



Herbert Jahn, Ralf Reulke

Systemtheoretische
Grundlagen
optoelektronischer
Sensoren



WILEY-
VCH

WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA

Aus technischen Gründen bleibt diese Seite leer

Herbert Jahn,
Ralf Reulke

Systemtheoretische Grundlagen
optoelektronischer Sensoren

Aus technischen Gründen bleibt diese Seite leer

Herbert Jahn, Ralf Reulke

Systemtheoretische
Grundlagen
optoelektronischer
Sensoren



WILEY-
VCH

WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA

Prof. Dr. Herbert Jahn und Dr. Ralf Reulke

Institut für Weltraumsensorik, Berlin, der Deutschen Forschungsanstalt
für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR)

Alle Bücher von Wiley-VCH werden sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren, Herausgeber und Verlag in keinem Fall, einschließlich des vorliegenden Werkes, für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler irgendeine Haftung.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 1995 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

Alle Rechte, insbesondere die der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Kein Teil dieses Buches darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form – durch Photokopie, Mikroverfilmung oder irgendein anderes Verfahren – reproduziert oder in eine von Maschinen, insbesondere von Datenverarbeitungsmaschinen, verwendbare Sprache übertragen oder übersetzt werden. Die Wiedergabe von Warenbezeichnungen, Handelsnamen oder sonstigen Kennzeichen in diesem Buch berechtigt nicht zu der Annahme, dass diese von jedermann frei benutzt werden dürfen. Vielmehr kann es sich auch dann um eingetragene Warenzeichen oder sonstige gesetzlich geschützte Kennzeichen handeln, wenn sie nicht eigens als solche markiert sind.

ISBN 978-3-527-40012-6

VORWORT

Das Ziel dieses Buches ist eine *vereinheitlichende* Darstellung der Grundlagen der Signalverarbeitung in optoelektronischen Sensorsystemen. Die Vielzahl der Arbeiten auf diesem multidisziplinären Gebiet mit ihren von Disziplin zu Disziplin unterschiedlichen Formulierungen und Bezeichnungen hat zu Schwierigkeiten im gegenseitigen Verständnis und zu Mehrfachentwicklungen geführt. Durch die konsequente Nutzung des Instrumentariums der *Systemtheorie* (und der Theorie der Zufallsgrößen und Zufallsprozesse) kann dieser Zustand überwunden und dem Wissenschaftler und Ingenieur ein leistungsfähiges Werkzeug für die Konzipierung und Entwicklung optoelektronischer Systeme in die Hand gegeben werden.

Bei der langjährigen Tätigkeit der Autoren auf dem Gebiet der Entwicklung optoelektronischer Sensoren für den Einsatz in Weltraumforschung und Erderkundung hat sich das *System* im Sinne der Systemtheorie als zentraler Begriff als besonders nützlich erwiesen. Zur Lösung spezieller wissenschaftlicher Probleme mit Hilfe optoelektronischer Sensoren ist es zweckmäßig, den Sensor zusammen mit seiner signalwandelnden Umgebung (planetare Oberflächen, Atmosphäre) als *Gesamt-System* aufzufassen und einheitlich zu beschreiben. Man kommt dabei zu einem *Gesamt-Modell* des signalwandelnden Prozesses, auf dessen Basis man, z.B. mit Hilfe der Schätz- und Entscheidungstheorie, mehr oder weniger optimale Algorithmen zur Verarbeitung der Daten ableiten und damit (unter Berücksichtigung technologischer und finanzieller Randbedingungen) zum bestmöglichen wissenschaftlichen Ergebnis kommen kann. Sieht man die, im Sinne gewisser Kriterien, bestmögliche Lösung der wissenschaftlichen Aufgabe als ultimatives Gütekriterium für das optoelektronische System an, dann kann man durch Minimierung von Schätz- oder Entscheidungsfehlern der zu bestimmenden Größen (wieder unter Beachtung technologischer und finanzieller Randbedingungen) Parameter oder sogar die Konfiguration des optoelektronischen Systems in optimaler Weise wählen. Es existiert somit ein geschlossener Kreis, der von der wissenschaftlichen Aufgabenstellung über die Konzipierung des Sensors und des Auswerteverfahrens zur bestmöglichen Lösung der gestellten Aufgabe führt. Die durchgängige modellmäßige Formulierung der einzelnen Komponenten des Gesamtsystems ermöglicht die *Systemoptimierung* in diesem Sinne.

Eine Komponente als System im Sinne der Systemtheorie vermittelt den Zusammenhang zwischen Eingangssignal und Ausgangssignal. Dieser Zusammenhang kann deterministisch, aber auch stochastisch sein, wenn Zufallsprozesse (Rauschen) eine Rolle spielen. Zufallsprozesse als Modelle realer physikalischer Prozesse, aber auch zur Beschreibung vorhandener Unkenntnis, bestimmen oft die Grenzen der Meßgenauigkeit optoelektronischer (und auch anderer) Systeme und sind bei vielen Meß- und Verarbeitungsproblemen zu berücksichtigen. Aus diesem Grunde wird neben der Behandlung determinierter linearer (und in geringerem Maße auch nichtlinearer) Systeme besonderer Wert auf die Beschreibung von Zufallsgrößen und -prozessen

sen als system-mitbestimmende Größen gelegt.

Die in diesem Buch zu behandelnden optischen und elektronischen Komponenten als wesentliche Teile der erwähnten optoelektronischen Gesamtsysteme können nur in idealisierter Weise in Form geschlossener (determinierter oder stochastischer) mathematischer Zusammenhänge formuliert werden. Wenn die Darstellung dieser Art von Input-Output-Beziehungen auch den Hauptteil dieses Buches einnimmt, so darf doch nicht verschwiegen werden, daß bei den immer komplizierter und komplexer werdenden Systemen der Signalverarbeitung (insbesondere, wenn man es mit der Verarbeitung bildhafter Information zu tun hat) Modelle dieser Art in reiner Form immer seltener zur Anwendung gelangen. Selbst wenn die Input-Output-Relation eines Teilsystems physikalisch klar ist und mathematisch in geschlossener Form formuliert werden kann, dann ist wegen der oft riesigen Anzahl der Inputgrößen (z.B. aller beteiligten Lichtstrahlbündel) die Auswertung derartiger Zusammenhänge nur durch *Simulation* auf dem Computer möglich. Dies gilt vor allem auch dann, wenn wesentliche Berechnungen nur in iterativer oder rekursiver Form möglich sind. Der Simulation kommt deshalb bei der Konzipierung optoelektronischer Systeme, sowie der Einschätzung ihrer Güte (hinsichtlich der zu lösenden wissenschaftlichen Aufgabe) wachsende Bedeutung zu. Es wird deshalb in diesem Buch Wert darauf gelegt, Möglichkeiten zur Simulation der formulierten Zusammenhänge aufzuzeigen und an einem Beispiel, der Erzeugung von Bilddaten des im Institut für Weltraumsensorik der DLR entwickelten und gebauten Stereosensors WAOSS, zu demonstrieren.

Zur Umsetzung des umrissenen inhaltlichen Konzeptes werden im Kapitel I zunächst einige signal- und systemtheoretische Grundlagen ein- und mehrdimensionaler Systeme behandelt. Impulsantwort und Frequenzgang, Punktverschmierungsfunktion und (optische) Transferfunktion werden zusammen mit der diese Größen in Beziehung setzenden Fouriertransformation sowohl für kontinuierliche, als auch für diskrete Systeme behandelt. Dynamische Zustandsmodelle und Funktionen mit finitem Spektrum zusammen mit Zufallsprozessen und Zufallsfeldern dienen als geeignete Modelle für Signale in optoelektronischen Systemen.

Kapitel II ist dann der systemtheoretischen Beschreibung optischer Komponenten gewidmet. Wesentlich ist hier die systemtheoretische Formulierung der optischen Abbildung, die einen zentralen Platz bei der Signalwandlung in optoelektronischen Sensoren einnimmt. In geringem Maße wird auf die optische Fouriertransformation als einen Spezialfall der optischen Abbildung eingegangen, und es werden einige wenige strahlungsphysikalische Größen bei ihrem Durchgang durch optische Komponenten behandelt.

In Kapitel II werden auch einige, auf der dargelegten Theorie beruhende, Verfahren zur Bestimmung von PSF und MTF in der Praxis angegeben. Am Beispiel der Stereokamera WAOSS und weiterer Fernerkundungssensoren wird die Brauchbarkeit dieser Verfahren durch Angabe konkreter, für die Bilddatenauswertung wichtiger, Ergebnisse demonstriert.

