Rainer Wüst

Mathematik

für Physiker und Mathematiker

2., überarbeitete Auflage

Band 1:
Reelle Analysis und Lineare Algebra

WILEY-VCH

This Page Intentionally Left Blank

Rainer Wüst

Mathematik
für Physiker und Mathematiker

Band 1

This Page Intentionally Left Blank

Rainer Wüst

Mathematik

für Physiker und Mathematiker

2., überarbeitete Auflage

Band 1:
Reelle Analysis und Lineare Algebra

WILEY-VCH

Prof. Dr. rer. nat. Rainer Wüst
Institut für Mathematik an der
Technischen Universität Berlin
Straße des 17. Juni 136
10623 Berlin

Umschlag: Tafelbild, Rainer Wüst

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme
Ein Titeldatensatz für diese Publikation ist bei Die Deutsche Bibliothek erhältlich

ISBN 3-527-40402-3

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

Druck: Strauss Offsetdruck GmbH, Mörlenbach.
Bindung: Litges & Dopf Buchbinderei GmbH, Heppenheim.
Printed in the Federal Republic of Germany.

Geleitwort zur 2., überarbeiteten Auflage

Berlin, im Juni 2002

Dipl.-Phys. Sabina Jeschke
Prof. Dr. Ruedi Seiler
Dipl.-Phys. Erhard Zorn

Er ist ein Mathematiker und also pedantisch. Goethe

Mathematiker: Sagen Sie mal, wie meinen Sie denn das, Herr Goethe? Definieren Sie doch bitte mal "pedantisch"!

Goethe: *(hochschreckend, entgeistert)* Wer sind Sie denn überhaupt?

Mathematiker: Ein Mathematiker!

Goethe: *(als erkläre dies alles)* Ach so. Das ist natürlich zu berücksichtigen.

Mathematiker: Wieso? Beeinflusst das etwa die Antwort? Komische Definition.

Goethe: *(kichert)* Schließlich muss man wissen, welche Definition dem Begriff "Definition" zugrunde liegt, nicht wahr?

Mathematiker: *(fühlt sich mit eigener Waffe geschlagen und lenkt ab)* Also, was meinen Sie denn nun mit Ihrer Äußerung über Mathematiker und Pedanterie?

Goethe: Sprachlich ist das doch eigentlich ganz klar, aber ich erkläre es Ihnen genauer. Ich sage doch nur, dass aus der Tatsache, jemand sei ein Mathematiker, folgt, dass er pedantisch ist. Ich glaube, Sie als Mathematiker nennen das eine Implikation.

Mathematiker: *(schaut etwas misstrauisch)* Ja, soweit kann ich Ihnen folgen, und der Begriff "Mathematiker" ist mir natürlich auch klar, aber dann sagen Sie doch endlich, was Sie unter "pedantisch" verstehen. Das haben Sie immer noch nicht getan, wir sind also immer noch bei meiner ersten Frage.

Goethe: *(schmunzelnd)* Sehen Sie, Sie lassen sich auch gar nicht ablenken, Sie wollen es nun ganz genau wissen. Aber das ist es ja gerade, was ich meine, und was ich an Ihnen als Mathematiker so schätze: Sie sind sehr gewissenhaft, sagen genau, was Sie unter einem Begriff verstehen, und bauen alles schrittweise aufeinander auf. Das Schöne daran ist, dass es jeder mit gesundem Menschenverstand Ausgestattete — wenn auch oft mit etwas Mühe — nachvollziehen kann, sogar ich *(auflachend)*.

Mathematiker: *(erstaunt, erleichtert)* Dann ist "pedantisch" also gar kein Vorwurf? Keine unterschwellige Anspielung auf Langweiler, Elfenbeinturmbewohner, weltabgewandter Sonderling...?

Goethe: Aber nein! Und im übrigen: ein bißchen mehr Selbstbewußtsein und Offenheit würde euch nicht schaden. Vielleicht könnte man dann mit euch ein durchaus heiteres Verhältnis gewinnen!

Mathematiker: *(besänftigt, aber hartnäckig)* Nun gut! – Aber definiert haben Sie "pedantisch" noch immer nicht...

Liebe Studierende,

wir sind sicher: Goethe wäre zufrieden gewesen. Zufrieden mit diesem Buch und seinem Autor. Unser langjähriger Freund, unser Lehrer bzw. Kollege Prof. Dr. Rainer Wüst verbindet in einer beneidenswerter Weise die Fähigkeit mathematischer Präzision mit der Begabung, seine Studierenden mitzureißen und zu motivieren. Dem zentralen Plädoyer dieses fiktiven Dialoges zwischen Goethe und einem Mathematiker, nämlich, Genauigkeit nicht als Erbsenzählerei mißzuverstehen und Gründlichkeit nicht mit Langeweilertum gleichzusetzen, entspricht dieses zweiteilige vorlesungsbegleitende Lehrbuch damit – wie wir meinen – wie nur wenige andere: Denken, Verstehen, Begreifen, Abstrahieren... das ist der Geist einer mathematischen Ausbildung, und dieser wird hier vorgelebt.

Mathematik ist konkretes Anwenden abstrakten Denkens und abstraktes Denken über konkrete Probleme. Nicht zufällig wendet sich dieses Buch an Physiker *und* Mathematiker, denn die Entwicklung ganzer mathematischer Teildisziplinen ist letztlich die Antwort auf naturwissenschaftliche Fragestellungen, und umgekehrt ist stets die Antwort auf zentrale physikalische Probleme ohne die zugehörige Mathematik ausgeschlossen. Wer also versucht, das Wesen der Mathematik zu verstehen, braucht auch ein gewisses physikalisches Grundverständnis.

Nehmen Sie sich Zeit. Nehmen Sie sich Zeit für die einzelnen mathematischen Objekte, die verschiedenen Argumentationsstrategien, die unterschiedlichen Beispiele. Sie werden sie selten wieder in einer derartigen Präzision – bei gleichzeitiger fachlicher Breite – dargestellt finden. Mathematik ist mehr als eine Studienrichtung, ein Unterrichtsfach, ein Pflichtkurs. Es ist auch (noch) mehr als ein universelles Kulturgut. Mathematik ist eine Schule des Denkens. Eine gute mathematische Ausbildung verändert Sie selbst: Mathematik beeinflußt Ihr Denken und Ihr Handeln. Es fördert und fordert Ihr Abstraktions- und Ihr Strukturerkennungsvermögen. Es trainiert Ihre Fähigkeit, Wichtiges von Unwichtigem, Schweres von Leichtem, Komplexes von Trivialem zu unterscheiden. Und diese Fähigkeiten, seien Sie versichert, gerade die werden es sein, die Sie befähigen, neue Problemlösungsstrategien zu entwickeln, sich schnell und offen mit neuen Fragestellungen beliebiger Natur auseinanderzusetzen – kurz: diejenigen Qualifikationen, derentwegen Mathematiker und Mathematikerinnen in allen Bereichen, in der Wissenschaft, aber eben auch in in den scheinbar "fachfremden" Bereichen Wirtschaft, Politik und Kultur eine immer bedeutendere Rolle spielen. Geben Sie sich die Zeit.

