Ludwig Stammler,
Edeltraud Buchsteiner-Kießling

Globale Optimierung von Niveaulinien

Geometrische und algebraische Fundierung und Algorithmen

WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA

Aus technischen Gründen bleibt diese Seite leer

L. Stammler,
E. Buchsteiner-Kießling

Globale Optimierung von Niveaulinien

Aus technischen Gründen bleibt diese Seite leer

Ludwig Stammler,
Edeltraud Buchsteiner-Kießling

Globale Optimierung von Niveaulinien

Geometrische und algebraische Fundierung und Algorithmen

WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-527-40267-0

Vorwort

Mit diesem Buch möchten wir eine Bearbeitungsweise zur Raster-Interpolation eröffnen, bei der die Gewinnung eines *global* einfachen Linienbildes als vorrangiges Ziel angestrebt wird.

Erste Erfahrungen mit diesem Vorgehen sind beispielsweise im Ingenieurwesen, bei Techniken der Oberflächenbearbeitung, auf deutliche Zustimmung gestoßen. Ein Nutzen für zahlreiche andere Gebiete ist naheliegend. Zugleich treten mathematische Hintergrundbetrachtungen auf, sowohl für direkten Gebrauch im mathematischen Arbeiten mit Rastern selbst als auch zu Übungs-, Selbststudiums- und Seminarzwecken in der Ausbildung von Mathematikern und Anwendern.

Dem Buch ist eine Diskette mit einem Pascal-Programm beigelegt. Dieses Programm, auf PC üblicher Größenordnung lauffähig, realisiert einen einfachen Prototyp der Algorithmen, die im Buch selbst in größerer Vielfalt der Varianten und Zusätze hergeleitet und beschrieben werden. Das Listing ist im Text mit ausführlichen Kommentaren zur Nutzung und zum Programmaufbau versehen.

Die Autoren möchten Text und Programm auch als Anregung verstehen, den Algorithmus zu einer in vieler Hinsicht erweiterten Software auszubauen. Auf Anfragen hierzu sind wir im Rahmen unserer Möglichkeiten ansprechbar. Das gilt auch zu weiteren Teilprogrammen, die hier aus verschiedenen Gründen nicht in Diskettenfassung weiterzugeben waren, beispielsweise zu einem Programm aus der Arbeit [19] von J. ZILLER, aus der wir dankenswerterweise (außer teilweiser Nutzung des Programms) auszugsweise einige Erläuterungen zitieren konnten.

Die druckfertige Fassung wurde mit $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX erarbeitet. Die Konstruktion der Abbildungen erfolgte mit dem Programm CAD–2D von H. STACHEL. Dem J. A. Barth Verlag sei insbesondere Dank gesagt für die kooperative und geduldige Zusammenarbeit.

Halle (Saale), im Juli 1996

Ludwig Stammler
Edeltraud Buchsteiner-Kießling

Aus technischen Gründen bleibt diese Seite leer

Inhaltsverzeichnis

Aus technischen Gründen bleibt diese Seite leer

1 Zielstellung dieses Buches

Durch dieses Buch zieht sich wie eine „Hauptstraße" die Bearbeitung des Themas „Globale Optimierung von Niveaulinien". Von dieser „Hauptstraße" zweigen mehrere „Ausflugsstraßen" in mathematische Themen ab, die zur Bearbeitung des Hauptthemas herangezogen werden. Das sind Themen aus der euklidischen und projektiven Geometrie, aus der Theorie der algebraischen Transformationen in der algebraischen Geometrie und aus der Topologie.

1.1 Was soll „global optimiert" werden?

Die Fragestellung des „globalen Optimierens", die hier behandelt werden soll, tritt bei folgender Interpolationsaufgabe auf: Gegeben sei ein Raster, das aus Quadraten gebildet wird; jedem Rasterpunkt sei eine reelle Zahl als Wert zugeordnet (siehe z.B. Abb. 1). Gesucht wird eine „optimale" Funktion, die in der Rechteckfläche des Rasters definiert und stetig ist und an allen Rasterpunkten die vorgeschriebenen Werte annimmt. In welchem Sinne soll sie „optimal" sein?