Die in Kapitel III zu behandelnden (Quanten-)Detektoren, die das Licht in elektrische Signale umwandeln, werden als weiterer entscheidender Bestandteil moderner optoelektronischer Sensoren im systemtheoretischen Sinne untersucht. Eine zentrale Rolle spielt hierbei insbesondere die mathematische Beschreibung wichtiger Rauschprozesse wie Photonenrauschen, thermisches Rauschen, $1/f$ -Rauschen usw.. Das letzte, aber nicht unwichtige, Teilsystem eines optoelektronischen Sensors ist das elektronische Signalverarbeitungssystem. Es werden die analogelektronischen Systemaspekte behandelt und schließlich der Analog-Digital-Wandler als trägheitsloses nichtlineares System untersucht.

Die digitale Weiterverarbeitung des Signals bis hin zum Endergebnis ist nicht Gegenstand dieser Abhandlung. Ihre Behandlung (zusammen mit der Systemoptimierung im Sinne des oben genannten geschlossenen Kreises) erfordert die ausführliche Behandlung moderner Signalver-

arbeitsverfahren und geht über den Rahmen dieses Buches hinaus. Es muß aber erwähnt werden, daß gerade das digitale Verarbeitungssystem als integraler Bestandteil eines optoelektronischen Sensors (intelligente Sensoren - smart sensors) zunehmend systembestimmend wird!

Der Schluß von Kapitel III und damit dieses Buches ist der Simulation optoelektronischer Systeme gewidmet. Am Beispiel der Stereokamera WAOSS wird gezeigt, welche Schritte hierzu zu verwirklichen sind und welche Ergebnisse (mit hohem praktischen Wert) man mit den Mitteln der modernen Rechentechnik erzielen kann.

Die Autoren danken Herrn Prof. Dieter Oertel für seine stetige Förderung der Arbeiten, die zu diesem Buch geführt haben, sowie allen Kollegen des ehemaligen Instituts für Kosmosforschung der Akademie der Wissenschaften der DDR bzw. des Instituts für Weltraumsensorik der Deutschen Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR), die durch ihre Arbeiten auf dem Gebiet der Entwicklung optoelektronischer Sensoren (indirekt) zum Entstehen dieses Buches beigetragen haben.

Herrn Dr. R. Schuster und Dr. R. Richter sei gedankt für MTF-Messungen und Bilddaten, sowie für die hilfreichen Diskussionen.

Frau Ch. Günther gebührt Dank für ihre Hilfe bei der Anfertigung des Manuskripts.

Berlin, im Januar 1995

Aus technischen Gründen bleibt diese Seite leer

Inhaltsverzeichnis

I	Signalmodelle	11
I.1	Einführende Bemerkungen	11
I.2	Signal- und systemtheoretische Grundlagen	12
I.2.1	Kontinuierliche lineare 1-D-Systeme	12
I.2.2	Diskrete lineare 1D-Systeme	24
I.2.3	Lineare Systeme mit mehreren Ein- und Ausgängen	40
I.2.4	Nichtlineare Systeme	41
I.2.5	Kontinuierliche lineare 2D-Systeme	42
I.2.6	Diskrete lineare 2D-Systeme	57
I.2.7	1D-Zustandsmodelle	62
I.2.8	2D-Zustandsmodelle	80
I.2.9	Zustandsmodelle und analytische Funktionen	84
I.3	Zufallsprozesse und Zufallsfelder	85
I.3.1	Zufallsgrößen und unbekannte feste Größen	85
I.3.2	Zufallsprozesse und Zufallsfolgen	106
I.3.3	Markow-Prozesse, Markow-Folgen und ARMA-Modelle	137
I.3.4	Zufallsfelder	153
I.4	Funktionen mit finitem Spektrum	163
I.4.1	1D-Funktionen	163
I.4.2	2D-Funktionen	183
II	Systemtheoretische Beschreibung der optischen Signalwandlung	193
II.1	Systemtheoretische Formulierung der optischen Abbildung	193
II.2	Verfahren zur Bestimmung der inkohärenten optischen Transferfunktion	208
1.	PSF-Messung aus der Untersuchung der Dämpfung bekannter räumlicher Signale	209
PSF - Messung an einem Infrarot-(IR-) Aufnahmesystem		210
LSF - Messung an WAOSS		214
Bestimmung der PSF aus der Kantenverschmierungsfunktion		220
OTF - Messungen mit periodischen Strukturen		225
2.	OTF-Messung aus dem Autokorrelationsintegral der Pupillenfunktion	226
3.	Die Messung des Quadrats der MTF aus dem Wienerspektrum	229

II.3	Optische Fouriertransformation	233
II.4	Transformation strahlungstheoretischer Größen bei der optischen Abbildung	238
III	Signalwandelnde Eigenschaften von Strahlungsdetektoren	245
III.1	Systemtheoretische Beschreibung von Detektoren	245
III.2	Rauschen in Strahlungsdetektoren	255
III.3	Analogelektronische Wandlung von Detektorsignalen	266
III.4	Simulation von Fernerkundungssystemen	278
	Optik , homogene Koordinaten und Ray Tracing	280
	Homogene Koordinaten	282
	Zusammengesetzte Abbildung	284
	Ray-Tracing und optische Abbildung	285
	Ray-Tracing im digitalen Höhenmodell	289
	Literatur	291
	Sachwortverzeichnis	295

Kapitel I

Signalmodelle

I.1 Einführende Bemerkungen

Optoelektronische Systeme sollen im folgenden als signalwandelnde Geräte aufgefaßt werden, die optische Signale (Strahldichten) zunächst in analoge elektrische Signale (Spannungen, Ströme) umwandeln und sie anschließend in digitalisierter Form als Computerdaten einer Auswertung zur Verfügung stellen.

Die interessierenden Größen (physikalischer, chemischer,... Natur), d.h. die Information, die aus diesen digitalen Daten extrahiert werden soll, ist in unterschiedlichen physikalischen Trägern verschlüsselt.

Der hier meist verwandte Begriff des Signals (oder besser des Signalmodells) abstrahiert von der physikalischen Natur der Informationsträger und ist als ihre (mathematische) Beschreibung aufzufassen.

Das Signal ist somit als Funktion einer oder mehrerer Variablen, die eine gewisse Information über andere Funktionen oder Parameter enthält, zu verstehen.

Hieraus folgt, daß es sich bei Signalen nicht um bereits bekannte Funktionen handelt, sondern um zunächst nicht genau bekannte Funktionen, die gewissen Klassen angehören.

Die Messung oder Beobachtung eines Signals bewirkt die Auswahl einer konkreten Funktion aus einer Funktionenklasse, und die zu bestimmenden Größen ergeben sich durch eine gewisse Kombination der gemessenen Funktionswerte. Im Prozeß der Signalwandlung innerhalb eines optoelektronischen Systems ändern sich i.allg. mit den physikalischen Trägern auch die Signale, und es können somit unterschiedliche mathematische Beschreibungen erforderlich sein. Beispielsweise sind Lichtintensitäten als Funktionen der (kontinuierlichen) Raum- und Zeitkoordinaten aufzufassen. Im Prozeß ihrer Abtastung (z.B. mit einem CCD-Sensor) entstehen dann (diskrete) Folgen von erzeugten Ladungsträgern, die am CCD-Ausgang in eine kontinuierliche Zeitfunktion (z.B. Spannung) gewandelt werden, die nach erneuter Abtastung und A/D-Wandlung in eine Folge von ganzen Zahlen transformiert wird. In Betracht gezogen werden müssen also insbesondere Funktionen, die von stetigen Argumenten abhängen und deren Wertebereich von reellen (oder komplexen) Zahlen gebildet wird, sowie Wertefolgen (Funktionen von diskreten Argumenten) aus reellen (oder komplexen) Zahlen bzw. ganzen Zahlen.

Wegen der immer stärker zunehmenden Meßwertauswertung auf Digitalrechnern kommt letzteren besondere Bedeutung zu.

