca. 1–5 (maximal). Aber nicht nur das. Sie können auch feststellen, ob eine Anzahl von Tönen und eine Anzahl von Punkten gleich ist (intermodaler Vergleich). Die Vermutung liegt nahe, dass es ein angeborenes Modul im Gehirn gibt, das (An-) Zahlen verarbeitet.

Es ist aber wahrscheinlicher, dass es sich um eine Fähigkeit handelt, kleine Mengen (welcher Art auch immer) schnell, „mit einem Blick“ zu überschauen und zu beurteilen. Dies wäre auch evolutionsmäßig günstig: Ist die Menge der Angreifer groß, um mich zu bedrohen, oder nicht? Muss ich bzw. müssen wir fliehen oder können wir uns verteidigen? Solche Entscheidungen mussten schnell getroffen werden.

Die Ausführungen in diesem Kapitel bedeuten nun nicht, dass Kinder bereits im frühen Alter alles über Zahlen wüssten oder auch nur bestimmte Prinzipien verstehen. Auch die (intermodale) Eins-zu-Eins-Zuordnung in der beschriebenen Form setzt nicht voraus, dass das Kind „weiß“, was „drei“ bedeutet, oder die Bezeichnung „+1“ versteht. Es handelt sich lediglich um die kognitive Basis, auf der anschließendes Lernen aufbaut. Es ist aber noch ein breites Wissen anzueignen. Die Frage, die sich stellt, ist, in welcher Form dieses vorschulische Lernen stattfindet.

Und insbesondere: In welcher Form ist die Entwicklung der mathematischen Fähigkeiten an die Sprachentwicklung gekoppelt?

Die Sprachentwicklung setzt bereits vor dem Ende des dritten Lebensjahres ein und gehörte daher mit in dieses Kapitel. Aber da sie weiter verläuft, werden wir dieses Problem im folgenden Kapitel tiefer erörtern, das sich mit dem Verlauf mathematischer Kompetenzen im Alter von drei bis sechs Jahren befasst.

2.4 Weiterführende Literatur

Eine Zusammenfassung und weiterführende Interpretation findet sich bei:

Krajewski, K. (2003). *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule*. Hamburg: Kovač. (hierbei insbesondere Kap. 3.2.2)

Mack, W. (2002). *Die Wahrnehmung kleiner Anzahlen und die Entwicklung des Zahlenverständnisses beim Kleinkind*. Frankfurt: Habilitationsschrift an der Fakultät für Psychologie.

Die erste Arbeit ist eine Dissertation, die zweite eine Habililtationsschrift, insofern sind beide sehr detail- und theoriereich. Diese Charakterisierung sollte aber keineswegs abschrecken, beide Arbeiten sind sehr lesenswert.

Im Folgenden noch Literatur zu den Experimenten mit Säuglingen:

Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition*, *36*, 155–193.
Starkey, P., Gelman, R. & Spelke, E.S. (1985). Response to Davis, Albert & Baron's detection of number or numerousness by human infants. *Science*, *228*, 1222–1223.
Starkey, P., Spelke, E.S. & Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition*, *36*, 97–127.

3 Weiterentwicklung mathematischer Basiskompetenzen im Alter von 3–6 Jahren

3.1 Das Verhältnis Sprache – Mathematik

Die Funktion der Sprache ist für jedes Lernen unbestritten, zu wichtig ist ihr Beitrag für das Denken und die Kommunikation mit anderen. Nun ist es aber eines, die Bedeutung der Sprache zu benennen, und ein anderes, ihren spezifischen Einfluss auf etwas sehr Spezielles, nämlich das Lernen und Verstehen von Mathematik zu beschreiben. Wie wirkt Sprache, oder genauer, wie wirken sich Störungen der Sprachrezeption (und -produktion) auf den Lernprozess aus? Besteht möglicherweise kein oder nur ein unbedeutender Zusammenhang, weil ja Sprache allgegenwärtig (ubiquitär) eingesetzt wird, also auch in den Eingangsklassen der Grundschule? Ist nicht vielleicht Mathematik etwas ganz anderes, das sprachfrei sich lediglich mit (für viele merkwürdigen) Zeichen befasst?

In Mathematik begabt, in Sprachen unbegabt, und umgekehrt. Stimmt das? Der Zusammenhang zwischen Mathematik und der Sprachrezeption, deren Störungen auch das Lernen arithmetischer Inhalte in den Eingangsklassen beeinträchtigen, muss demnach genauer beschrieben werden. Es lohnt sich, die beiden Lernstränge in ihrer Entwicklung zu betrachten.

> *Beispiel*
> Jeder kennt sie aus der eigenen Schulzeit: die Klassenkameraden, die in den sprachlichen Fächern brillierten, in Mathematik aber mehr als schlecht abschnitten. Jeder kennt natürlich auch umgekehrt jene bedauernswerten Zeitgenossen, die in abstrakten mathematischen Modellen sich ergehen konnten, aber unfähig schienen, einen grammatikalisch korrekten Satz über die Lippen zu bringen, von gehobenen Formulierungskünsten ganz abgesehen. Sprache und Mathematik, so lehrte die Schulzeit, sind unüberbrückbare Gegensätze, Antagonisten wie Feuer und Wasser.

Nun wird Sprache geadelt durch ihre universelle kommunikative Funktion. Alle Menschen verständigen sich mit den Mitteln der Sprache. Dies kann man von der Mathematik gerade nicht behaupten, sie wirkt mit ihren Formeln antikommunikativ, ja unsozial, bestenfalls wird sie als Geheimsprache geachtet. Gesprochen hingegen wird überall, auch in der Schule und sogar im Mathematikunterricht. Die Funktion der Sprache ist für jedes Lernen unbestritten, zu wichtig ist ihr Beitrag für das Denken und die Kommunikation mit anderen (für viele Beispiele s. Krauthausen, 2007).

Nun ist es aber eines, die allgemeine Bedeutung der Sprache zu benennen, und ein anderes, ihren spezifischen Einfluss auf etwas sehr Enges, nämlich das Lernen und Verstehen von Mathematik zu beschreiben. Wie wirkt Sprache, oder genauer, wie wirken sich Störungen der Sprachrezeption (und -produktion) auf diesen Lernprozess aus? Besteht möglicherweise kein oder nur ein unbedeuten-