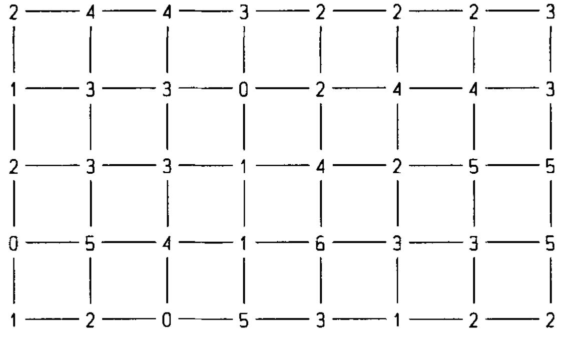

Abb. 1

Um diese Frage zu beantworten, sei zunächst darauf hingewiesen, daß es natürlich unendlich viele stetige Interpolationsfunktionen gibt und daß auch schon viele rechentechnische Verfahren bekannt sind, mit denen man solche Funktionen bilden kann (siehe etwa [1] und dort genannte Literatur). Solche Verfahren arbeiten aber nur „lokal"; d.h., das gesamte Funktionsbild wird aus kleinen Teilen zusammengesetzt, für die zwar ein wünschenswert glatter Übergang zu den jeweils benachbarten Teilen erreicht wird, aber keine Einflußnahme auf weiter entfernte Teile und somit auf das gesamte Funktionsbild erfolgt. Daran ändert sich auch nicht viel, wenn man Verfahren zum nachträglichen Ändern der Funktion anwendet, da sie entweder ebenfalls nur lokal steuerbar sind oder, wenn sie globale Änderungen nach Vorgabe zu steuern gestatten, gerade die Wahl solcher Steuervorgaben als bekannt erfordern, den Anwender also beim Ermitteln derartiger Vorgaben im Stich lassen.

Stattdessen soll es nun um die Aufgabe gehen, im Gesamtbild der Funktion nur solche „Komplikationen" zuzulassen, die durch die gegebenen Rasterpunkt-Werte „unvermeidlich" sind. Zu erklären ist wieder, was hier als „Komplikation" eines Funktionsbildes verstanden werden soll und in welcher Weise sich aus Rasterpunkt-Werten eine „unvermeidliche" Komplikation ergeben kann.

Als erster vereinfachender Gedanke zu solchen Erklärungen sei hier die Betrachtung der Niveaulinien eines Funktionsbildes gewählt. Wie sich später im einzelnen zeigen wird, ist es möglich und sinnvoll, zu erreichen, daß die Gesamtheit aller Niveaulinien nur endlich viele Verzweigungspunkte aufweist und daß von jedem Verzweigungspunkt höchstens vier Kurven-Ansätze ausgehen. Zu erklären bleibt also, in welchem Sinne Rasterpunkt-Werte „optimale" Verzweigungen erzwingen.

Weiterhin läßt bereits eine derartige vorläufige Aufgabenfassung erkennen, daß die geforderten Eigenschaften der Niveaulinien im wesentlichen topologischer Art sind. Dies gestattet eine zweite Vereinfachung: Ein zu ermittelndes Niveaulinienbild kann aus stückweise geradlinigen Kurven bestehen. (Sind solche Niveaulinien erst einmal gefunden, so kann man sie, wenn erwünscht, nachträglich durch topologisch äquivalente Kurven mit anderweitig vorgegebenen Krümmungs- und Glattheitseigenschaften ersetzen. Erst an dieser Stelle könnte also der Einsatz z.B. von Spline- oder Bézierverfahren auf die Niveaulinien oder auch direkt auf die Funktionsfläche sinnvoll eingreifen.)

1.2 Teilschritte des Optimierens

Damit ist das Vorgehen auf der „Hauptstraße" dieses Buches umrissen: Zunächst werden in den einzelnen Rasterquadraten stückweise geradlinige Niveaulinien gesucht und zugleich mit Verzweigungen, sofern diese in einem genauer zu bestimmenden Sinne erzwungen sind, lokal optimiert. Aus den so entstandenen verzweigten Niveaulinien wird eine Zerlegung der gesamten Rasterfläche in Teilgebiete gewonnen. Jedes Teilgebiet kann nun – unter Vermeidung neu hinzukommender globaler Komplikation – überdeckt werden mit unverzweigten Niveaulinien, die jeweils in einem dieser Gebiete untereinander topologisch äquivalent, nämlich zueinander homotop sind.

Damit hat man die Möglichkeit, ein derart global optimiertes Niveaulinienbild darzustellen, indem man aus jeder Homotopieklasse unverzweigter Niveaulinien einen Repräsentanten angibt. Neben den schon genannten Möglichkeiten des Abrundens, auf die in diesem Buch nur noch durch kurzes Skizzieren einer elementaren Variante eingegangen wird, lassen sich auch noch andere Varianten der Ausgestaltung wählen, von denen die folgenden etwas genauer erörtert werden sollen: 1. Die Wahl zwischen einer „besonders groben", einer „glatter bildfüllenden" und einer zwischen beiden Extremen „vermittelnden" Variante, 2. die Kennzeichnung von (nun auch durch unverzweigte Niveaulinien begrenzten) Teilgebieten als „zu einem Gipfel ansteigend" oder „zu einem Tal absteigend".

