SVEN BODO WIRSING

SEPARABILITÄT IN KOMMUTATIVEN UND AUFLÖSBAREN ALGEBREN

Unter Berücksichtigung nicht-unitärer assoziativer Algebren. Mit 241 Übungsaufgaben

disserta Verlag

Wirsing, Sven Bodo: Separabilität in kommutativen und auflösbaren Algebren. Unter Berücksichtigung nicht-unitärer assoziativer Algebren. Mit 241 Übungsaufgaben. Hamburg, disserta Verlag, 2015

Buch-ISBN: 978-3-95935-176-8
PDF-eBook-ISBN: 978-3-95935-177-5
Druck/Herstellung: disserta Verlag, Hamburg, 2015

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der Strukturtheorie assoziativer Algebren spielen das Nilradikal und seine Faktorstruktur eine zentrale Rolle. Das Nilradikal führt zur Untersuchung nilpotenter und seine Faktorstruktur zur Untersuchung halbeinfacher Algebren. Ist die Radikalfaktorstruktur einer endlich-dimensionalen assoziativen unitären Algebra separabel, so besagt der Satz von Wedderburn-Malcev, daß die Algebra eine zur Radikalfaktorstruktur isomorphe Teilalgebra besitzt und daß je zwei solche Teilalgebren, die in dieser Arbeit auch Radikalkomplemente genannt werden, unter der Einheitengruppe der Algebra konjugiert sind. Eine Einführung in diese Theorie wird im ersten Kapitel dieser Arbeit bereitgestellt. Dort betrachten wir auch Beispiele separabler Algebren und Beispiele zur Thematik des Satzes von Wedderburn-Malcev.

In der gängigen Literatur wird der Satz von Wedderburn-Malcev durchweg nur für unitäre Algebren bewiesen. Anschließend wird kurz erwähnt, daß jede Algebra in eine unitäre eingebettet und demzufolge der Satz auch für nicht notwendig unitäre Algebren gilt (vgl. z.B. [4], erster Absatz auf Seite 3). Somit ist ein Vorschlag für diese Erweiterung vorhanden, doch existiert in der gängigen Literatur kein Beweis dazu. Deswegen widmen wir uns diesem Beweis in Kapitel 2 dieses Werkes.
Durch eine genaue Analyse der im ersten Abschnitt dieses Kapitels (Adjunktion einer Eins) vorgestellten Einbettung sowie durch eine Untersuchung halbeinfacher Algebren in Hinblick auf die Existenz eines Einselementes können wir im zweiten Abschnitt die Existenzaussage des Satzes von Wedderburn-Malcev für nicht notwendig unitäre Algebren beweisen.
Danach stellt sich die Frage, in welchem Sinne zwei Radikalkomplemente in nicht-unitären Algebren konjugiert sein könnten. Deswegen betrachten wir im dritten Abschnitt die Sterngruppe, eine Verallgemeinerung der Einheitengruppe einer assoziativen Algebra. Das Zusammenspiel der Sterngruppe mit der Adjunktion einer Eins wird untersucht mit dem Ergebnis, daß je zwei Radikalkomplemente unter der Sterngruppe konjugiert sind. Das bedeutet, daß die Sterngruppe vermöge Konjugation transitiv auf der Menge der Radikalkomplemente operiert.
Demzufolge widmen wir uns im vierten Abschnitt dieser Operation und bestimmen den zugehörigen Stabilisator und somit auch die Kardinalität

der Menge der Radikalkomplemente. Im Falle der Algebra der unteren Dreiecksmatrizen werden wir diese Kardinalität explizit berechnen.
Im letzten Abschnitt des zweiten Kapitels beginnen wir mit der Untersuchung von Verträglichkeitsbeziehungen des Satzes von Wedderburn-Malcev mit Teil- und Faktorstrukturen. Dabei liegt dieser Untersuchung die Idee zu Grunde, aus Radikalkomplementen der Algebra Radikalkomplemente für Teil- und Faktorstrukturen zu gewinnen. Daß keine allgemeinen Resultate für Teilalgebren zu erwarten sind, wird an einem Beispiel gezeigt. Allerdings liefern eine Schnittbildung bei zentralen Teilalgebren und Idealen sowie eine Faktorisierung bei Faktorstrukturen befriedigende Ergebnisse.