Große Dinge ereignen sich nicht mittags um zwölf Uhr zehn.
Sie wachsen langsam. Kurt Tucholsky

Berlin, im Juni 2002 Sabina Jeschke Ruedi Seiler Erhard Zorn

Der erste Schritt zur Lösung eines Problems besteht darin, es zu formulieren. Geschieht das in einer geeigneten Sprache, einer Sprache mit „hinlänglich ausgebildetem Modellcharakter“ – d.h. einer Sprache, die ausdrucksreich und präzise genug ist, um alle zur Konkurrenz stehenden Möglichkeiten klar zu erfassen, die aber andrerseits soviel Übersicht gestattet, daß die entscheidenden Möglichkeiten nicht unentdeckt
bleiben –, dann lassen sich die weiteren Schritte zur Lösung absehen.
Vergleicht man eine Sprache mit einer Modellwerkstatt – der Ausdrucksreichtum der Sprache entspricht dem Vorrat an abrufbaren Modellen –, dann läßt sich die Mathematik als die universellste solcher Modellwerkstätten ansehen. (Ein Modell ist nichts anderes als ein Stück Wirklichkeit von so einfacher Art, daß sich Menschen über seine Behandlung verständigen können, so daß es zur Verständigung über andere Teile der Wirklichkeit herangezogen werden mag. Über farbige Holzkugeln kann man leichter gemeinsame Ansichten entwickeln als über Atome.)

U.-W. Schmincke

Vorwort

Physiker und Mathematiker der Technischen Universität Berlin haben vor einigen Jahren eine Liste mathematischer Themen erarbeitet, die zum einen das mathematische Grundwissen eines Physikers umfassen sollten, zum anderen einen vom mathematischen Standpunkt aus systematischen Aufbau ermöglichen. Das Curriculum ist für einen Vier-Semester-Kurs konzipiert und gut gelungen. Als ich nach Berlin kam, wurde ich gebeten, es mit Inhalt zu füllen und den Kurs erstmalig zu lesen – für mich eine, gerade wegen der Vielfalt der zu behandelnden Themen, reizvolle Aufgabe. Ein ausführliches Scriptum, das ich damals schrieb und später noch einmal überarbeitete, wurde seitdem, jeweils in überschaubare Teile gebündelt, an die Studenten ausgeteilt, auch wenn Kollegen den Kurs übernommen hatten.

Soweit ich es beurteilen kann, waren die meisten Studenten mit dem Text zufrieden, konnten verstehen, was ich mitteilen wollte. Zumindest haben Zufriedene sich öfter geäußert als Unzufriedene, was man aber als Hochschullehrer, der auch zu prüfen hat, nicht überbewerten darf. So war es für mich dann keineswegs selbstverständlich, zuzusagen, als vom Verlag Walter de Gruyter die Frage kam, ob ich nicht aus dem Scriptum ein Lehrbuch machen könne. Die Argumente dafür und dagegen hielten (und halten) sich durchaus die Waage. Ein Grund dagegen ist zum Beispiel, daß Bücher mit ihrer Masse an Inhalt und ihrem perfekten Äußeren einschüchtern können (vgl. das Lichtenberg-Zitat zum 4. Kapitel). Gründe, die dafür sprachen: Es gibt sehr gute Bücher zu den meisten der hier behandelten Themen, die ich jeweils natürlich benutzt und zitiert habe. Aber ich kenne kein Buch, das mir gefällt und in dem das gesamte Spektrum mit den dann möglichen Querverbindungen dargestellt ist. Außerdem hatten sich viele Vorschläge von Studenten, Mitarbeitern und Kollegen angesammelt, wie und wo man das Scriptum verbessern sollte; das Schreiben des Buches gab mir die Möglichkeit, meine Erfahrungen im Unterricht einzuarbeiten: ich wußte ja inzwischen viel genauer, welche Teile besonders schwer zu verstehen waren, wo ich nach besseren Erklärungen suchen müsse, und ich konnte Lücken auffüllen, die mich längst gestört hatten.

So ist nun ein ziemlich umfängliches Opus entstanden, das mehr enthält, als in einem Kurs behandelt werden kann. Aber das ist bei einem Lehrbuch normal: Man muß auswählen und es sonst zum Nachschlagen benutzen. Auf keinen Fall sollte man aber die Beweise einfach weglassen. Die machen ja gerade das aus, was die Mathematik von vielen anderen Gebieten unterscheidet: Man muß nichts *glauben*, nicht mit *black boxes* arbeiten, in die man auf der einen Seite etwas eingibt und auf wundersame Weise auf der anderen Seite etwas Neues herauskommt, sondern man kann die Argumentation nachvollziehen, ich gebe zu: manchmal mit etwas Mühe. Ich habe versucht, die Beweise vollständig und detailliert aufzuschreiben, Floskeln der Art „wie man einfach sieht", „offensichtlich ist" nur da zu verwenden, wo sie auch stimmen (vgl. aber das Zitat von M. Krüger über dem 23. Kapitel), und so gut wie alle Behauptungen zu beweisen. Deshalb eignet sich das Buch, so meine ich, auch für physikinteressierte Mathematiker.

Mathematik „lernen" bedeutet vor allem: verstehen. Dieses Verstehen findet auf zweierlei Weisen statt. Zum einen ist es *quantisiert*, ist erlebbar als eine Summe vieler kleiner Einsichten, Aha-Erlebnisse. Zum anderen wächst ein *kontinuierliches* Verstehen, eine Vertrautheit und Selbstverständlichkeit im Umgang mit der Mathematik. Diesen Teil des Verstehens merkt man erst, wenn man etwa im dritten Semester den Stoff des ersten wieder einmal anschaut und nicht mehr begreift, warum das ein Jahr vorher so schwer war.