Die als Signale zu verwendenden (kontinuierlichen oder diskreten) Funktionen sind als mathematische Modelle für die in Natur und technischen Systemen real vorhandenen physikalischen Informationsträger aufzufassen. Diese müssen die wesentlichen Seiten der informationstragen-

den Prozesse widerspiegeln und sollen aus Gründen der mathematischen und rechentechnischen Handhabbarkeit möglichst einfach sein. Auf keinen Fall sind sie als identische Kopien der real ablaufenden Vorgänge zu betrachten, und auf ihrer Grundlage erzielte Ergebnisse dürfen nicht kritiklos angewendet, sondern müssen auf ihre Übereinstimmung mit der Praxis sorgfältig geprüft werden.

Je nach ihrem Verwendungszweck eignen sich als Signalmodelle sowohl zufällige Funktionen (Zufallsprozesse, Zufallsfelder) als auch nichtzufällige Funktionen, wobei letztere aber von teilweise unbekanntem Parametern abhängen müssen, da sie sonst keinerlei Informationen enthalten.

Der Begriff des Signals steht in engem Zusammenhang mit dem des Systems. Zur Charakterisierung eines Systems genügt es hier, dieses als ein Gebilde zu verstehen, welches einem oder mehreren Eingangssignalen ein oder mehrere Ausgangssignale zuordnet. Insofern ist jedes Meßgerät als System aufzufassen. Dieser physikalische Aspekt des Systembegriffs soll jedoch nicht ausschließlich im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen; unter einem System soll vielmehr auch ein hypothetisches Gebilde verstanden werden, das einem fiktiven Eingangssignal ein Ausgangssignal zuordnet.

Ein Signal mit bestimmten Eigenschaften (z.B. ein korrelierter Zufallsprozeß) kann somit auch von einem System erzeugt werden, auf welches ein fiktives Eingangssignal (z.B. weißes Rauschen) einwirkt. Deshalb sind die Methoden der Systemtheorie oft wertvoll, wenn es darum geht, geeignete Modelle für die in der Praxis auftretenden Signale aufzustellen. Natürlich wird der Systembegriff auch benötigt, wenn es gilt, die Wandlung von Signalen durch reale physikalische Systeme (insbesondere optoelektronische Systeme) modellmäßig zu beschreiben.

Und nicht zuletzt gestattet die Systemtheorie aufgrund ihres von konkreten (physikalischen, chemischen, biologischen, ...) Bedingungen abstrahierenden Charakters eine vereinheitlichende Beschreibung unterschiedlicher Disziplinen, wodurch das gegenseitige Verständnis erleichtert und wesentlich zur Rationalisierung geistiger Prozesse beigetragen wird. Da es um die invariante Beschreibung und damit um das Wesen fundamentaler Prozesse in Naturwissenschaft und Technik geht, soll die systemtheoretische Betrachtungsweise im folgenden möglichst umfassend zur Anwendung kommen. Dies erfordert die kurze Darlegung einiger systemtheoretischer Grundlagen.

Insbesondere die sogenannten Zustandsmodelle, die auf dem Begriff des Zustandes dynamischer Systeme beruhen, sind für viele moderne Signalverarbeitungsaufgaben wichtig und sollen deshalb in ihren Grundzügen behandelt werden. Auf der Basis dieser systemtheoretischen Grundlagen können dann einige Klassen von Signalen betrachtet werden, die bei der Untersuchung optoelektronischer Systeme (aber nicht nur bei diesen) von Bedeutung sind.

I.2 Signal- und systemtheoretische Grundlagen

I.2.1 Kontinuierliche lineare 1-D-Systeme

In diesem Abschnitt sollen einige Grundlagen behandelt werden, die im folgenden für die mathematische Beschreibung von Signalen und zur Untersuchung signalwandelnder Prozesse benötigt werden. Eine ausführliche Behandlung findet man z.B. in /1/ und /2/.

Der Einfachheit halber werden zunächst eindimensionale Systeme betrachtet, d.h. Gebilde, die von einem einzigen Argument t abhängige Signale ineinander überführen. Dabei kann t die

Zeit, aber auch eine andere Variable wie z.B. Ortskoordinate oder Wellenlänge sein. Wenn $x(t)$ das Eingangssignal ist, dann ergibt sich das Ausgangssignal $y(t)$ durch die Beziehung

$$y(t) = \mathfrak{I}_t \{x(t'), -\infty < t' < \infty\} . \tag{I.2.1-1}$$

Das System wird hierbei durch das Funktional \mathfrak{I}_t beschrieben, das Werte des Eingangssignals $x(t')$, gewonnen aus verschiedenen Punkten $t' \in (-\infty, \infty)$, in das Ausgangssignal $y(t)$ überführt. Es sei darauf hingewiesen, daß \mathfrak{I}_t von „Anfangswerten“ $y(t_0), y(t_1), \dots$ abhängen kann, was im Moment jedoch nicht von Bedeutung ist (s. Abschnitt I.2.4). Gilt speziell

$$y(t) = \mathfrak{I}_t \{x(t'), t' \leq t\} , \tag{I.2.1-2}$$

so ist der durch das System vermittelte Zusammenhang zwischen Eingangssignal und Ausgangssignal kausal.

Physikalisch begründet ist die Kausalität nur für physikalische dynamische Systeme, wobei t in diesem Falle die Zeit ist. Hier kann das aus dem System zur Zeit t herauskommende Signal natürlich nur von Werten des Eingangssignals $x(t')$ aus Gegenwart ($t'=t$) und Vergangenheit ($t'<t$) verursacht werden. Durch den engen Zusammenhang mit Zustandsmodellen und somit rekursiven Formulierungsmöglichkeiten, sind kausale Systeme manchmal besonders gut mathematisch und rechen technisch handhabbar, weshalb sie teilweise mit Erfolg auch zur Beschreibung von Signalen verwendet werden, die in keinem kausalen Zusammenhang stehen (z.B. wenn t eine Ortskoordinate ist).

Besondere Bedeutung kommt den linearen Systemen zu, für die das Superpositionsprinzip

$$\mathfrak{I} \{a_1 x_1(t') + a_2 x_2(t')\} = a_1 \mathfrak{I} \{x_1(t')\} + a_2 \mathfrak{I} \{x_2(t')\} \tag{I.2.1-3}$$

gilt. Verwendet man einen allgemeineren Integralbegriff, der auch die Deltafunktion, sowie ihre Ableitungen als Integranden zuläßt, so kann man (stabile) lineare Systeme (s. Abschnitt I.2.4) durch den Zusammenhang

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' H(t,t') x(t') \tag{I.2.1-4}$$

charakterisieren.

Beispielsweise beschreibt $H(t,t') = \delta(t-t')$ ein System, welches das Eingangssignal völlig unverändert läßt, denn es gilt

$$f(t) = \int dt' \delta(t-t') f(t') \tag{I.2.1-5}$$

und somit $y(t) = x(t)$.

Ein weiteres Beispiel ist der Differentiator n -ter Ordnung, den man für

$$H(t,t') = \frac{\partial^{(n)}}{\partial t^n} \delta(t-t') \tag{I.2.1-6}$$

erhält. Nach (I.2.1-4) und (I.2.1-6) gilt in diesem Falle

$$y(t) = \frac{d^{(n)}}{dt^n} \int dt' \delta(t-t') x(t') = \frac{d^{(n)} x(t)}{dt^n} .$$

Interessante Beispiele werden weiter unten gegeben.

Kausale lineare Systeme sind dadurch gekennzeichnet, daß

$$H(t,t') = 0 \quad \forall (t' > t) \quad (\text{I.2.1-7})$$

gilt, weshalb Gl. (I.2.1-4) auch in der Form

$$y(t) = \int_{-\infty}^t dt' H(t,t') x(t')$$

geschrieben werden kann.

Die das lineare System charakterisierende Funktion $H(t,t')$ wird als Impulsantwort bezeichnet. Diese Bezeichnung wird klar, wenn man einen nadelförmigen δ -Impuls $x(t') = \delta(t'-t_0)$ in das System hineinschickt, der nur einen Beitrag für $t' = t_0$ liefert und infolge von (I.2.1-4) das Ausgangssignal

$$y(t) = H(t,t_0)$$

erzeugt. In Abb. I.2-1 ist die sich ergebende Situation dargestellt, wenn man δ -Impulse bei den Punkten t_1 und t_2 in das System hineinschickt. Abb. I.2-1a) deutet die δ -Impulse an, Abb. I.2-1b) zeigt die Impulsantworten im nichtkausalen Fall und Abb. I.2-1c) diejenigen für kausale Systeme.