Da unter den Voraussetzungen des Satzes von Wedderburn-Malcev die Existenz eines Radikalkomplementes garantiert wird, stellen sich sofort zwei Fragen: Wie berechnet man konkret ein Radikalkomplement und wie stellt man ein Element der Algebra als Summe aus einem Radikalelement und einem Element eines Radikalkomplementes konstruktiv dar? Diesen Fragen und der der Verträglichkeit mit Teilstrukturen gehen wir in den nächsten Kapiteln nach, sie sind die Hauptfragen dieser Arbeit. Allerdings spezialisieren wir nun die betrachteten Algebren und erhalten dadurch Antworten auf unsere Fragestellungen.

In Kapitel 3 betrachten wir auflösbare assoziative Algebren, die in der einschlägigen Literatur noch nicht behandelt wurden. Lediglich in [2] werden einige verblüffende Strukturaussagen über auflösbare Algebren hergeleitet, nicht zuletzt motiviert durch Solomons Algebra und deren enge Verknüpfung mit der Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen. Der Begriff der auflösbaren Algebra erweitert in natürlicher Weise den der kommutativen Algebra. Deshalb dient die Einführung und Analyse dieser Algebren hier auch der Vorbereitung des letzten Kapitels.
Im ersten Abschnitt des dritten Kapitels sehen wir, daß die endlich-dimensionalen auflösbaren Algebren diejenigen mit kommutativer Radikalfaktorstruktur sind. In Abschnitt zwei zeigt sich dann, dass eine endlich-dimensionale assoziative Algebra für einen Körper der Charakteristik ungleich 2 genau dann auflösbar ist, wenn ihre assoziierte Lie-Algebra auflösbar ist. Mit dem Satz von Cartan erhalten wir daraus eine Kennzeichnung auflösbarer assoziativer Algebren mittels einer gewissen symmetrischen Bilinearform. Die Kennzeichnung auflösbarer assoziativer Algebren durch ihre assoziierte Lie-Algebra wirft die Frage auf, wie die auflösbaren Stufen der beiden Algebren zusammenhängen. Dieser Frage gehen wir durch Behandlung der Dreiecksmatrizen nach, und es zeigt sich, daß in den Beispielen diese Stufen und die ihrer auflösbaren Einheitengruppe übereinstimmen.
An einem etwas größeren Beispiel werden die Resultate des dritten Kapitels konkretisiert und abschließend die Bedeutung der Dreiecksmatrizen für

auflösbare assoziative Algebren untersucht.

Die in Kapitel 4 betrachteten Algebren, die von den verallgemeinerten Quaternionenalgebren abgeleitet werden können, liefern Beispiele für kommutative Algebren. Mit diesen Algebren werden die Resultate des fünften Kapitels illustriert. Des Weiteren wird eine Algebra, die zwei nicht-konjugierte Radikalkomplemente besitzt, vorgestellt. In der gängigen Literatur findet man zu dieser Fragestellung nur sehr wenige Beispiele. Schließlich werden in einem Exkurs die in Kapitel 4 betrachteten Algebren in Hinblick auf Isomorphie klassifiziert.