Jeder kann Mathematik verstehen, man braucht keine Sonderbegabung (individuelle Unterschiede gibt es in der Geschwindigkeit des Verstehens). Es liegt der Mathematik ja die gleiche kausale Struktur zugrunde wie der Physik und auch dem „gesunden Menschenverstand". Aber das Verstehen ist Arbeit, die dann natürlich leichter fällt, wenn man ein wenig Freude an ihr hat. Und man braucht am Anfang des Physikstudiums auch Geduld. Es dauert eine Weile, bis es möglich ist, physikalische Phänomene mathematisch zu formulieren. Um in dem Bild des Zitats von U.-W. Schmincke über dem Vorwort zu bleiben: Man muß erst sägen, hobeln und stemmen lernen, bevor man einen Tisch bauen kann. Wo es mir möglich erschien, habe ich versucht, Begriffe und Motivationen aus Physik und Geometrie herzuleiten, manches aus der Physik kommt auch relativ früh, z.B. die Schwingungsgleichung (im 5. Kapitel), aber die meiste Physik-orientierte Mathematik wird dann doch erst im zweiten Teil behandelt.

Noch ein Wort zur Mathematikersprache: die ist ganz fürchterlich. Eine Anhäufung von „Also ist" „Hieraus folgt" „Sei f eine Funktion" „gelte A. Dann gilt:" usw., sprachlich verstümmelte Sätze, in denen z.B. das Gleichheitszeichen die Rolle des grammatikalischen Prädikats übernimmt (... „ist gleich" ...). Genauigkeit bei Begriffen, Aussagen und bei der Argumentation ist das oberste Gebot beim Formulieren mathematischer Texte, und darunter leidet die Schönheit (es sei denn, es gelingt die „Schönheit" einer lückenlosen, einer pfiffigen Argumentation zu erleben). Die Juristensprache ist übrigens auch nicht viel besser, möglicherweise aus ähnlichem Grund wie die der Mathematiker.

Zum Benutzen des Buches: Es besteht aus zwei Teilen mit insgesamt 27 Kapiteln. Unterkapitel werden Abschnitte genannt. Sätze und Definitionen sind kapitelweise durchnumeriert. Die Seitenzahlen sind über die beiden Teile durchlaufend, das Stichwortverzeichnis bezieht sich ebenfalls auf das ganze Buch und ist in beiden Teilen abgedruckt.

Nach den ersten drei Kapiteln sollten die Analysis (Kapitel 4 bis 7) und die Lineare Algebra (Kapitel 8 bis 15) parallel gelesen werden, da in jedem der beiden Bereiche auf den jeweils anderen Bezug genommen wird.

Die Aufgaben stehen im Text jeweils an den Stellen, an denen ein neuer Begriff, das Umgehen mit neuen Aussagen geübt werden sollte. Hinweise zu den Lösungen der Aufgaben stehen gesammelt jeweils am Ende der beiden Teile. Es ist aber klar, daß die Aufgaben nicht eine die Vorlesung begleitende Übung oder die Arbeit und Diskussion in Kleingruppen mit studentischen Tutoren ersetzten können.

Ich danke herzlich

Frau M. Ring für das Setzen der letzten drei Viertel des Buches und die überaus mühsamen Korrekturen des Gesamten,

Herrn Dipl.-Ing. J. Börger für das Setzen des ersten Viertels,

Herrn cand. phys. N. Friese für das Layout und vieles mehr,

Herrn cand. phys. F. Penn, Herrn Dipl.-Phys. E. Zorn und Herrn Dipl.-Phys. K. Jung für ihr sorgfältiges Korrekturlesen und viele Anregungen (alle drei haben den Kurs „Höhere Mathematik für Physiker“ einmal gehört und später als Tutoren oder/und wissenschaftliche Mitarbeiter im Fachbereich Mathematik bei den Übungen mitgearbeitet),

Herrn Dr. J. Asch für das Verfassen von Abschnitt 14.3,

Herrn Dr. R. Weber vom Verlag de Gruyter für seine Ermutigung.

Ohne diese vielfältige Unterstützung und die wohltuende Solidarität der Genannten und anderer bei der Arbeit hätte ich das Buch nicht schreiben können.

Berlin, August 1994 Rainer Wüst

This Page Intentionally Left Blank

Inhaltsverzeichnis

Band 1

Lineare Algebra

Band 2

Eine Aussage ist ... eine Behauptung, die entweder wahr oder falsch ist.

Aristoteles

1. Einiges über Logik[1]

Bevor man über Zahlen, Größen, Zusammenhänge, Funktionen usw. sprechen kann, muß man sich über den Umgang mit Sätzen und Satzfolgen verständigen, in denen solche Begriffe auftauchen.
„Verständigen“ wird dabei – die Mathematik kennzeichnend – in einem stärkeren Sinne verwendet als in der Umgangssprache üblich.
Sind P und Q Personen, so bedeute „P verständigt sich mit Q“:

(1) P versteht, was Q sagt, und umgekehrt,

(2) P akzeptiert, was Q sagt, und umgekehrt.

Wenn freilich nicht über alle, so ist doch über gewisse Dinge Verständigung nach Regeln möglich. Die Lehre von den allgemeinsten Regeln der Verständigung heißt *Logik*, eine Verständigungshandlung gemäß solchen Regeln heißt *Argumentation* (auch *Schließen, Deduzieren*).

Beispiel

(1) Berlin ist eine Stadt.

(2) Wenn Berlin eine Stadt ist, dann ist Berlin kein Dorf.

---

(3) Berlin ist kein Dorf

Die Sätze (1), (2) heißen *Prämissen*, (3) die *Konklusion*, und der waagerechte Strich hat die Bedeutung eines „also“. Auch wenn man sich über die Prämissen streiten kann, so muß doch jeder, der (1) und (2) akzeptiert, auch (3) akzeptieren. So etwas läßt sich in Regeln fassen.

Es ist hier nicht möglich (und auch nicht nötig), mehr als eine Skizze der Logik zu formulieren. Es ist auch fast nicht möglich, beim ersten Durcharbeiten alles zu verstehen. Die im folgenden aufgeschriebenen Regeln werden aber später beim Formulieren und Beweisen von mathematischen Aussagen immer klarer werden und der Umgang mit ihnen immer selbstverständlicher.

[1]Dieses Kapitel orientiert sich an einer Vorlesung von U.-W. Schmincke, TH Aachen, aus deren Einleitung auch das Zitat vor dem Vorwort stammt.

1.1 Aussagenlogik (Junktorenlogik)

Eine *Aussage* ist ein Satz, bei dem es uns sinnvoll erscheint, ihm genau eines der beiden Attribute „Wahr" (W), „Falsch" (F) zuzuordnen, worüber nach einem abgesprochenen Verfahren entschieden können werden muß[2]. Die Attribute W, F heißen *Wahrheitswerte*.
Sprechweisen für „A hat den Wahrheitswert W" sind:

„A ist wahr"
„A gilt"
„A ist erfüllt"

Beispiele
Aussagen sind:

(1) „Berlin ist eine Stadt".
(Entscheidungsverfahren etwa: Stadt heißt eine zusammenhängende Siedlung mit mehr als 10.000 Einwohnern; man gehe zum Einwohnermeldeamt).