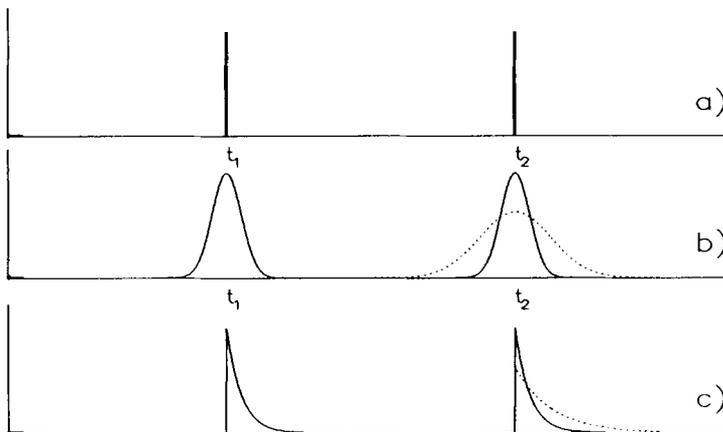


Abb. I.2-1 Impulsantwort im kausalen und nichtkausalen System

Aus Abb. I.2.-1 ist ersichtlich, daß die Impulsantworten $H(t,t_1)$ und $H(t,t_2)$ unterschiedliche Form haben können. Das bedeutet, daß das Verhalten des Systems davon abhängt, bei welchem Punkt t' der Nadelimpuls eingespeist wird.

Ist t' die Zeit, so kann das sich ändernde Systemverhalten z.B. durch einen Alterungsprozeß einzelner Komponenten bedingt sein, ist t' dagegen eine räumliche Koordinate, die den Abstand von der Ebene eines optischen Systems angibt, dann beschreibt dieses Verhalten z.B. die sich verschlechternden abbildenden Eigenschaften des Systems mit wachsendem Abstand von der optischen Achse. Hierauf wird in Abschnitt II.3. noch näher eingegangen.

Verschiebungsinvariante Systeme werden durch eine Impulsantwort

$$H(t, t') = H(t - t')$$

charakterisiert, die nur noch von einem einzigen Argument $\tau = t - t'$ abhängt. Für kausale verschiebungsinvariante Systeme gilt aufgrund von (I.2.1-6)

$$H(t) = 0 \quad \forall (t < 0) . \quad (I.2.1-8)$$

Mit (I.2.1-7) kann der Zusammenhang (I.2.1-4) in der Form eines Faltungsintegrals

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' H(t - t') x(t') \quad (I.2.1-9)$$

geschrieben werden, wodurch sich bei Anwendung der Fouriertransformation erhebliche Vorteile ergeben können (s. unten).

Speist man in ein verschiebungsinvariantes System beim Punkt t_0 einen Nadelimpuls ein, dann ergibt sich aus (I.2.1-5) und (I.2.1-9)

$$y(t) = H(t - t_0) .$$

Damit hängt der Output des Systems nur noch von der Differenz $t - t_0$ ab, und es ergibt sich relativ zu t_0 immer dasselbe Bild, wie es in den Abb. I.2-1 b) und c) durch die ausgezogenen Kurven dargestellt ist.

Verschiebungsinvariante Systeme lassen sich sehr bequem im „Frequenzraum“ beschreiben. Dies ist dadurch begründet, daß die Funktionen

$$\varphi_\nu(t) = e^{j2\pi\nu t}$$

Eigenfunktionen des Integralkerns $H(t)$ sind. Wie man sich durch Einsetzen in das Faltungsintegral (I.2.1-9) überzeugt, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' H(t - t') \varphi_\nu(t') = \tilde{H}(\nu) \varphi_\nu(t) \quad (I.2.1-10)$$

mit

$$\tilde{H}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} dt H(t) e^{j2\pi\nu t} \quad (I.2.1-11)$$

(I.2.1-10) ist eine Eigenwertgleichung, und $\tilde{H}(\nu)$ ist der zur Eigenfunktion $\varphi_\nu(t)$ gehörige Eigenwert. Als Fouriertransformierte der Impulsantwort ist $\tilde{H}(\nu)$ als Frequenzgang (oder Übertragungsfunktion) bekannt. Der Unterschied zu den meist behandelten Eigenwertgleichungen (s. z.B. /3/) besteht darin, daß der Index ν der Eigenfunktion eine stetige Variable ist, daß also nicht-abzählbar viele Eigenfunktionen und Eigenwerte existieren. Die Entwicklung einer Funktion $f(t)$ nach den Eigenfunktionen $\varphi_\nu(t)$ ist somit keine Reihe, sondern ein Integral, nämlich das Fourierintegral

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \tilde{f}(\nu) e^{j2\pi\nu t} \quad (I.2.1-12)$$

Die Orthogonalbeziehung, der die Eigenfunktionen genügen, lautet

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \varphi_{\nu}(t) \varphi_{\mu}^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{j2\pi(\nu - \mu)t} = \delta(\nu - \mu) ;$$

dies folgt aus der Fourierdarstellung

$$\delta(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{\pm j2\pi\nu t} \quad (I.2.1-13)$$

Man erhält formal die Umkehrung des Fourierintegrals, indem man den Operator $\int dt e^{-j2\pi\mu t}$ auf beide Seiten von (I.2.1-12) anwendet, die Integrationsgrenzen vertauscht und (I.2.1-13) beachtet:

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-j2\pi\nu t} \quad (I.2.1-14)$$

Die Eigenwertgleichung (I.2.1-10) kann im Sinne der durch (I.2.1-9) gegebenen Input-Output-Relation des linearen verschiebungsinvarianten Systems folgendermaßen interpretiert werden:

Schickt man in das System die Funktion $x(t) = \varphi_{\nu}(t)$ hinein, so erscheint am Ausgang des Systems die gleiche Funktion $\varphi_{\nu}(t)$, die lediglich mit dem Faktor $\tilde{H}(\nu)$ multipliziert ist. Dies bedeutet, daß eine Eigenfunktion durch das System nicht verzerrt wird, während andere Funktionen beim Durchgang durch das System verformt werden.

Mit der komplexen Funktion φ_{ν} stehen die harmonischen Funktionen $\cos(2\pi\nu t)$ und $\sin(2\pi\nu t)$ in engem Zusammenhang. Diese werden somit von einem linearen verschiebungsinvarianten System in ihrer Form nicht verändert, lediglich ihre Amplitude und Phase werden beeinflußt. Dies zeigt sich, wenn man z.B.

$$x(t) = \cos(2\pi\nu t) = \frac{1}{2} (e^{j2\pi\nu t} + e^{-j2\pi\nu t}) \quad (I.2.1-15)$$

in (I.2.1-9) einsetzt und die Eigenwertgleichung sowie deren komplex konjugierte Gleichung verwendet. Man erhält dann zunächst

$$y(t) = \frac{1}{2} [\tilde{H}(\nu) e^{j2\pi\nu t} + \tilde{H}^*(\nu) e^{-j2\pi\nu t}] .$$

Schreibt man den Frequenzgang $\tilde{H}(\nu)$ in der Form

$$\tilde{H}(\nu) = |\tilde{H}(\nu)| e^{-j\phi_H(\nu)} , \quad (I.2.1-16)$$

so ergibt sich unter Verwendung von (I.2.1-15)

$$y(t) = |\tilde{H}(\nu)| \cos[2\pi\nu t - \phi_H(\nu)] .$$

Das in das System hineingelangende Signal $x(t) = \cos 2\pi\nu t$ ist somit am Ausgang um $\phi_H(\nu)$ phasenverschoben, und seine Amplitude ist mit $|\tilde{H}(\nu)|$ multipliziert worden. Dies rechtfertigt

tigt die Bezeichnungen Phasengang und Amplitudengang für $\phi_H(\nu)$ bzw. $|\tilde{H}(\nu)|$.