Die Bildgewinnung wird am Ende so gefaßt, daß sie rechentechnisch automatisiert erfolgen kann. Ein Prototyp für ein Programm, das diese Bildgewinnung ausführt, wird hier in einer lauffähigen Turbo-Pascal-Version aufgestellt. Je nach praxisorientiertem Verwendungszweck kann, aufbauend auf dieser Version, die Herstellung von weiter ausgearbeiteter Software erfolgen, mit der sich umfangreicheres Rastermaterial in genügender Geschwindigkeit und Druckqualität bearbeiten läßt; doch ist das nicht mehr Gegenstand dieses Buches.

1.3 „Ausflüge“ in mathematische Gebiete, Möglichkeit zu Übung oder kursorischer Information

An folgenden Stellen der „Hauptstraße“ kann man nutzbringend von der Einbeziehung geometrischer Themen Gebrauch machen: Zur Gewinnung der Niveaulinien in einem Rasterquadrat wird die Wahl eines Wertes erforderlich, der im Innern dieses Rasterquadrats auftreten soll. Ein solcher Zahlenwert kann einerseits durch eine Extremalbedingung festgelegt, andererseits durch ein Iterationsverfahren gefunden werden. Beide Gewinnungsmöglichkeiten gestatten geometrische Charakterisierungen: Die Extremalaufgabe kann elementargeometrisch durch einen Spiegelungssatz gelöst werden, dessen Beweis dann wieder projektiv-geometrisch geführt werden kann. Die Iterationsschritte, formuliert als Entscheidungsschritte „oben – unten“, „rechts – links“, lassen sich a priori ablesen aus den Eckwerten des Rasterquadrats; hierfür läßt sich ebenfalls der Übergang zu einer projektiven Hilfsebene heranziehen. Man hat nämlich in beiden Gewinnungsmöglichkeiten als „Schlüsselzahl“ (Lösung der Extremalaufgabe und Grenzwert bei der Iteration) eine Zahl, die – in einer dritten Weise geometrisch charakterisiert – als *Parallelmittel* der vier Eckwerte bezeichnet werde. Infolge von Invarianzaussagen zu dieser Mittelbildung kann man die Eckwerte auf zwei signifikante Zahlen reduzieren, und die $\{0;1\}$-Folgen von deren Dualbruchdarstellungen entsprechen den oben genannten Entscheidungsschritten. Man gewinnt diese Entsprechung, indem man ein durch sukzessive Halbierung zerlegtes Dreieck in der gedachten Hilfsebene geeignet projektiv transformiert.

Zur Nutzung einer algebraisch-geometrischen Thematik kommt man in folgendem Zusammenhang: Die Iterationsschritte, ursprünglich mit dem arithmetischen Mittel der Eckwerte angesetzt und das Parallelmittel als Grenzwert erreichend, können stattdessen sogleich in jedem Schritt das Parallelmittel einsetzen. Wieder kann man durch geometrische Betrachtung einer Hilfsebene zu einer a-priori-Beschreibung der Folge von Entscheidungsschritten kommen. Dabei verläßt man allerdings die lineare projektive Geometrie; denn auf eine Strecke, die ein Ausgangsdreieck der Hilfsebene zerlegt, wird nun eine Folge von Cremona-Transformationen angewandt. Solche Transformationen kontrahieren gewisse Kurven zu Punkten und blasen gewisse Punkte zu Kurven auf; daher haben die Teilgebiete des Ausgangsdreiecks, die den Entscheidungsschritt-Folgen entsprechen, nicht nur die Gestalt von (krummlinig begrenzten) Dreiecken, sondern in periodischem Wechsel treten auch Zweiecke und Vierecke auf.

Das Heranziehen einer topologischen Thematik schließlich wird darin bestehen, das Auftreten des Homotopiebegriffs zu beschreiben, insbesondere hier vermittelt durch die kombinatorisch-topologischen Operationen des Zerlegens und Zusammenfügens von Gebieten.
Schließlich ist eine – für den vorliegenden Zweck genügend vereinfachte – Datenstruktur einzuführen, mit deren Nutzung sich solche topologischen Operationen rechentechnisch realisieren lassen.