(2) „Es gibt eine Zahl mit $x^2 + 2x + 1 = 0$"
(Entscheidungsverfahren: Man gebe eine solche Zahl an, z.B. $x = -1$).

(3) Es gibt ein Perpetuum mobile 1. Art
(Wahrheitswert F (Vereinbarung der Physiker)).

(4) Wenn dieser Tisch rund ist, dann freß' ich einen Besen.
(Wahrheitswert?)

Nichtaussagen sind:

(5) Hans fährt nach München oder Monika fährt nach München und Peter fährt mit.
(Inhalt nicht verstehbar: Fährt nun Peter nur mit, wenn Monika fährt oder auch, wenn Hans fährt?)

(6) Dieser Kaffee ist doppelt so heiß wie dieser hier.
(Was ist „doppelt so heiß"?)

(7) $\sqrt{1 - x^2}$
(Dies ist ein Term, siehe Abschnitt 4.1.)

(8) $x^2 + 2x + 1 = 0$
(Was ist denn x?).

---

[2]Diese Vereinbarung ist nicht präzise und sicherlich abhängig von dem Personenkreis, der sich jeweils über einen Satz verständigen will. In der Schwierigkeit, sich zu einigen, ob ein Satz eine Aussage ist, und darüberhinaus sich über ein Verfahren zur Entscheidung des Wahrheitswertes zu verständigen, unterscheiden sich (weite Bereiche der) Naturwissenschaften von (weiten Bereichen der) Geisteswissenschaften.

Man betrachte z. B. die beiden folgenden Aussagen:
„Dieser Würfel Eisen hat eine Temperatur von $183^0 \pm 4^0 C$."
„Der Umgang der Menschen mit der Erde ist ein Beleg für den Freud'schen Todestrieb."
Es ist offenbar einfacher, sich über ein Verfahren zur Entscheidung des Wahrheitswertes der ersten Aussage zu einigen, als im Falle der zweiten Aussage. In der Physik etwa wird ein solches Entscheidungsverfahren jeweils ein bekanntes (und reproduzierbares!) Experiment sein.

Sind A, B zwei Aussagen, so lassen sich mittels der *Junktoren* (d.h. „Verbinder") neue Aussagen herstellen:

Junktor	Bedeutung (Interpretation)	Zeichen
Negation	nicht A	$\neg A$
Konjunktion	A und B	$A \wedge B$
Adjunktion	A oder B	$A \vee B$
Materiale Implikation	wenn A, dann B	$A \Rightarrow B$
Materiale Äquivalenz	A genau dann, wenn B	$A \Leftrightarrow B$

Die Wahrheitswerte der so zusammengesetzten Aussagen sind festgelegt durch die in der folgenden Tabelle enthaltene Normierung. (Eine Tabelle dieser Art heißt *Wahrheitstafel.*)

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F
F	F	W	F	F	W	W

Es sei betont, daß diese Tabelle eine Normierung, also Festlegung der Bedeutung der Junktoren ist. Für diese Festlegung spricht einzig, daß sie sich als praktisch herausgestellt hat.
Die Adjunktion „$\vee$" ist so normiert, daß $A \vee B$ wahr ist, wenn A wahr oder B wahr oder beide wahr sind, also im nicht-ausschließenden Sinn.
Die Normierung der materialen Implikation „$\Rightarrow$" ist am schwierigsten einzusehen und etwa so zu verstehen: Es ist ausgeschlossen, daß A gilt und nicht B. Ein Beispiel für die letzte Zeile in „$A \Rightarrow B$" (A falsch und B falsch) ist Aussage (4) im Beispiel von p. 2, die also den Wahrheitswert W hat (natürlich nur dann, wenn der Tisch *nicht* rund ist). Ist A die Aussage: „Ich werfe eine Mark in den Automaten", B die Aussage: „Ich bekomme einen Kaffee", und vereinbart man, der Aussage „$A \Rightarrow B$" den Wahrheitswert W zuzuordnen, falls man nicht unzufrieden ist, so erhält man die oben angegebene Normierung.

Übliche Sprechweisen für „$A \Rightarrow B$":

„Wenn A, dann B"
„Aus A folgt B"
„Wenn A gilt, so gilt B"
„B gilt dann, wenn A gilt"
„A gilt nur dann, wenn B gilt"
„A ist hinreichend für B"
„B ist notwendig für A"

Ähnlich sind für „$A \Leftrightarrow B$" die folgenden Sprechweisen üblich:

„A ist äquivalent zu B"
„A gilt dann und nur dann, wenn B gilt"
„A gilt genau dann, wenn B gilt"
„A ist hinreichend und notwendig für B"

Die Buchstaben A, B, ... , die hier als „Platzhalter" für Aussagen verwendet wurden, heißen *(Aussage-) Variablen*, die aus ihnen mittels Junktoren (und Klammern) hergestellten Zeichenreihen heißen *Aussageformen.*

Hier ist eine Lücke: Wir haben nicht vereinbart, nach welchen Regeln die Zeichenreihen gebildet werden dürfen; das wäre die Syntax (Grammatik) der Junktorenlogik. Wir müssen uns beschränken auf die grobe Beschreibung: eine Aussageform ist eine aus Aussagevariablen, Junktoren und Klammern hergestellte Zeichenreihe, die bei *Belegung*, d.h. der Ersetzung der Aussagevariablen durch Aussagen, zu einer Aussage wird. Der Wahrheitswert der so entstandenen Aussage ist dann über die Normierung der Junktoren ermittelbar, wenn die Wahrheitswerte der Einzelaussagen bekannt sind.

Aussageformen sind z.B.

$$A \Rightarrow (B \vee A)$$
$$(A \wedge B) \Rightarrow \big(\neg(\neg A \wedge C) \vee (B \wedge C)\big)$$ [3]
$$(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B) \ .$$

Nun eine erste *Definition*, also eine Vereinbarung, wie ein Begriff oder ein Name im folgenden benützt wird.

Definition 1.1

Eine Aussageform heißt *allgemeingültig* oder *Tautologie*, wenn sie bei jeder Belegung zu einer Aussage mit Wahrheitswert W wird.

Satz 1.1

Die folgenden Aussageformen sind Tautologien:

(1) $A \Rightarrow A$

(2) $A \vee \neg A$

(3) $\neg(A \wedge \neg A)$

(4) $A \Leftrightarrow \neg\neg A$

(5) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

(6) $\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

(7) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

(8) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

(9) $\big(\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)\big) \Leftrightarrow A$

(10) $\big((A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)\big) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$.