Bezüglich der Hauptfragen dieser Arbeit werden die meisten Ergebnisse bei kommutativen Algebren (Kapitel 5) erzielt. Diese Algebren zeichnen sich dadurch aus, daß sie genau ein Radikalkomplement besitzen. Standardbeispiele kommutativer Algebren sind Zentren von Algebren. Mit der Idee der Verträglichkeit können wir das Radikalkomplement des Zentrums von 'außen' beschreiben: Schnittbildung jedes Radikalkomplementes mit dem Zentrum liefert das Radikalkomplement des Zentrums. Bei auflösbaren assoziativen Algebren ist das Radikalkomplement des Zentrums schlicht der Schnitt aller Radikalkomplemente der Algebra.
Nach dieser externen Beschreibung beschäftigen wir uns mit dem Innenleben kommutativer Algebren. Das Radikalkomplement wird als die Menge der Elemente, deren Minimalpolynom quadratfrei und separabel ist, identifiziert. Solche Elemente werden in dieser Arbeit auch vollseparabel genannt. Auch die Zerlegungsfrage kann beantwortet werden, indem die Jordan-Zerlegung für Zerfallsendomorphismen verallgemeinert wird. Diese Zerlegung kann durch Lösen von Kongruenzen im Polynomring berechnet werden. In der vorgestellten allgemeineren Version müssen, grob gesagt, zusätzlich nur Divisionen mit Rest durchgefürt werden. Bei der Verallgemeinerung der Jordan-Zerlegung treten zwei Teilalgebren auf, die den Zusammenhang mit der bekannten Jordan-Zerlegung für Zerfallsendomorphismen klären: die Teilalgebra der diagonalisierbaren und die der zerfallenden Elemente. Deswegen untersuchen wir die Beziehungen zwischen diesen beiden Teilalgebren, dem Radikal sowie dem Radikalkomplement.
Dabei werden wir zunächst voraussetzen, daß die Algebra unitär ist. Mit einer Untersuchung von Minimalpolynomen bei Algebren werden schließlich die gewonnenen Ergebnisse mit der Methode aus Kapitel 2 (Adjunktion einer Eins) auf nicht notwendig unitäre Algebren erweitert.
Zum Abschluß dieser Arbeit untersuchen wir auflösbare assoziative Algebren bezüglich unserer Hauptfragen. Es zeigt sich, daß wir die Zerlegungsfrage mittels der verallgemeinerten Jordan-Zerlegung beantworten und die Radikalkomplemente mit der Menge der vollseparablen Elelemente kennzeichnen können.

Notation

Zahlbereiche und Mengen

$\mathbb{P}$	Menge der Primzahlen
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen ohne 0
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{H}$	Menge der reellen Quaternionen
$\underline{n}$	$\{a \mid a \in \mathbb{N}, a \leq n\}$
$[x]$	größte ganze Zahl kleiner gleich x (Gauss-Klammer)
$A \times B$	Menge aller Paare $(a; b)$ mit $a \in A$ und $b \in B$
M^n	Menge der n-Tupel über der Menge M

Körper und Polynomringe

$(K; L)$	Körpererweiterung mit Oberkörper L und Unterkörper K
$K[t_1, ..., t_n]$	Polynomring in den Variablen $t_1, ..., t_n$ über dem Körper K
$K(t_1, ..., t_n)$	Quotientenkörper von $K[t_1, ..., t_n]$
$grad(f)$	Grad des Polynoms $f \in K[t]$
$char(K)$	Charakteristik des Körpers K
(f)	Schreibweise für das Hauptideal $fK[t]$ von $K[t]$
$K[a]$	kleinste unitäre Teilalgebra einer K-Algebra, die a enthält
$GF(p), p \in \mathbb{P}$	andere Bezeichnung für den Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
$halb(f)$	Produkt der verschiedenen irreduziblen Teiler des Polynoms f
$max(f)$	größte Vielfachheit der irreduziblen Teiler in der Primfaktorzerlegung des Polynoms f

Gruppen und Magmen

G/U	Menge der Rechtsrestklassen der Untergruppe U in der Gruppe G
$G \times H$	äußeres direktes Produkt der Gruppen G und H
$Stab_G(m)$	Stabilisator des Elementes m einer G-Menge
mG	Bahn des Elementes m einer G-Menge