Die somit verwendeten Theorieteile aus der euklidischen und projektiven Geometrie, der Theorie algebraischer Transformationen und der Topologie werden so weit eingebracht, daß sich damit Übungsmöglichkeiten in diesen mathematischen Disziplinen ergeben. Sie sind an der hier zu erbringenden Anwendung orientiert und können dadurch allgemeiner dazu anregen, beim Bearbeiten praxisbezogener Aufgaben den Einsatzmöglichkeiten scheinbar fernliegender Theorieteile erneut Aufmerksamkeit zukommen zu lassen. Natürlich kann andererseits, wer sich in solchen Theorieteilen genügend kundig fühlt oder überhaupt nur an dem Algorithmus der Niveauliniengewinnung interessiert ist, die „Hauptstraße“ verfolgen oder sich sogleich nur dem Turbo-Pascal-Programm zuwenden. In diesem Fall wären in der angegebenen Reihenfolge die Abschnitte 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.2.1, 2.2.3, 2.3.1, 2.3.2, 3.1.1, 3.1.2, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, 3.1.7, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.6, 3.2.7, 3.3.2, 3.3.3, 3.3.5, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5, 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5, 5.1.1, 5.1.2, 5.2.2, 5.3.2 bzw. nur das Kapitel 6 zu lesen.

Zur Darstellungsweise sei bemerkt: In Kapitel 2, das sich mit der Linienführung in den einzelnen Rasterquadraten befaßt und die erwähnten Fundierungen aus Geometrie und algebraischer Geometrie ausführt, ergibt sich eine mehr lehrbuchartige Darstellung. Darin bilden Definitionen und Sätze sowie deren Nutzung für die Gewinnung der Linienführung die zentralen Aussagen; sie werden teils durch Zitat, teils durch Motivation und Beweisdarstellung angeboten. Diese Teile des Buches, auch mit den eingefügten Übungsaufgaben, können somit sowohl zu Selbststudienzwecken als auch etwa zu seminaristischer Nutzung geeignet sein.

In den anschließenden Kapiteln über die globale Bildgewinnung wird dagegen mehr Wert gelegt auf das ausführliche Beschreiben möglicher Algorithmen. Es geht dabei um genaueres Fixieren und Motivieren einzelner Schritte, in die sich ein solcher Algorithmus gliedern läßt; und es geht um Erläuterungen zur Frage, auf welche zuvor vorhandenen Informationen zugegriffen werden kann, um daraus die anschließend auszugebenden Informationen zu gewinnen. Mehrmals ist auch zu diskutieren, ob und mit welchem Nutzen Probleme erkennbar und behebbar sein werden.

Dabei wurde bewußt in Kauf genommen, daß diesem Darstellungsstil eine gewisse Naivität anhaftet. So können Darlegungen zunächst als breit ausgeführte Selbstverständlichkeiten erscheinen, ehe in ihrem Zusammenwirken eine insgesamt realisierbare Nutzung einsehbar wird. Ein wesentliches Ziel dieser Abschnitte ist, nicht nur zum Verständnis des Pascal-Programms hinzuführen, sondern auch detailliertere Anregungen zu geben, wie ein solches Programm variiert und weiter ausgebaut werden kann, gegebenenfalls bis zur Gestaltung einer umfassenden Software.

Das Programm selbst realisiert folglich nicht etwa umfangsgleich diese Algorithmenbeschreibung. Es wurde zunächst in parallel-laufender Erarbeitung zu den vorangehenden Kapiteln, die erforderlichen programmiertechnischen Details einbringend, ausgeführt. Im Ergebnis wird damit eine Grundvariante angeboten, an der sich deutlich machen läßt, welcher Art die erreichbaren Resultate sind. Damit dies auch bei relativ kleiner Rechnergröße gelingt, waren einige programmiertechnische Mittel einzusetzen, die nicht in jedem Fall textlich zu kommentieren waren. Doch wurde versucht, einen allzu weitgehenden „black box"-Charakter zu vermeiden, um die im Text angebotenen Variations- und Ausbaumöglichkeiten realisierbar zu halten.