---

[3] Wie bei „mal vor plus" bezieht sich $\neg$ immer nur auf die nachfolgende Aussage, und man läßt die Klammern dann weg; d.h. $\neg A \wedge C$ ist zu verstehen als $(\neg A) \wedge C$.
Will man dagegen $A \wedge C$ verneinen, muß man Klammern setzen, also $\neg(A \wedge C)$.

Beweis

Man erstelle die Wahrheitstafeln. Wir führen dies für die Aussageformen (7), (9), (10) durch:

Zu (7):

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$	(7)
W	W	W	F	W	W
W	F	F	F	F	W
F	W	W	W	W	W
F	F	W	W	W	W

Zu (9):

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$B \wedge \neg B$	$\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)$	(9)
W	W	F	F	F	W	W
W	F	F	W	F	W	W
F	W	W	F	F	F	W
F	F	W	W	F	F	W

Zu (10):

A	B	C	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$C \wedge \neg C$	$(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)$	$A \Rightarrow B$	(10)
W	W	W	F	F	F	W	W	W
W	W	F	F	F	F	W	W	W
W	F	W	W	W	F	F	F	W
W	F	F	W	W	F	F	F	W
F	W	W	F	F	F	W	W	W
F	W	F	F	F	F	W	W	W
F	F	W	W	F	F	W	W	W
F	F	F	W	F	F	W	W	W

■

(Der kleine schwarze Kasten bedeutet: Ende des Beweises.)

Aufgabe 1.1

Seien A, B, C Aussagevariablen. Man zeige, daß folgende Aussageformen Tautologien sind.

(1) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big)$

(2) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

(3) $\big((A \wedge B) \vee C\big) \Leftrightarrow \big((A \vee C) \wedge (B \vee C)\big)$.

Aufgabe 1.2

Man zeige:

(1) Seien A, B zwei wahre Aussagen.
Dann ist

$$(A \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \quad \text{wahr.}$$

(2) Seien A, B Aussagevariablen.
Dann ist

$$(A \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \quad \text{keine Tautologie}$$

(also $A \vee B$ nicht logisch äquivalent zu $A \Rightarrow B$, s. Definition 1.2).

Tautologien werden benötigt, um zu „schließen". Wir verwenden zur Abkürzung von Aussageformen Zeichen wie (a), (b), ...

Man schreibt z.B.

$$(a) :\Leftrightarrow \big((\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)) \Leftrightarrow A\big).$$

Das Zeichen „$:\Leftrightarrow$" heißt *definitorische Äquivalenz*, zu verstehen etwa als „habe die gleiche Bedeutung wie". Der Doppelpunkt steht dabei auf der Seite des zur Abkürzung eingeführten Symbols.

Seien nun $(a_1), \cdots, (a_n), (b)$ (n eine natürliche Zahl) Aussageformen.

Eine Zeichenreihe
$$\begin{array}{c} (a_1) \\ (a_2) \\ \vdots \\ (a_n) \\ \hline (b) \end{array}$$

auch geschrieben: $(a_1), \ldots, (a_n) \;\Vdash\; (b)$ heißt *Schluß*.

Definition 1.2

(1) Zwei Aussageformen $(a), (b)$ heißen *logisch äquivalent*,
geschrieben $(a) \;\; \ddot{a}q \;\; (b)$,
wenn $(a) \;\Leftrightarrow\; (b)$ allgemeingültig ist.

(2) Ein Schluß $(a_1), \ldots, (a_n) \Vdash (b)$ heißt *gültig (korrekt)*, wenn

$$\big((a_1) \wedge (a_2) \wedge \cdots \wedge (a_n)\big) \Rightarrow (b)$$

allgemeingültig ist. (Ein gültiger Schluß heißt auch *logische Implikation.*)

Ein korrekter Schluß ist demnach so festgelegt, daß gilt:
Bei jeder Belegung der in dem Schluß auftretenden Aussageformen, bei der alle *Prämissen* (a_1), $\ldots, (a_n)$ wahr sind, ist auch die *Konklusion* (b) wahr. Hat bei einer Belegung etwa eine der Prämissen den Wahrheitswert F, dann auch $(a_1) \wedge (a_2) \wedge \cdots \wedge (a_n)$; damit ist $\big((a_1) \wedge (a_2) \wedge \cdots \wedge (a_n)\big) \Rightarrow (b)$ wahr unabhängig vom Wahrheitswert von (b).

Satz 1.2

(1) Es gilt:

(i) $\neg(A \Rightarrow B) \;\; \ddot{a}q \;\; (A \wedge \neg B)$

(ii) $\big(\neg A \Rightarrow (C \wedge \neg C)\big) \;\; \ddot{a}q \;\; A$

(iii) $\big((A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)\big) \;\; \ddot{a}q \;\; (A \Rightarrow B)$

(2) Folgende Schlüsse sind korrekt:

(i) $A \wedge \neg A \quad \Vdash \quad B$

(ii) $A, A \Rightarrow B \quad \Vdash \quad B$

(iii) $A \Rightarrow B,\ \neg B \quad \Vdash \quad \neg A$

(iv) $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \quad \Vdash \quad A \Rightarrow C$

(v) $\neg A \Rightarrow (C \wedge \neg C) \quad \Vdash \quad A$

(vi) $A, \big[(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)\big] \quad \Vdash \quad B$

Bemerkungen

(1) Die Sätze 1.1 und 1.2 beinhalten Aussagen über Aussageformen. Die Beweise sind der Nachweis, daß diese Aussagen den Wahrheitswert W haben, wobei hier die Wahrheitstafeln das Entscheidungsverfahren liefern.

(2) Sind (a) und (b) logisch äquivalente Aussageformen, so kann in jeder Aussageform (c), die (a) als Teil enthält, (a) durch (b) ersetzt werden, ohne daß sich die „Bedeutung" von (c) ändert, d.h. bei jeder Belegung hat (c) vor und nach dem Ersetzen jeweils den gleichen Wahrheitswert.

(3) (2) (i) aus dem Satz oben ist das „ex falso quodlibet" : aus etwas Falschem kann man auf alles schließen.
(2) (ii) entspricht dem üblichen direkten Beweis der Aussage B unter Voraussetzung A.
(v) und (vi) in (2) geben die logische Struktur eines *indirekten* oder *Widerspruchsbeweises* wieder. In (2)(v): „Wenn aus $\neg A$ ein *Widerspruch* (d.h. eine Aussageform, die bei jeder Belegung falsch ist) folgt, dann gilt A." In (2)(vi): „Wenn A gilt, und aus $A \wedge \neg B$ ein Widerspruch folgt, dann gilt B."