$st(G)$	auflösbare Stufe der auflösbaren Gruppe G
$[g, h]$	Kommutator der Elemente g, h einer Gruppe
$G^{'}$	Kommutatorgruppe der Gruppe G
$G^{(n)}$	n-te Ableitung der Gruppe G
S_n	symmetrische Gruppe auf $\underline{n}$
A_n	alternierende Gruppe auf $\underline{n}$
D_{2n}	Diedergruppe der Ordnung $2n$
Q_{4n}	Quaternionengruppe der Ordnung $4n$
$O_p(G), p \in \mathbb{P}$	Schnitt aller p-Sylow-Untergruppen der endlichen Gruppe G
$Aut(M)$	Menge der Automorphismen des Magmas M

Vektorräume und Matrizen

$\langle T \rangle_K$	K-Erzeugnis einer Menge T von Vektoren
Kv	abkürzend für $\langle v \rangle_K$
$End_K(V)$	Menge der K-Endomorphismen des K-Vektorraums V
$f(k)$	Einsetzen von k in das Polynom f
$dim_K(V)$	Dimension des K-Vektorraums V
$U \oplus_K W$	innere direkte Summe der Teilräume U und W eines Vektorraums
$V \otimes_K W$	Tensorprodukt der K-Vektorräume V und W
$v \otimes w$	Tensoren eines Tensorproduktes
$\alpha \otimes \beta$	Tensorprodukt der linearen Abbildungen α und β
$Spur$	die Spurabbildung
$M_B(\alpha)$	darstellende Matrix der linearen Abbildung α in der Basis B
A_{ij}	$(i; j)$-Eintrag der Matrix A
a_{ij}	$(i; j)$-Eintrag der Matrix $A = (a_{ij})$
$K^{n \times m}$	$n \times m$-Matrizenraum über K
$GL(n, K)$	Einheitengruppe von $K^{n \times n}$
$rad(f)$	Radikal der symmetrischen Bilinearform f
$QA(K)$	Menge der Quadrate des Körpers K
$Pot(n, K)$	Menge der n-ten Potenzen des Körpers K
τ	das Transponieren auf $K^{n \times n}$

Algebren

$(K, A), A^K$	Adjunktion einer Eins
φ	Einbettung von A in (K, A)
$\bigoplus_{i=1}^{r} A_i$	äußere direkte Summe der Algebren A_i
A^-, A^{op}	die zu der Algebra A entgegengesetzte/inverse Algebra
$\cdot_{op}$	$a \cdot_{op} b := ba$
A_L	Grundringerweiterung von A, $A \otimes_K L$
$Aut_K(A)$	Menge der K-Algebrenautomorphismen der K-Algebra A
$Z(A)$	Zentrum der Algebra A
$C_A(T)$	Zentralisator der Teilmenge T der Algebra A

$N_A(T)$	Normalisator der Teilmenge T der Algebra A
$\langle T\rangle_{\trianglelefteq_{\mathcal{A}}}$	Idealerzeugnis der Teilmenge T in einer Algebra
α_a	Verschiebung um a in einer Algebra
$N(A)$	Nullteilermenge der Algebra A
$J(A)$	Jacobson-Radikal der Algebra A