1.4 Nutzungsmöglichkeiten und -empfehlungen; grobe Raster

Es gibt zahlreiche Praxisbereiche, in denen zu rasterförmig gegebenem Zahlenmaterial interpolierende Funktionen oder auch nur deren Niveaulinien gesucht werden. Solche Praxisbereiche sind etwa bezeichnet durch folgende Stichworte: Oberflächendarstellung und -analyse in Geologie, Geographie, oberflächenbearbeitender Technik; ferner Bildgewinnung, -analyse und -bearbeitung in Kartographie, Meteorologie, Biologie, Medizin und in unterschiedlichen Anwendungsbereichen von teils mehr abstrahierender, teils mehr geometrisch veranschaulichender Statistik. In derartigen Gebieten kommt eine Anwendung des hier aufgebauten Verfahrens vor allem dann in Betracht, wenn das zu bearbeitende Zahlenmaterial nur in einem *groben Raster* vorliegt. Mit einer Unterscheidung zwischen „feinen" und „groben" Rastern (in fließendem Übergang) ist natürlich nicht die absolute Größe der Rasterquadrate gemeint; diese läßt sich ja einfach durch Ähnlichkeitstransformation ändern. Vielmehr geht es um die Rasterquadratgröße, bezogen auf die Häufigkeit von Monotoniewechseln in den Zeilen und Spalten des Rasters.

Am Beispiel der Abb. 1 sei dies erläutert: In der Umgebung des *mittleren Rasterquadrats der untersten Zeile* sind folgende Monotoniewechsel zu beobachten: Verfolgt man die Kante der mit 1 und 6 belegten Ecken von links nach rechts, so wird sie monoton steigend belegt; in ihren beiden Fortsetzungen nach links bzw. nach rechts wechselt aber jedesmal bereits wieder die Monotonierichtung. Ein ebensolcher Wechsel tritt ein, wenn man von der mit 3 belegten Ecke jeweils nur zwei Schritte nach links bzw. nach oben geht. Das hat folgende Konsequenzen: Man kann auf allen vier Seiten dieses Rasterquadrats Punkte mit dem Wert 4 interpolierend belegen und je zwei dieser Punkte z. B. einander nicht kreuzend entweder so verbinden, daß dadurch die beiden mit 1, 3 belegten Ecken voneinander getrennt werden oder aber die beiden mit 5, 6 belegten Ecken. Geht man dann jedesmal direkt weiter zu den beiden nächsten mit 4 belegten Rasterpunkten, so entstehen zwei global unterschiedliche Linienstrukturen: Im ersten Fall werden diese beiden Rasterpunkte „sehr kurz“ miteinander verbunden, im zweiten „recht radikal“ voneinander getrennt. Diese beiden hier nur andeutungsweise gekennzeichneten globalen Fortsetzungsmöglichkeiten bestehen auch im Anschluß an eine kreuzweise Linienführung.

Treten solche globalen Auswirkungen der Grobheit eines Rasters häufig auf und ist es nicht möglich oder zu aufwendig, das Raster durch zusätzliche Messungen zu verfeinern, so verblieb bisher in zahlreichen Anwendungsfällen nur die Möglichkeit, den globalen Niveaulinienverlauf „gefühlsmäßig“ zu wählen oder mit der Einschätzung „wegen Unübersichtlichkeit nicht auswertbar“ zu resignieren. In solchen Fällen, wenn zudem die Annahme eines (stetigen und) im oben angedeuteten Sinne nicht überflüssig komplizierten Gesamtbildes praxisgerecht ist, sollte die Anwendung des hier zu entwickelnden Algorithmus gut motiviert sein. Seiner Erarbeitung auf der angekündigten „Hauptstraße“, unter Einbringung der „Ausflugsstraßen“-Begründungen, wenden wir uns nun zu.

2 Niveaulinien in einem einzelnen Rasterquadrat

2.1 Typen von Rasterquadraten; Dreieckszerlegung mit Längensummenminimierung

2.1.1 Lineare Interpolation auf dem Rand

Die in 1.1 motivierte Vereinfachung, nur stückweise geradlinige Niveaulinien zu bilden, entspricht der folgenden Festsetzung, die Rasterlinien durch stückweise lineare Interpolation zu belegen, d.h.: Wir ordnen allen Randpunkten eines Rasterquadrats diejenigen Zahlenwerte zu, die sich durch lineare Interpolation zwischen den Eckwerten ergeben. In Abb. 2 ist als Beispiel skizziert, wie diese Interpolation auf das eben erwähnte Rasterquadrat aus Abb. 1 wirkt.