(4) In Satz 1.2 sind die Aussagevariablen auch durch Aussageformen ersetzbar.

Beweis (von Satz 1.2)

zu (1):	(i)	mit (8) in Satz 1.1
	(ii)	mit (9) in Satz 1.1
	(iii)	mit (10) in Satz 1.1
zu (2):	(i), (ii), (iii)	mit Wahrheitstafeln
	(iv)	mit (6) in Satz 1.1
	(v)	mit (9) in Satz 1.1
	(vi)	mit (10) in Satz 1.1 und (2)(ii) in Satz 1.2

■

Aufgabe 1.3

Seien A, B Aussagevariablen. Man zeige unter Benutzung von Aufgabe 1.1 (1), (2) und Satz 1.1 (8):

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \text{ äq } \big((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)\big) .$$

Aufgabe 1.4

Seien A, B Aussagevariablen. Welche der folgenden Schlüsse sind korrekt?

(i) $\neg A, A \Rightarrow B \quad \Vdash \quad \neg B$

(ii)	$A, A \Rightarrow B$	$\not\models$	B
(iii)	$\neg B, A \Rightarrow B$	$\not\models$	$\neg A$
(iv)	$B, A \Rightarrow B$	$\not\models$	A

Aufgabe 1.5

Man überlege, welche der folgenden Aussagen durch Belegung eines korrekten Schlusses entstanden sind:

(i) Wenn F zuhause ist, brennt sein Licht. Sein Licht brennt nicht. Also ist F nicht zuhause.

(ii) Wenn F nicht zuhause ist, ist sein Auto nicht vor der Tür. F ist zuhause. Also ist sein Auto vor der Tür.

1.2 Quantoren

Streicht man in einer Aussage einen oder mehrere *Dingnamen* (das sind Wörter oder Zeichen, die etwas kennzeichnen oder benennen), so erhält man ein *Prädikat*. Die Anzahl der entstandenen Leerstellen heißt *Stellenzahl* des Prädikats, z.B.

einstellige Prädikate:

(1) „... ist eine Stadt",

(2) „... ist durch zwei teilbar",

(3) „... ist sterblich",

zweistellige Prädikate:

(4) „Die Differenz zwischen ... und ... ist ein Vielfaches von vier",

(5) „... ist mit ... befreundet",

dreistellige Prädikate:

(6) „Die Differenz zwischen ... und ... ist ein Vielfaches von ... ".

Prädikate werden abgekürzt durch

$A(\ ), B(\ ), \cdots$ (einstellige Prädikate)
$A(\ ,\ ), B(\ ,\ ), \cdots$ (zweistellige Prädikate),

z.B. $A(\ )$ $:\Leftrightarrow$ ... ist eine Stadt.
$A(\ ,\ )$ $:\Leftrightarrow$ ... ist mit ... befreundet.

(Gleichzeitig werden diese Zeichen als Platzhalter für Prädikate, also als *Prädikatvariablen* verwendet.)

Setzt man in die Leerstellen eines Prädikats geeignete Dingnamen ein, so erhält man eine Aussage. Man muß sich freilich einigen, welche Dingnamen an welcher Stelle eingesetzt werden dürfen; diese Dingnamen nennt man *zulässig*. Meistens wird im folgenden klar sein, welche Dingnamen zulässig sind; wenn nicht, muß darüber erst Einigkeit erzielt werden, bevor das Prädikat verwendet wird.

Wir erweitern nun den Begriff Aussageform von p. 4:

Eine Zeichenreihe, gebildet aus Aussagevariablen, Dingvariablen (d.h. Platzhaltern für Dingnamen), Prädikaten, Prädikatvariablen und Junktoren, die bei Belegung, d.h. Ersetzen von Aussagevariablen durch Aussagen, Prädikatvariablen durch Prädikate bzw. Dingvariablen durch (zulässige) Dingnamen, zu einer Aussage wird, heißt *Aussageform.*

Z.B.: $(A \wedge A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow C(x,y)$, [4]
x ist sterblich,
x ist mit y befreundet $\vee\, C$,
x ist durch 2 teilbar.

Nehmen wir eine Streichholzschachtel mit 17 Streichhölzern.
Seien $s_1, \cdots, s_{17}$ die (Namen der) Streichhölzer, die dann (die einzigen) zulässigen Dingnamen des Prädikats

$$A(\ ) \quad :\Leftrightarrow \quad \ldots \text{ ist abgebrannt}$$

seien.

Man kann dann mit $A(\ )$ Aussagen herstellen:

$A(s)$, wobei s eines der siebzehn Streichhölzer ist,

$A(s_1) \wedge A(s_2) \wedge \cdots \wedge A(s_{17})$, also die Aussage:
alle Streichhölzer sind abgebrannt

$A(s_1) \vee A(s_2) \vee \cdots \vee A(s_{17})$, also die Aussage:
(wenigstens) ein Streichholz ist abgebrannt.

Allgemein:

Sei $A(\ )$ ein einstelliges Prädikat. Dann läßt sich aus der Aussageform $A(x)$ auf folgende Weisen eine Aussage herstellen:

(1) Man ersetzt die Dingvariable x durch einen (zulässigen) Dingnamen.

(2) Man setzt vor $A(x)$ die Wendung: für alle x, abgekürzt durch $\bigwedge_x$, also: $\bigwedge_x A(x)$,
gesprochen: für alle x gilt $A(x)$.

(3) Man setzt vor $A(x)$ die Wendung: es gibt ein x, abgekürzt durch $\bigvee_x$, also: $\bigvee_x A(x)$,
gesprochen: es gibt (wenigstens) ein x mit $A(x)$.

Die Zeichen $\bigwedge$, $\bigvee$, ein „großes“ $\wedge$ bzw. $\vee$, heißen *Allquantor*, bzw. *Existenzquantor*,[5] das Vorschalten von Quantoren nennt man *Quantifizieren.*

[4] Man versuche als Übung, aus dieser Aussageform durch Belegung eine Aussage zu erhalten.

[5] Andere (weniger übliche) Zeichen sind $\forall$ und $\exists$, wobei die Korrespondenz durch $\bigwedge \leftrightarrow \forall$, $\bigvee \leftrightarrow \exists$ gegeben ist.

Ist $A(\ ,\ )$ ein zweistelliges Prädikat, so sind

$$A(y) \quad :\Leftrightarrow \quad \bigwedge_x A(x,y)\ ,$$

$$B(y) \quad :\Leftrightarrow \quad \bigvee_x A(x,y)$$

wieder Aussageformen.
Man nennt dann x eine *gebundene*, y eine *freie Variable.*

(Diese Namen werden später auch bei gewissen *Termen* (s. Abschnitt 4.1) benutzt: in

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad , \quad \int_a^x \frac{1}{t} dt$$

sind k, t gebundene, n, a, x freie Variablen.)