Diese Eigenschaft, nämlich beim Durchgang durch ein lineares verschiebungsinvariantes System forminvariant zu bleiben, haben nur die Eigenfunktionen des Systems (bzw. ihre Real- und Imaginärteile). Es ist daher nicht gleichgültig, nach welchen orthogonalen Funktionensystemen man Eingangssignale derartiger Systeme entwickelt: Die Fourierentwicklung zeichnet sich hier durch das genannte Verhalten vor den anderen aus. Ein einfaches Beispiel möge die Situation verdeutlichen. Durch

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{\left(t-\frac{T}{2}\right)}^{\left(t+\frac{T}{2}\right)} dt' x(t') \quad (I.2.1-17)$$

werde ein nicht-kausales System definiert, das die Funktion der gleitenden Mittelwertbildung des Eingangssignals hat. (I.2.1-17) kann in der Form (I.2.1-9) mit der Impulsantwort

$$H(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (I.2.1-18)$$

geschrieben werden. Für den Frequenzgang $\tilde{H}(\nu)$ erhält man damit nach (I.2.1-11)

$$\tilde{H}(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T} \equiv \text{sinc}(\pi\nu T). \quad (I.2.1-19)$$

Diese Funktion ist in den Frequenzintervallen

$$\frac{2n+1}{T} < \nu < \frac{2n+2}{T} \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (I.2.1-20)$$

negativ. Infolgedessen gilt aufgrund von (I.2.1-16) unter Beachtung von $e^{-j\pi} = -1$

$$|\tilde{H}(\nu)| = |\text{sinc}(\pi\nu T)|$$

und

$$\phi_H(\nu) = \begin{cases} 0 & \frac{2n}{T} \leq \nu \leq \frac{2n+1}{T} \\ \pi & \frac{2n+1}{T} \leq \nu \leq \frac{2n+2}{T} \end{cases}.$$

Der Phasengang hat somit Sprünge der Größe π an den Stellen, wo sich das Vorzeichen des Frequenzganges $\tilde{H}(\nu)$ ändert.

In den Frequenzintervallen (I.2.1-20) ist daher das Ausgangssignal gegenüber einem harmonischen Eingangssignal um π phasenverschoben, wodurch sich an den Stellen der Maxima des Eingangssignals Minima des Ausgangssignals befinden und umgekehrt. Ist die Frequenz ν des harmonischen Eingangssignals ein ganzzahliges Vielfaches von $1/T$, so ist $\tilde{H}(\nu) = 0$, und das Ausgangssignal verschwindet. Das Eingangssignal wird somit durch Integration über eine oder mehrere volle Perioden vollständig „herausgemittelt“. Der Amplituden- und Phasengang des Systems wird zusammen mit der Impulsantwort in Abb. I.2-2 dargestellt. Abb. I.2-3 zeigt harmonische Eingangs- und Ausgangssignale für $\nu T=1/2$ und $\nu T=3/2$.

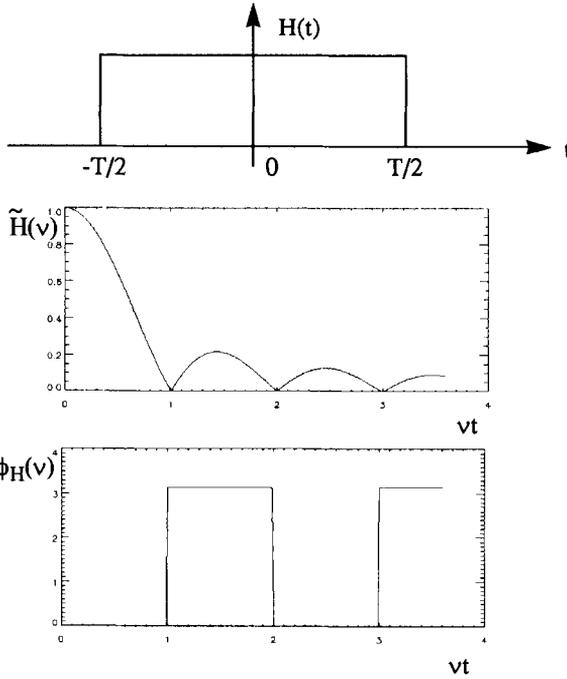


Abb. I.2-2 Amplituden und Phasengang der Impulsantwort

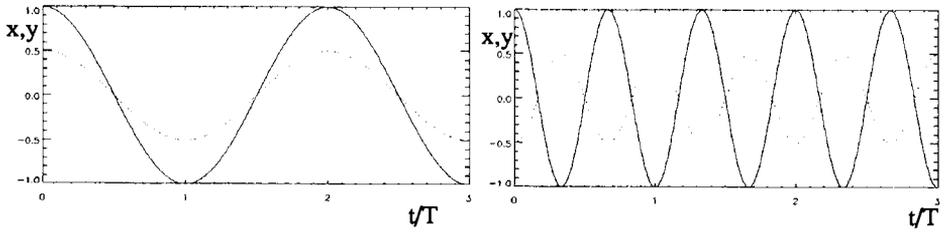


Abb. I.2-3 harmonische Eingangs- und Ausgangssignale für $vT=1/2$ und $vT=3/2$

Dagegen ist in Abb. I.2-4 die Reaktion des Systems auf ein periodisches nicht-harmonisches Eingangssignal dargestellt, das wie das Eingangssignal aus Abb. I.2-3a) eine Frequenz (bei nichtsinusförmigen Signalen auch als Sequenz bezeichnet) $v_s = 1/2T$ hat. Wie man sieht, ergibt sich durch die Wirkung des Systems eine starke Verzerrung des Eingangssignals. Durch den Übergang in den Frequenzraum mittels Fouriertransformation vereinfacht sich das Faltungsintegral (I.2.1-9) beträchtlich. Entwickelt man in (I.2.1-9) $x(t')$ gemäß (I.2.1-12) nach Eigenfunktionen des Kerns H und verwendet man die Eigenwertgleichung (I.2.1-10), so ergibt sich

$$y(t) = \int dv \tilde{H}(v) \tilde{x}(v) e^{i2\pi v t} \quad ,$$

woraus nach (I.2.1-12)

$$\tilde{y}(v) = \tilde{H}(v) \tilde{x}(v) \tag{I.2.1-21}$$

folgt.

Die Fouriertransformierte (oder das Spektrum) des Ausgangssignals erhält man folglich durch Multiplikation des Spektrums des Eingangssignals mit dem Frequenzgang des Systems. Diese fundamentale Eigenschaft der Fouriertransformation läßt sich rechenstechnisch vorteilhaft ausnutzen, indem man zur Berechnung von Faltungsintegralen durch Fouriertransformation zunächst in den Frequenzraum übergeht, dort die Multiplikation (I.2.1-21) durchführt und dann durch Fourier-Rücktransformation in den Originalbereich zurückkehrt.

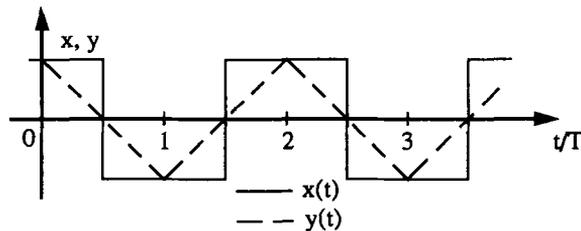


Abb. I.2-4 Reaktion des Systems auf ein periodisches nicht-harmonisches Eingangssignal

Aufgrund von (I.2.1-21) wird klar, daß das Spektrum $\tilde{x}(\nu)$ des Eingangssignals durch die Wirkung des Systems beeinflußt, d.h. gefiltert wird. Lineare Systeme werden deshalb auch als lineare Filter bezeichnet.

Schreibt man das Spektrum $\tilde{f}(\nu)$ einer Funktion $f(t)$ analog zum Frequenzgang (I.2.1-16) in der Form

$$\tilde{f}(\nu) = |\tilde{f}(\nu)| e^{-j\phi_f(\nu)} \quad (I.2.1-22)$$

so ergeben sich aus (I.2.1-21) die Beziehungen

$$|\tilde{y}(\nu)| = |\tilde{H}(\nu)| \cdot |\tilde{x}(\nu)|$$

und

$$\phi_y(\nu) = \phi_H(\nu) + \phi_x(\nu),$$

nach denen sich die Module der Spektren multiplizieren, die Phasen aber addieren. Wenn $f(t)$ eine reelle Funktion ist, dann gilt nach (I.2.1-14)

$$\tilde{f}^*(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{j2\pi\nu t}$$

also

$$f^*(\nu) = \tilde{f}(-\nu) \quad (I.2.1-23)$$

bzw. nach (I.2.9-22)

$$|\tilde{f}^*(\nu)| = |\tilde{f}(-\nu)| \quad \text{und} \quad \phi_f(\nu) = -\phi_f(-\nu). \quad (I.2.1-24)$$

Der Modul des Spektrums einer reellen Funktion ist demnach eine gerade Funktion, die Phase eine ungerade Funktion.