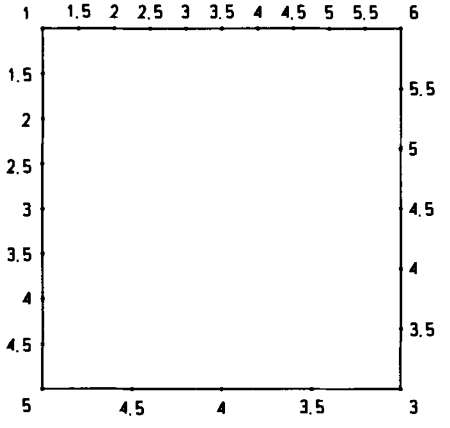

Abb. 2

2.1.2 Typen von Quadraten

In 1.4 wurde deutlich, daß es eine Rolle spielt, ob ein Zahlenwert existiert, mit dem mehr als zwei Randpunkte eines Quadrats belegt sind. Beispielsweise sind in Abb. 2 mit jedem x, das $3 < x < 5$ erfüllt, je genau vier Randpunkte belegt.

Um diesen Gedanken detaillierter verfolgen zu können, definieren wir durch Gleichungen und Ungleichungen charakterisierte *Typen* von Quadraten:

> **Definition 1.** *Ein Rasterquadrat hat jeweils genau dann den hier genannten Typ, wenn sich die Eckwerte, zyklisch das Quadrat umlaufend, so mit a, b, c, d bezeichnen lassen, daß folgende Bedingungen gelten:*

Typ 1: $a = b = c = d.$
Typ 2: $a = b = c \neq d.$
Typ 3: $a = b \neq c = d.$
Typ 4: $a = b$, $c \neq d$ *und entweder* $c > a$, $d > a$ *oder* $c < a$, $d < a$.
Typ 5: $a < b < c < d.$
Typ 6: $a < b < c$ *und* $a < d < c.$
Typ 7: $a < b = c < d.$
Typ 8: $a \leqq c < b \leqq d.$

Gelegentlich wird bei Typ 7 *und* 8 *noch genauer unterschieden:*

Typ 7a: $a < b = c < d$ *und* $a + d = 2b.$
Typ 7b: $a < b = c < d$ *und* $a + d \neq 2b.$
Typ 8a: $a = c < b = d.$
Typ 8b: $a < c < b < d$ *und* $a + d = b + c.$
Typ 8c: $a \leqq c < b \leqq d$ *und* $a + d \neq b + c.$

Man bestätigt hierfür:

Satz 1. *Jedes mit Eckwerten belegte Rasterquadrat gehört genau einem Typ an. Bei Drehungen und Spiegelungen des Quadrats bleibt der Typ unverändert, ebenso bei Addition ein und derselben Zahl zu allen vier Eckwerten sowie bei Multiplikation aller vier Eckwerte mit ein und derselben von Null verschiedenen Zahl (insbesondere also bei gleichzeitiger Vorzeichenumkehrung aller vier Eckwerte).*

Die Typen 7 und 8 nennen wir *kritisch*, alle anderen unkritisch. Zusammenfassend läßt sich dies auch so formulieren: Ein Quadrat ist genau dann kritisch, wenn sich unter seinen vier Eckwerten zwei zueinander diagonal gegenüberliegende a, c befinden, so daß für sie und die beiden anderen Eckwerte b, d

$$\max(a, c) \leqq \min(b, d)$$

gilt, wobei im Fall des Gleichheitszeichens zusätzlich die beiden Ungleichungen

$$\min(a, c) < \max(a, c) \quad \text{und} \quad \min(b, d) < \max(b, d)$$

gelten.

Bemerkung: Zur algorithmischen (und dann rechentechnischen) Typ-Ermittlung wird man die Reihenfolge der Bezeichnungen a, b, c, d nicht – wie hier zur Vereinfachung der Fallbeschreibung – den Anordnungsbeziehungen der vier Eckwerte anpassen. Vielmehr wird man umgekehrt für die Bezeichnungen a, b, c, d eine einheitliche geometrische Reihenfolge festlegen, etwa „unten links“, „unten rechts“, „oben rechts“, „oben links“. Der Algorithmus hat dann zwar mehr Fallmöglichkeiten abzufragen als in der obigen Beschreibung, aber immer noch in vertretbarem Ausmaß. Als günstiger Umstand kommt hinzu, daß man in den meisten Varianten des Algorithmus nur die relativ grobe Unterscheidung zwischen den Fällen Typ 1/ Typ 2/ Typ 7/ Typ 8/ sonstiger Typ benötigt.

Abb. 3 zeigt für jeden Typ ein Beispiel, das in Abb. 1 vorkommt.