Gebundene Variablen können durch beliebige andere Variablen, die nicht frei in der Aussageform auftauchen, ersetzt werden, d.h.

$$\bigwedge_x A(x,y) \quad , \quad \bigwedge_t A(t,y) \quad , \quad \bigwedge_* A(*,y)$$

sind die gleichen Aussageformen. Dagegen ist $\bigwedge_y A(y,y)$ natürlich etwas anderes.

Durch zweifaches Quantifizieren erhält man aus $A(\ ,\ )$ acht Aussagen:

$$\bigwedge_y \bigwedge_x A(x,y) \qquad\qquad \bigvee_y \bigwedge_x A(x,y)$$

$$\bigvee_y \bigvee_x A(x,y) \qquad\qquad \bigwedge_y \bigvee_x A(x,y)$$

und die entsprechenden, wenn x unter dem ersten und y unter dem zweiten Quantor steht.

Die logischen Regeln für den Umgang mit Quantoren, genauer:

> die allgemeingültigen (d.h. bei jeder Belegung wahren) Formeln, in denen Quantoren auftreten, heißen *Quantorenregeln.*

Z.B. sei $A(\ )$ ein einstelliges Prädikat. Dann sind allgemeingültig (*de Morgan'sche Regeln*):

$$\neg \bigwedge_x A(x) \quad \Leftrightarrow \quad \bigvee_x \neg A(x)$$

$$\neg \bigvee_x A(x) \quad \Leftrightarrow \quad \bigwedge_x \neg A(x)$$

Wie in der Aussagenlogik schreibt man dann

$$\neg \bigwedge_x A(x) \quad \text{äq} \quad \bigvee_x \neg A(x).$$

Falls das Prädikat $A(\ )$ nur endlich viele zulässige Dingnamen hat, dann erhält man die de Morgan'schen Regeln aus den logischen Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \neg(A \wedge B) &\quad \text{äq} \quad \neg A \vee \neg B\,, \\ \neg(A \vee B) &\quad \text{äq} \quad \neg A \wedge \neg B\,. \end{aligned}$$

Mit obigem Beispiel der 17 Streichhölzer $s_1, \ldots, s_{17}$ und der Aussageform

$$A(\ ) \quad :\Leftrightarrow \quad \ldots \text{ ist abgebrannt}$$

gilt also:

$$\begin{aligned} \neg \bigwedge_x A(x) &\Leftrightarrow \neg\big(A(s_1) \wedge A(s_2) \wedge \cdots \wedge A(s_{17})\big) \\ &\Leftrightarrow \neg A(s_1) \vee \neg A(s_2) \vee \cdots \vee \neg A(s_{17}) \\ &\Leftrightarrow \bigvee_x \neg A(x). \end{aligned}$$

Weitere Quantorenregeln:

$$\begin{aligned} \bigwedge_x \big(A(x) \wedge B(x)\big) &\Leftrightarrow \bigwedge_x A(x) \wedge \bigwedge_x B(x) \\ \bigvee_x \big(A(x) \vee B(x)\big) &\Leftrightarrow \bigvee_x A(x) \vee \bigvee_x B(x) \\ \Big(\bigwedge_x A(x) \vee \bigwedge_x B(x)\Big) &\Rightarrow \bigwedge_x \big(A(x) \vee B(x)\big) \\ \bigvee_x \big(A(x) \wedge B(x)\big) &\Rightarrow \Big(\bigvee_x A(x) \wedge \bigvee_x B(x)\Big) \\ \bigwedge_x \big(A(x) \Rightarrow B(x)\big) &\Rightarrow \Big(\bigvee_x A(x) \Rightarrow \bigvee_x B(x)\Big) \\ \bigwedge_x \big(A(x) \Rightarrow B(x)\big) &\Rightarrow \Big(\bigwedge_x A(x) \Rightarrow \bigwedge_x B(x)\Big) \\ \bigwedge_x \bigwedge_y A(x,y) &\Leftrightarrow \bigwedge_y \bigwedge_x A(x,y) \\ \bigvee_x \bigvee_y A(x,y) &\Leftrightarrow \bigvee_y \bigvee_x A(x,y) \\ \bigvee_x \bigwedge_y A(x,y) &\Rightarrow \bigwedge_y \bigvee_x A(x,y) \end{aligned}$$

Diese Regeln entsprechen durchweg den vom sogenannten gesunden Menschenverstand erzeugten Wünschen, wie man erkennt, wenn man sie in der Umgangssprache formuliert.

Z.B. die 4. Regel:
Wenn es ein x gibt so, daß $A(x)$ und $B(x)$ gelten (also der Vorsatz wahr ist; denn nur dann ist etwas zu zeigen), dann gibt es sicher ein x_1 so, daß $A(x_1)$ und ein x_2 so, daß $B(x_2)$ gilt (etwa x_1 und x_2 gleich dem x, für das $A(x) \wedge B(x)$ gilt).

Daß in der letzten Regel „$\Rightarrow$“ nicht durch „$\Leftrightarrow$“ ersetzt werden darf, also i.a.

$$\bigvee_x \bigwedge_y A(x,y) \quad \text{und} \quad \bigwedge_y \bigvee_x A(x,y)$$

Aussagen mit verschiedenem Wahrheitswert sind, wird durch folgendes Beispiel einsichtig:

$$A(x,y) \quad :\Leftrightarrow \quad y \text{ kann mit } x \text{ glücklich werden,}$$

wobei wir für x Namen von Frauen und für y Namen von Männern zulassen:

$$\bigwedge_y \bigvee_x A(x,y)$$

hat dann die Bedeutung: zu jedem Mann gibt es eine Frau, mit der er glücklich werden kann. Dagegen bedeutet

$$\bigvee_x \bigwedge_y A(x,y) :$$

es gibt eine Frau, mit der alle Männer glücklich werden können.

Aufgabe 1.6

(1) Man formuliere folgende Aussagen mit Hilfe von Quantoren, negiere sie und formuliere die Negation wieder in der Umgangssprache.

  (i) Für jede positive reelle Zahl ε gibt es eine positive reelle Zahl δ so, daß für alle positiven reellen Zahlen x gilt: Ist $x < \delta$, dann ist $x^2 < \varepsilon$.

  (ii) Zu jeder positiven Zahl ε gibt es eine natürliche Zahl N so, daß für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq N$ gilt: $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

(2) Man vertausche in der (wahren) Aussage (ii) die ersten beiden Quantoren und versuche, die so entstandene Aussage als falsch zu erkennen.