(I.2.1-24) bedeutet insbesondere, daß die „positiven“ Frequenzen $\nu \geq 0$ zur Charakterisierung des Spektrums einer reellen Funktion völlig ausreichen. Negative Frequenzen $\nu < 0$ werden lediglich aus Gründen der mathematischen Einfachheit verwendet; erforderlich sind sie zur

Beschreibung meßbarer (reeller) Signale nicht. Dies sieht man auch, wenn man das Fourierintegral (I.2.1-12) der reellen Funktion $f(t)$ unter Verwendung von (I.2.1-22) und (I.21-23) in der Form

$$f(t) = 2 \cdot \int_0^{\infty} d\nu \cdot |\tilde{f}(\nu)| \cdot \cos [2\pi\nu t - \phi_f(\nu)] \tag{I.2.1-25}$$

schreibt.

Hier ist $\nu \geq 0$ die wirkliche, d.h. physikalisch interpretierbare, Frequenz. Ist t die Zeit, so ist ν die gewöhnliche Frequenz (gemessen in Anzahl der Schwingungen pro Sekunde). Ist t dagegen eine Ortskoordinate, so wird ν als Orts- oder Raumfrequenz oder auch als Wellenzahl (z.B. gemessen in Anzahl der Wellen pro Zentimeter) bezeichnet. Hierauf wird bei der Betrachtung zweidimensionaler Signale noch näher einzugehen sein.

Die Darstellung (I.2.1-25) der reellen Funktion $f(t)$ ist zu interpretieren als Überlagerung harmonischer Anteile der Frequenz ν mit von ν abhängigen Amplituden $|\tilde{f}(\nu)|$ und Phasenverschiebungen $\phi_f(\nu)$.

Oftmals beobachtet man nicht die Signale $f(t)$, sondern aus ihnen gebildete quadratische Größen, wie z.B. $|f(t)|^2$. Beispielsweise registrieren optoelektronische Detektoren nicht Lichtamplituden, sondern Strahlungsintensitäten proportionale Größen. Für die Untersuchung derartiger Signale ist die folgende Formel wichtig. Aus der Fourierdarstellung (I.2.1-12) des Signals $f(t)$ folgt zunächst

$$f^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \tilde{f}^*(\nu) e^{-j\pi\nu t} \text{ und } f(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu' \tilde{f}(\nu') e^{j\pi\nu'(t + \tau)}$$

Damit wird

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f^*(t) \cdot f(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} d\nu' \tilde{f}^*(\nu) \cdot \tilde{f}(\nu') \cdot e^{j2\pi\nu'\tau} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{j2\pi(\nu' - \nu)t}$$

Das letzte Integral auf der rechten Seite dieser Beziehung ist die Fourierdarstellung der δ -Funktion (I.2.1-13). Damit kann die Integration über $d\nu'$ ausgeführt werden, und man erhält

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f^*(t) \cdot f(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu |\tilde{f}(\nu)|^2 \cdot e^{j2\pi\nu\tau} \tag{I.2.1-26}$$

Damit ist $|\tilde{f}(\nu)|^2$ die Fouriertransformierte der Funktion

$$C_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f^*(t) \cdot f(t + \tau)$$

die keine Information über die Phase $\phi_f(\nu)$ des Spektrums $\tilde{f}(\nu)$ mehr enthält und die zuweilen als Autokorrelationsfunktion des deterministischen Signals $f(t)$ bezeichnet wird (s. z.B. /5/).

Für $\tau=0$ folgt aus (I.2.1-26) die sogenannte Vollständigkeitsrelation

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dv |\tilde{f}(v)|^2 \tag{I.2.1-27}$$

Hieraus ergibt sich folgende Interpretation der Größe $|\tilde{f}(v)|^2$: Ist beispielsweise $f(t)$ die Spannung, die an einem Widerstand von 1Ω abfällt, dann ist $f^2(t)$ die Leistung und $\int dt f^2(t)$ die insgesamt in Wärme umgesetzte Energie.

Aufgrund von (I.2.1-27) ist dann $|\tilde{f}(v)|^2$ als spektrale Energiedichte (gemessen z.B. in Joule/Hz) aufzufassen, d.h., $|\tilde{f}(v)|^2 dv$ ist die im Intervall $(v, v+dv)$ befindliche Energie.

Eine wichtige Beziehung besteht zwischen den „Ausdehnungen“ der Funktionen $f(t)$ und $\tilde{f}(v)$: Je breiter $f(t)$ ist, desto schmaler ist $\tilde{f}(v)$ und umgekehrt. Mathematisch läßt sich diese Aussage durch die sogenannte Unschärferelation beschreiben, die aus der Quantenmechanik als Heisenbergsche Unschärfebeziehung bekannt ist (s. z.B. /6/) und dort fundamentale Bedeutung hat. Es soll vorausgesetzt werden, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dv |\tilde{f}(v)|^2 = 1$$

ist. Eine derartige Normierung kann man immer durch Multiplikation der betrachteten Funktion $f(t)$ mit einer Konstanten c erreichen, so daß sie keine Einschränkung der Allgemeinheit darstellt. Die Größe σ_t , die durch

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dt t^2 |f(t)|^2 \tag{I.2.1-28}$$

definiert ist, ist dann ein Maß für die Breite von $|f(t)|^2$ und damit auch von $f(t)$. Beispielsweise gilt für die „Rechteckfunktionen“

$$f(t) = \begin{cases} 1 / (\sqrt{2a}) & -a \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{I.2.1-29}$$

(s. Abb. I.2-5a) $\sigma_t = a / \sqrt{3}$, wie man sich durch direktes Ausrechnen überzeugen kann. Damit ist σ_t proportional zur Breite $2a$ der Funktion $f(t)$. Für die Gaußverteilung (Abb. I.2.5b)

$$|f(t)|^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \tag{I.2.1-30}$$

gilt $\sigma_t = \sigma$. Die Standardabweichung σ (und damit σ_t) bestimmt die Breite der Gaußverteilung, denn es gilt z.B.

$$|f(3\sigma)|^2 / |f(0)|^2 = e^{-4.5} = 0.011$$

Bei $|t|=3\sigma$ ist $|f(t)|^2$ bereits auf etwa 1% ihres Maximalwertes $|f(0)|^2$ abgefallen.

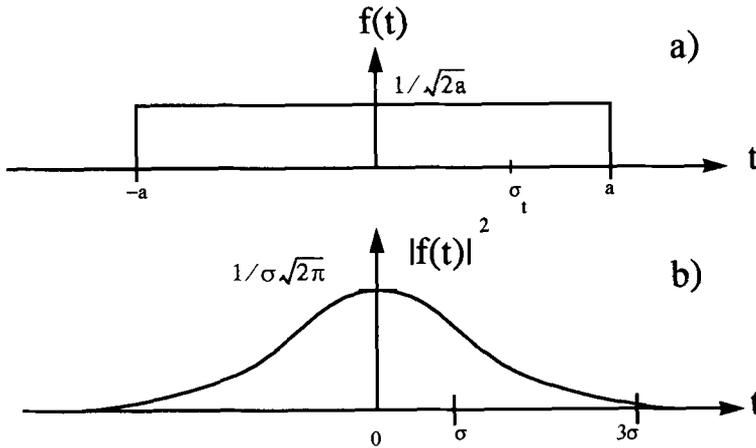


Abb. I.2-5 Rechteckfunktion und Gaußverteilung

Führt man σ_v analog zu (I.2.1-28) durch

$$\sigma_v^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dv v^2 |\tilde{f}(v)|^2$$

ein, so gilt die Unschärferelation

$$\sigma_t \cdot \sigma_v \geq \frac{1}{4\pi} \quad (\text{I.2.1-31})$$

Wegen (I.2.1-31) ist $\sigma_t \geq 1/(4\pi\sigma_v)$, und dies entspricht der oben gemachten Aussage: Je breiter $f(t)$ ist, desto schmaler ist $\tilde{f}(v)$ und umgekehrt.