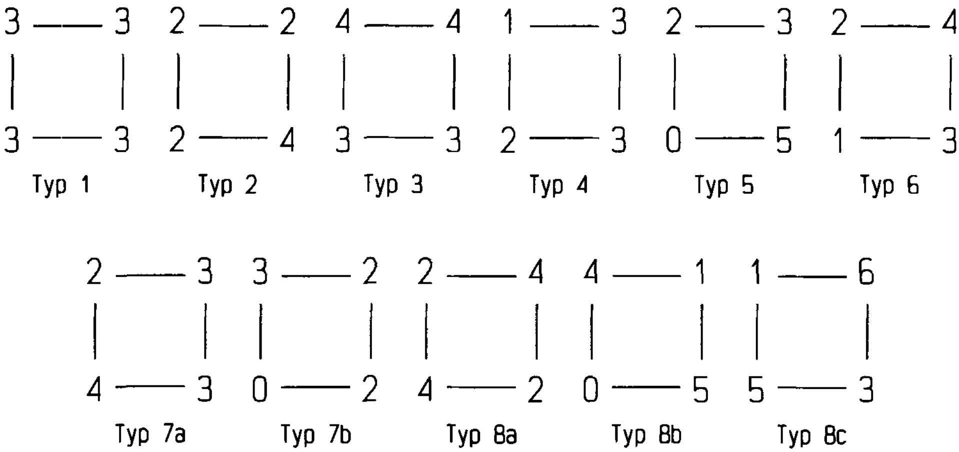

Abb. 3

Für die Anzahlen, mit denen gleichbelegte Randpunkte vorkommen, erhält man nach diesen Definitionen:

> **Satz 2.** *Mit Ausnahme der Typen* 1 *und* 2 *gilt: Genau dann, wenn das Quadrat kritisch ist, gibt es eine reelle Zahl, mit der mehr als zwei – nicht derselben Quadratseite angehörende – Randpunkte des Quadrats belegt sind. Es gibt dann sogar stets ein Intervall positiver Länge, das aus solchen Zahlen besteht.*

Natürlich wäre die Ausnahmeregelung vermieden worden, wenn auch die Typen 1 und 2 zu den kritischen gezählt worden wären; doch wird das für den Aufbau des Algorithmus nicht nötig sein. Allerdings kommt dem Typ 2 bei später zu erläuternder Variantenbildung (Abschnitt 2.2.1ff.) doch noch eine gewisse Sonderrolle zu.

2.1.3 Linienführung in unkritischen Quadraten

Entsprechend der Einschränkung auf stückweise geradlinige Niveaulinien ist es offensichtlich bei den unkritischen Typen am einfachsten, für jeden Wert, mit dem genau zwei Randpunkte belegt sind, diese beiden Punkte geradlinig miteinander zu verbinden, siehe Abb. 4.

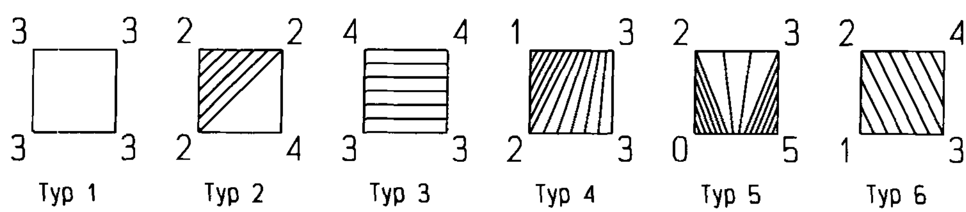

Abb. 4

Bei Typ 1 werden somit überhaupt keine Niveaulinien durch das Innere des Quadrates geführt (das entspricht einem ebenen, zur Zeichenebene parallelen Teilstück des Funktionsbildes). Für Typ 2, bei dem wir auch die diagonale Randlinie des mit Linien gefüllten Dreiecks hinzugefügt haben, wird, wie gesagt, später wahlweise noch eine etwas andere Linienführung zur Verfügung gestellt.

2.1.4 Die Aufgabe der Längensummenminimierung

Die in 1.4 genannte und nach 2.1.2, Satz 2, den kritischen Typen zukommende Mehrdeutigkeit würde nicht auftreten, wenn das Raster nicht aus Vierecken, sondern aus Dreiecken zusammengesetzt wäre. (Das entspricht der Möglichkeit, über jeder Dreiecksfläche mit gegebenen Eckwerten ein ebenes Teilstück für die damit zusammengesetzte interpolierende Funktion zu wählen.) Daher könnte der Versuch naheliegen, eine eindeutige Linienführung dadurch zu erreichen, daß man jedes Quadrat in Dreiecke zerlegt.

Eine Zerlegung in je zwei Dreiecke wäre allerdings nur scheinbar eine Lösung der Problematik; denn man hätte ja zu entscheiden, welche der beiden Diagonalen die Zerlegung erbringen soll (siehe Abb. 5), und das wäre nichts anderes als die schon in 1.4 genannte Mehrdeutigkeit mit ihren globalen Konsequenzen im groben Raster.