Die Quantorenregeln (die aus dem Kalkül der Quantorenlogik stammen, auf den wir hier nicht weiter eingehen wollen) sind verträglich mit dem sogenannten Kalkül des natürlichen Schließens. Dieser läßt sich exemplarisch so beschreiben:

Sind etwa $A(\ )$ und $B(\ )$ Prädikate mit reellen Zahlen als zulässige Dingnamen, dann darf man bei der Untersuchung der Aussage

$$\bigwedge_x \big(A(x) \quad \Rightarrow \quad B(x)\big) \tag{1}$$

vorgehen, indem man beginnt mit: sei x eine reelle Zahl. Dann darf x behandelt werden wie der Name einer festen Zahl und folglich $A(x)$ und $B(x)$, als wären es Aussagen. Läßt sich dann $A(x) \Rightarrow B(x)$ ableiten, so ist Aussage (1) bewiesen.

Z.B. $A(x) \quad :\Leftrightarrow \quad x > 1 \quad , \quad B(x) \quad :\Leftrightarrow \quad x^2 > x$

Beh.: $\bigwedge_x (x > 1 \;\Rightarrow\; x^2 > x)$

Bew.: Sei x eine reelle Zahl.

1. Fall: $x \leq 1$, dann ist $A(x)$ falsch, also $A(x) \;\Rightarrow\; B(x)$ wahr.

2. Fall: $x > 1$. Dann ist insbesondere $x > 0$ und die „Ungleichung“ $x > 1$ darf mit x multipliziert werden. Dies gibt $x^2 > x$, also $B(x)$. Somit ist $A(x) \;\Rightarrow\; B(x)$ wahr.

Die Aussage in der Behauptung ist damit bewiesen.

1.3 Mengen

Bisher hatten wir die Aussage „Hans hat ein Auto“ aufgegliedert wie folgt:

$$\underbrace{\textit{Hans}}_{\text{Dingname}} \quad \underbrace{\textit{hat ein Auto}}_{\text{Prädikat}}.$$

Die Idee der Mengenlehre ist nun, solche Aussagen auf die einheitliche Form „x ist y“ zu bringen, zu interpretieren als: „x erfüllt das Prädikat y“. In obigem Beispiel: „Hans ist Auto-habender“ oder besser „Hans ist Autobesitzer“. Nun kann man das Prädikat „Autobesitzer sein“ wieder als „Ding“ auffassen, (z.B. in das Prädikat „ … ist keine exklusive Eigenschaft“ einzusetzen). Unser Beispielsatz wird dann neu gegliedert:

$$\underbrace{\textit{Hans}}_{\text{Dingname}} \quad \underbrace{\textit{ist}}_{\text{Prädikat}} \quad \underbrace{\textit{Autobesitzer}}_{\text{Dingname}}.$$

Die *Mengenlehre* läßt sich wie folgt charakterisieren:

(1) Der Dingbegriff wird erweitert, indem Dinge, einstellige Prädikate, einstellige Prädikate von Prädikaten, … als „Dinge“ behandelt werden, die die Objekte der Sprache sind und einheitlich *Klassen* genannt werden. D.h. man geht auf eine neue Weise mit Prädikaten um. In unserem Beispiel wird – grob gesprochen – das Prädikat „Autobesitzer sein“ identifiziert mit einem Topf, in dem alles drin ist, was das Prädikat „Autobesitzer sein“ erfüllt. Man schreibt

$$A \;:=\; \{x \mid x \text{ ist Autobesitzer}\} ,$$

gesprochen: A ist definitorisch gleich der Klasse (bzw. Menge, s. unter (3)) aller x, die das Prädikat „Autobesitzer sein“ erfüllen.

(2) Ein spezielles zweistelliges Prädikat, nämlich „ … ist … “ wird ausgezeichnet, und es werden Regeln über den Umgang mit ihm vereinbart. Es wird mit „$\in$“ bezeichnet, und man schreibt statt $\in (x, y)$ immer: $x \in y$.
„$\in$“ darf nur in Bedeutung der folgenden Art verwendet werden:

… ist Element von …
… kommt in … vor
… hat die Eigenschaft …
… ist Mitglied von …

(3) Gewisse „gutartige“ Klassen werden ausgezeichnet und dann Mengen genannt.

Der Begriff „Menge“ wurde von G. Cantor (1845-1918) wie folgt eingeführt:

> „Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Mit den bisher bereitgestellten Begriffen ausgedrückt, bedeutet das: Ist $A(\ )$ ein einstelliges Prädikat, dann gibt es eine Klasse y, die genau diejenigen Elemente x enthält, für die $A(x)$ gilt, oder, in Zeichen:

$$\bigvee_y \bigwedge_x (x \in y \ \Leftrightarrow\ A(x)) \ . \tag{1}$$

Dies entspricht unseren Wünschen (wird in dem Bereich der Mathematik, der auf uns zukommt, auch erfüllt sein), führt aber schnell zu Widersprüchen:

Beschränken wir uns auf die Bücher x, y, ... einer Bibliothek.
$x \in y$ habe die Bedeutung: das Buch x ist im Buch y registriert.

Ein Bibliothekar habe den Auftrag, zu Eigenschaften, die Bücher haben können (dargestellt durch Prädikate $A(\ )$, $B(\ )$, ... , z.B. „ ... ist vor 1970 erschienen“, „ ... hat mehr als 1000 Seiten“, „ ... ist auf rosa Papier gedruckt“) gemäß (1) einen Registerband anzulegen. Das geht eine Weile gut, bis er einen Band y anlegen will, in dem genau diejenigen Bücher registriert sind, die sich nicht selbst registrieren, also

$$\bigwedge_x (x \in y \ \Leftrightarrow\ x \notin x) \ .$$

$\big($das Zeichen $\notin$ ist definiert durch $\ x \notin y :\Leftrightarrow \neg(x \in y)\big)$.

Was ist mit diesem Band y selbst? Registriert er sich nicht, dann muß er sich registrieren, registriert er sich selbst, dann darf er sich nicht registrieren, also:

$$y \in y \ \Leftrightarrow\ y \notin y \ .$$

So ein y gibt es nicht, also

$$\neg \bigvee_y \bigwedge_x (x \in y \ \Leftrightarrow x \notin x) \ .$$

Das ist die *Russell-Antinomie* in einer der vielen möglichen Einkleidungen.

Ausweg: Eine Klasse x heißt *Menge*, wenn es eine Klasse y gibt mit $x \in y$,

$$Mg(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \bigvee_y (x \in y) \ .$$

Dann gilt: $$\bigvee_y \bigwedge_x \Big(x \in y \ \Leftrightarrow\ \big(A(x) \text{ und } Mg(x)\big)\Big) \ .$$