Den Beweis der Ungleichung (I.2.1-31) findet man z.B. in /5/; er wird hier nicht angegeben. Anhand der Beispiele (I.2.1-29) und (I.2.1-30) soll aber ihre Gültigkeit demonstriert werden. Für (I.2.1-29) gilt nach (I.2.1-14)

$$\tilde{f}(v) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-a}^a dt e^{-j2\pi vt} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{\sin(2\pi va)}{\pi v},$$

woraus

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{2\pi^2 a} \int_{-\infty}^{\infty} dv \sin^2(2\pi va) = \infty$$

und damit $\sigma_t \cdot \sigma_v = \infty$ folgt. Dies ist der ungünstigste Fall, der eintreten kann und der, wie gezeigt wurde, durch die Divergenz von σ_v wegen des langsamen Abfallens von $|\tilde{f}(v)|^2 \sim 1/v^2$ begründet ist. Günstiger sieht es bei der Gaußverteilung (I.2.1-30) aus. Es

gilt $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/(4\sigma^2)} \cdot e^{j\phi(t)}$, wobei $\phi(t)$ eine beliebige Phasenfunktion ist. Hier

soll nur der Fall $\phi(t) \equiv 0$ betrachtet werden. $\phi(t) \neq 0$ führt auf die sogenannten Gabor-funktionen (s. z.B. /7/), die eine gewisse Rolle in der modernen Signalverarbeitung spielen. Sie werden im weiteren jedoch nicht verwendet. Das Integral

$$\tilde{f}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\sqrt{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/(4\sigma^2)} \cdot e^{-j2\pi vt}$$

läßt sich mit der Methode der quadratischen Ergänzung direkt berechnen. Man erhält

$$|\tilde{f}(v)|^2 = \frac{4\pi\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-8\pi^2\sigma^2v^2},$$

was auch in der Form

$$|\tilde{f}(v)|^2 = \frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}}$$

geschrieben werden kann, woraus $\sigma_v = 1/4\pi\sigma$ und somit

$$\sigma_t \cdot \sigma_v = \frac{1}{4\pi}$$

folgt. Für die Gaußverteilung (I.2.1-30) nimmt das Produkt $\sigma_t \cdot \sigma_v$ also den minimal möglichen Wert $1/4\pi$ an. Da σ_t die Ausdehnung der Funktion $f(t)$ angibt und σ_v ein Maß für die Bandbreite des Spektrums $\tilde{f}(v)$ ist, ist damit für gaußsche Signale $f(t)$ das „Signalvolumen“ $\sigma_t \cdot \sigma_v$ minimal. Dies ist eine der vielen Eigenschaften der Gaußverteilung, die sie vor anderen Funktionen auszeichnet. Das Wesen der Unschärferelation ist in Abb. I.2-6 noch einmal anschaulich dargestellt.

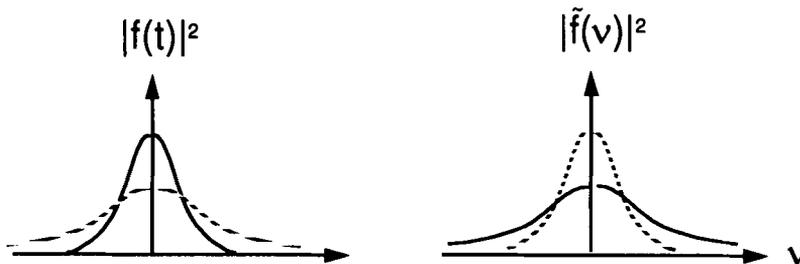


Abb. I.2-6 Unschärferelation

Beim Übergang vom Eingangssignal $x(t)$ zum Ausgangssignal $y(t)$ eines Systems bleibt die Energie i.allg. nicht erhalten, da aufgrund von (I.2.1-27) und (I.2.1-21)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |y(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dv |\tilde{H}(v)|^2 |\tilde{x}(v)|^2$$

gilt, was i.allg. nicht äquivalent mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv |\tilde{x}(v)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dt |x(t)|^2$$

ist. Nur wenn $|\tilde{H}(v)| = 1$ für $-\infty < v < \infty$ ist, bleibt für beliebige Eingangssignale $x(t)$ die Energie $\int dt |x(t)|^2$ beim Durchgang durch das System erhalten. Wenn in einem gewissen Frequenzbereich $|\tilde{H}(v)| < 1$ gilt, dann wird dort Energie dissipiert. Ist dagegen $|\tilde{H}(v)| > 1$, dann wird in diesem Frequenzbereich Energie in das Signal hineingepumpt.

In elektronischen Systemen bedeutet das physikalisch z.B. die Umwandlung elektrischer Energie in Wärme ($|\tilde{H}| < 1$) bzw. die Verstärkung des Signals mit aktiven Bauelementen ($|\tilde{H}| > 1$).

I.2.2 Diskrete lineare 1D-Systeme

Oft ist man gezwungen, die bisher betrachteten kontinuierlichen Zusammenhänge zwischen Signalen zu diskretisieren; es sei, weil man Integrale näherungsweise berechnen will, oder weil man Signale zwecks Computerauswertung abtasten muß. Es ist daher ein Übergang von Integralen zu Summen zu bewerkstelligen.

Zu diesem Zweck kann man das kontinuierliche Signal $f(t)$ vorteilhaft nach Funktionensystemen entwickeln, die in gewissen Teilbereichen I der t -Achse orthonormal sind, d.h. den Beziehungen

$$\int_I dt \varphi_m(t) \cdot \varphi_n^*(t) = \delta_{m,n} \quad (I.2.2-1)$$

genügen. Dabei kann I z.B. das Intervall $-T \leq t \leq +T$, aber auch die gesamte τ -Achse sein. In (I.2.2-1) ist

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

das Kroneckersymbol, welches bei diskreten Systemen die gleiche Rolle spielt, wie die δ -Funktion bei kontinuierlichen.

Schreibt man das Signal $f(t)$ für $t \in I$ in der Form

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \cdot \varphi_n(t) \quad , \quad (I.2.2-2)$$

so erhält man durch Anwendung des Operators $\int_I dt \varphi_m^*(t)$ auf beiden Seiten der Gleichung,

Vertauschung von Summation und Integration, sowie Verwendung von (I.2.2-1) die Formel

$$f_m = \int_1 dt f(t) \cdot \varphi_m^*(t) \tag{I.2.2-3}$$

für die Entwicklungskoeffizienten f_m .

Damit die Funktion $f(t)$ exakt durch die Reihe (I.2.2-2) dargestellt werden kann, muß $f(t)$ gewissen Funktionenräumen (z.B. dem Hilbertraum mit L_2 -Norm, siehe /8/) angehören, innerhalb derer die Funktionen $\varphi(t)$ vollständige Orthonormalsysteme bilden.

Beispiele sind die periodischen Funktionen, die nach Sinus- und Kosinusfunktionen entwickelt werden können (Fourierreihe) und die Funktionen mit bandbegrenztem Spektrum (s. Abschn. I.4).

Nicht vollständig innerhalb der Klasse der periodischen Funktionen sind dagegen die Sinusfunktionen allein (d.h. ohne die Kosinusfunktionen). Nicht vollständige Orthonormalsysteme lassen sich aber manchmal mit Erfolg zur näherungsweisen Darstellung von Funktionen verwenden. Ein Beispiel sind die Funktionen

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{\Delta t} & n\Delta t - \Delta t/2 \leq t < n\Delta t + (\Delta t/2) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

die man unter Verwendung der „Rechteckfunktionen“

$$R_\Delta(x) = \begin{cases} 1 & -\Delta/2 \leq x \leq \Delta/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{I.2.2-4}$$

in der Form

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} R_{\Delta t}(t - n\Delta t) \tag{I.2.2-5}$$

schreiben kann und die in Abb.I.2-7 dargestellt sind.

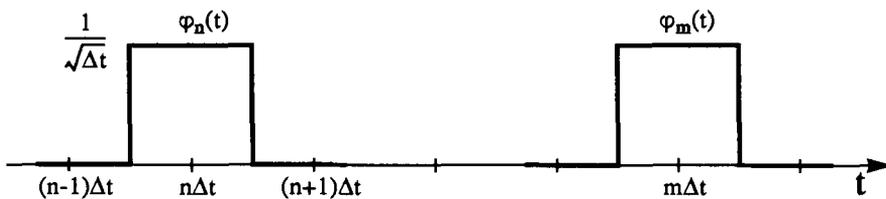


Abb. I.2-7 Nichtvollständige Orthonormalsysteme

Diese Funktionen integrieren die Funktion $f(t)$ über Abschnitte der Länge Δt , so daß i.allg. Information verloren geht und somit Vollständigkeit nur in der Klasse von Funktionen vorhanden ist, die in den Intervallen $(n - 1/2) \Delta t \leq t < (n + 1/2) \Delta t$ konstante Werte annehmen, was i.allg. nicht der Fall ist.