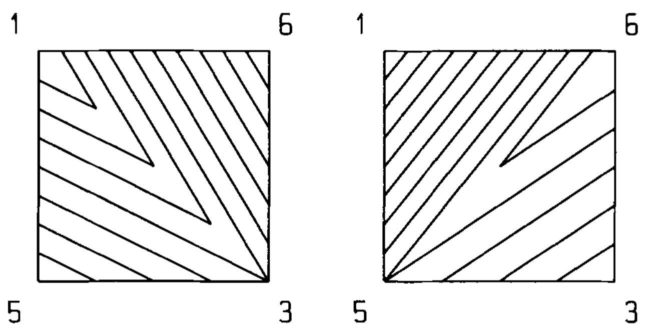

Abb. 5

Als nächst einfachen Versuch denke man sich das Rasterquadrat durch beide Diagonalen in vier Teildreiecke zerlegt. Sobald man dann dem Quadratmittelpunkt einen willkürlich gewählten Zahlenwert m zuordnet und die Katheten der vier Dreiecke mit linear interpolierten Zahlen belegt, erhält man, wie gesagt, in den Dreiecken eindeutig bestimmte Verbindungsstrecken gleichbelegter Randpunkte. Abb. 6 zeigt, welche Niveaulinienbilder in dem Quadrat der Abb. 5 einmal bei der Wahl $m = 3,5$ und einmal bei der Wahl $m = 4,5$ entstehen.

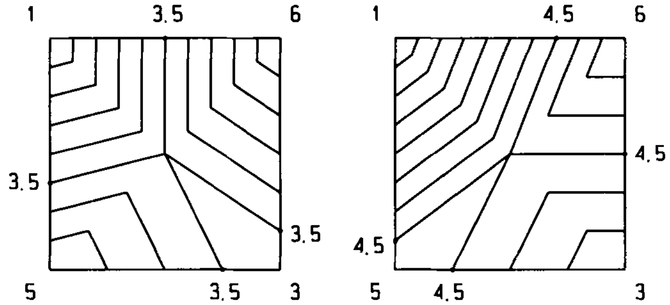

Abb. 6

Es erscheint plausibel, die Wahl von m durch eine Minimalbedingung festzulegen. In Anlehnung an die Linienbilder für unkritische Quadrate, wo jede einzelne Linie eine möglichst kurze Verbindung zwischen den vorgesehenen Randpunkten ist, fordern wir hier:

Forderung 1. *Der Mittelpunktwert m für die Linienführung in einem kritischen Quadrat nach dessen Zerlegung durch seine beiden Diagonalen ist so zu wählen, daß für eine genügend große, fest gewählte natürliche Zahl N die Niveaulinien zu den Werten*

$$\min(a,b,c,d) + \tfrac{k}{N} \cdot (\max(a,b,c,d) - \min(a,b,c,d)) \qquad (k = 1, \dots, N-1)$$

eine möglichst kleine Längensumme aufweisen.

2.1.5 Überführung der Minimalbedingung in elementargeometrische Gestalt

Wir betrachten zunächst die Längensumme in einem der vier gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke, dessen Ecken A, B, M mit Zahlen a, b, m belegt seien. Es sei etwa $|AM| = |BM| = 1$; ferner können wir bei genügend großem N mit beliebig kleinem relativem Fehler der Längensumme annehmen, daß a, b, m kommensurabel sind, etwa $a = u \cdot e, b = v \cdot e, m = w \cdot e$ mit hierfür genügend kleinem reellem $e > 0$ und ganzen Zahlen u, v, w. Es genügt, die beiden Fälle $m < a < b$ und $a < m < b$ zu betrachten; Abb. 7 zeigt in diesen Fällen die Niveaulinie AA' für a bzw. die Niveaulinie MM' für m. Man erhält

$$|MA'| = \frac{u-w}{v-w} \qquad \text{bzw.} \qquad |AM'| = \frac{w-u}{v-u} \cdot \sqrt{2}$$

und daraus nach dem Satz des Pythagoras bzw. nach dem mit $\cos|\sphericalangle MAM'| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ angewandten Kosinussatz

$$|AA'| = \sqrt{1 + \left(\frac{u-w}{v-w}\right)^2} \quad \text{bzw.} \quad |MM'| = \sqrt{1 + 2 \cdot \left(\frac{w-u}{v-u}\right)^2 - 2 \cdot \frac{w-u}{v-u}}\,.$$