Das Funktionensystem $\{\varphi_n(t)\}$ ist aber trotzdem oft zur näherungsweisen Darstellung von Funktionen geeignet, und es gilt nach (I.2.2-3) für die Entwicklungskoeffizienten (siehe Abb.I.2-8)

$$f_m = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \int_{(m-1/2)\Delta t}^{(m+1/2)\Delta t} dt f(t)$$

Die Funktion $f(t)$ wird somit durch eine Treppenfunktion approximiert, wobei die Werte auf den Stufen gleich dem Mittelwert $f_m/\sqrt{\Delta t}$ sind. Gilt die Entwicklung (I.2.2-2), so ist das Signal $f(t)$ den abzählbar unendlich vielen Werten f_n äquivalent.

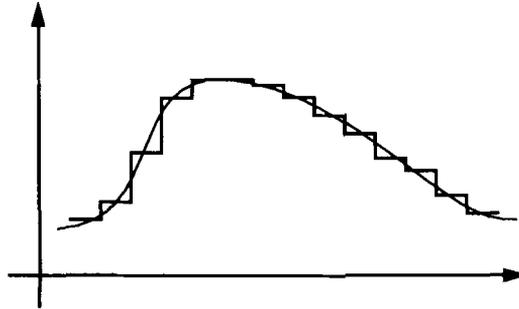


Abb. I.2-8 Näherungsweise Darstellung von Funktionen

Für die Energie des Signals gilt aufgrund von (I.2.2-2) und (I.2.2-1)

$$\int dt |f(t)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 \tag{I.2.2-6}$$

Dies ist die Vollständigkeitsrelation für den Übergang kontinuierlich \Leftrightarrow diskret und als solche das Analogon zur Vollständigkeitsbeziehung (I.2.1-27) für den Übergang kontinuierlich \Leftrightarrow kontinuierlich.

Mit Hilfe der Entwicklung (I.2.2-2) läßt sich nun das Integral (I.2.1-4), welches das kontinuierliche lineare System beschreibt, diskretisieren. Wendet man den Operator $\int dt \varphi_m^*(t)$ mit $I \equiv (-\infty, \infty)$ an, so ergibt sich

$$y_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \int \int dt dt' \varphi_m^*(t) H(t,t') \varphi_n(t')$$

Führt man die Größen

$$h_{m,n} = \int \int dt dt' \varphi_m^*(t) H(t,t') \varphi_n(t') \tag{I.2.2-7}$$

ein, so folgt

$$y_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{m,n} \cdot x_n \quad (m=0, \pm 1, \dots) \tag{I.2.2-8}$$

Dies ist die diskrete Beschreibung des linearen Systems, die der kontinuierlichen Beschreibung (I.2.1-4) völlig äquivalent ist, falls das Funktionensystem $\{\varphi_n\}$ vollständig ist. Die Größen $h_{m,n}$ (I.2.2-7) sind die Koeffizienten in der Entwicklung

$$H(t,t') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{m,n} \cdot \varphi_m(t) \cdot \varphi_n^*(t') \quad (\text{I.2.2-9})$$

de Impulsantwort H , wie man sich leicht durch Anwendung des Operators $\iint dt dt' \varphi_k^*(t) \varphi_l(t')$ auf (I.2.2-9) und Benutzung der Orthonormalitätsbeziehung (I.2.2-1) überzeugen kann.

Diskrete lineare Systeme (I.2.2-8) entstehen nicht nur durch Diskretisierung kontinuierlicher Systeme, sondern sie haben eigenständige Bedeutung. Beispielsweise kann man eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ in einem Digitalrechner erzeugen, und dann durch Multiplikation mit irgendwelchen Größen $h_{m,n}$ und Aufsummation gemäß (I.2.2-8) (allerdings mit endlichen Summationsgrenzen) eine neue Zahlenfolge $\{y_m\}$ generieren, die als Ausgangssignal des durch die Größen $h_{m,n}$ repräsentierten diskreten Systems aufzufassen ist.

Im folgenden sollen die diskreten linearen Filter als eigenständige Systeme, die durch (I.2.2-8) repräsentiert sind, behandelt werden. Die Kausalität wird hier in Analogie zu (I.2.1-6) durch

$$h_{m,n} = 0 \quad \text{für} \quad n > m \quad (\text{I.2.2-10})$$

ausgedrückt, während Verschiebungsinvarianz

$$h_{m,n} = h_{m-n}$$

bedeutet und somit

$$y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{m-n} \cdot x_n \quad (\text{I.2.2-11})$$

gilt. Für kausale verschiebungsinvariante Systeme ist

$$h_k = 0 \quad \text{für} \quad k < 0 \quad (\text{I.2.2-12})$$

Die Interpretation der Größen $h_{m,n}$ als Impulsantwort wird deutlich, wenn man die Reaktion des linearen Systems auf einen Einheitsimpuls untersucht. Für $x_n = \delta_{n,k}$ ergibt sich aus (I.2.2-8) $y_m = h_{m,k}$ (s. Abb. I.2-9).

Analog zu den kontinuierlichen Systemen ergeben sich auch bei den diskreten verschiebungsinvarianten Systemen bedeutende Vereinfachungen, wenn man die Entwicklung nach (diskre-

ten) Eigenfunktionen des Kerns h_k verwendet. Dies sind die Folgen $\left\{ e^{j2\pi \frac{v}{2v_g} \cdot n} \right\}$

(v -kontinuierlicher Index, $v_g > 0$ - beliebiger Maßstabsfaktor), und es gilt

$$\sum_n h_{m-n} e^{j2\pi v \frac{n}{2v_g}} = \tilde{h}(v) \cdot e^{j2\pi v \frac{m}{2v_g}}$$

mit

$$\tilde{h}(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-j2\pi v \frac{k}{2v_g}} \quad (\text{I.2.2-13})$$

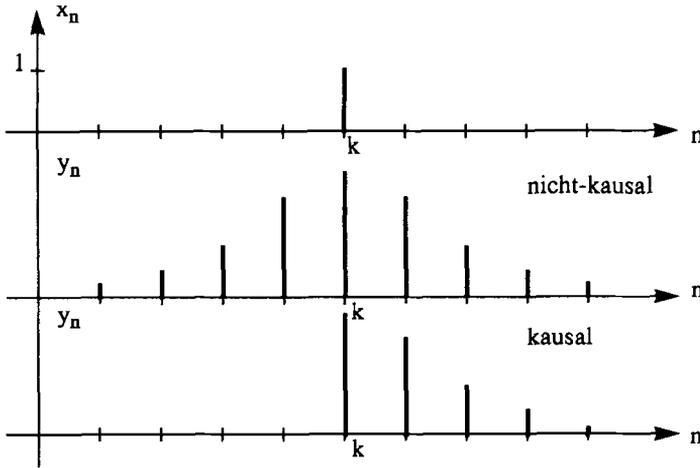


Abb. I.2-9 Impulsantwort eines diskreten linearen Systems

Der Eigenwert $\tilde{h}(v)$, der in Analogie zu den kontinuierlichen Systemen als Übertragungsfunktion bezeichnet wird, ist die aus der Impulsantwort $\{h_k\}$ gebildete Fourierreihe.

Die einer Folge $\{f_n\}$ entsprechende Funktion

$$\tilde{f}(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-j2\pi v \frac{n}{2v_g}} \tag{I.2.2-14}$$

heißt Spektrum der Folge $\{f_n\}$. Das Spektrum ist im Unterschied zum Spektrum einer kontinuierlichen Funktion $f(t)$ eine periodische Funktion mit der Periode $2v_g$.

(Damit $\tilde{f}(v)$ existiert, d.h. damit die Reihe auf der rechten Seite von (I.2.2-14) konvergiert, müssen gewisse Bedingungen erfüllt sein. Hinreichend ist z.B. die Bedingung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n| < \infty \quad ,$$

die der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)| < \infty$$

entspricht, die für die Existenz der Fouriertransformierten hinreichend ist).

Die Umkehrung der Transformation (I.2.2-14) erhält man, wenn man die Beziehung

$$\int_{-v_g}^{v_g} dv e^{j2\pi v \frac{m-n}{2v_g}} = 2v_g \cdot \delta_{m,n} \tag{I.2.2-15}$$

verwendet. Es ergibt sich