Assoziative Algebren

D_n	Solomon-Algebra
$\Delta u, n$	Menge der unteren Dreiecksmatrizen von $K^{n\times n}$
$\Delta o, n$	Menge der oberen Dreiecksmatrizen von $K^{n\times n}$
$D(n, K)$	Menge der Diagonalmatrizen von $K^{n\times n}$
$E(A)$	Einheitengruppe der assoziativen unitären Algebra A
κ_e	Konjugation mit der Einheit e in einer assoziativen Algebra
a^e bzw. T^e	abkürzend für $a\kappa_e$ bzw. für $T\kappa_e$
$*$	die Sternverknüpfung
$Q(A)$	quasireguläre Gruppe der assoziativen Algebra A
$A^\star$	A als Sterngruppe
$e^{(-1)}$	das Inverse zum quasiregulären Element e
$\kappa_{(e)}$	Konjugation mit dem quasiregulären Element e
$a^{(e)}$ bzw. $T^{(e)}$	abkürzend für $a\kappa_{(e)}$ bzw. für $T\kappa_{(e)}$
$rad(A)$	Nilradikal der assoziativen Algebra A
$Nil(A)$	Menge der nilpotenten Elemente der assoziativen Algebra A
KG	Gruppenalgebra der Gruppe G über dem Körper K
$Aug(KG)$	Augmentationsideal von KG
$cl(A)$	Nilpotenzklasse der assoziativen Algebra A
$cl(a)$	Nilpotenzklasse des Elementes a in einer assoziativen Algebra
ρ	rechtsreguläre Darstellung einer assoziativen Algebra
λ	linksreguläre Anti-Darstellung einer assoziativen Algebra
$\mathcal{R}_1$	Klasse der unitären Ringe
$\mathcal{A}$	Klasse der assoziativen Algebren
$\mathcal{A}_1$	Klasse der assoziativen unitären Algebren
$\mathcal{A}$-isomorph, $\cong_{\mathcal{A}}$	Isomorphie innerhalb der Klasse $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}_1$-isomorph, $\cong_{\mathcal{A}_1}$	Isomorphie innerhalb der Klasse $\mathcal{A}_1$
$\langle T\rangle_{\mathcal{A}_1}$	Algebrenerzeugnis von T bezüglich $\mathcal{A}_1$
$\langle T\rangle_{\mathcal{A}}$	Algebrenerzeugnis von T bezüglich $\mathcal{A}$
$A^{<n>}$	n-te Potenz der assoziativen Algebra A
$<,>_\rho$	Standard-Spurform bezüglich ρ
$<,>_\lambda$	Standard-Spurform bezüglich λ
$< a, b >_{\lambda,\rho}$	$= Spur(a\lambda\, b\rho + a\rho\, b\lambda)$
$A(a, b, K), A(a, b)$	verallgemeinerte Quaternionenalgebra
$S(A_i, n)$	vgl. 8
Z_A	vgl. 8

$A^{n\times m}$	$n \times m$-Matrizen über A

Lie-Algebren

A°	die zur assoziativen Algebra A assoziierte Lie-Algebra
$\circ$	$a \circ b := ab - ba$
$L^{(n)}$	Reihe der Ableitungen
$cl(L)$	Nilpotenzklasse
$S \circ T$	K-Erzeugnis der Menge $\{s \circ t \mid s \in S, t \in T\}$
ad	adjungierte Darstellung einer Lie-Algebra
$st(L)$	auflösbare Stufe

Auflösbare Algebren

$AUF(A)$	auflösbares Radikal der assoziativen Algebra A
$auf(A)$	auflösbares Residuum der assoziativen Algebra A
A'	Ableitung der Algebra A
$A^{(n)}$	n-te Ableitung der Algebra A
$st(A)$	auflösbare Stufe der auflösbaren Algebra A

Kommutative Algebren

$H(A)$	Menge der halbeinfachen Elemente der Algebra A
$D(A)$	Menge der diagonalisierbaren Elemente der Algebra A
$Sep(A)$	Menge der separablen Elemente der Algebra A
$VSep(A)$	Menge der vollseparablen Elemente der Algebra A
$ZF(A)$	Menge der zerfallenden Elemente der Algebra A
$min_{a,K}, \widetilde{min}_{a,K}$	Minimalpolynom von a über dem Körper K
F_a	Isomorphismus zwischen $K[a]$ und $K[t]/(min_{a,K})$
$\widetilde{F}_a$	das Einsetzen von a in Elemente von $tK[t]$
χ	der Isomorphismus aus dem Chinesischen Restsatz
$char_{a,K}$	charakteristisches Polynom von a über dem Körper K
aug	Augmentationsabbildung von KG auf K
χ_i	irreduzibler Charakter
e_i	Idempotent zu χ_i
ω_d	primitive d-te Einheitswurzel
ϕ	Phi-Funktion
$Gal(L;K)$	Galois-Gruppe von $(K;L)$
$h(G)$	Klassenzahl von G
$K(\omega_d)$	Adjunktion einer primitiven d-ten Einheitswurzel
$Irr_K(G)$	irreduzible Charktere von KG.

Kapitel 1

Separable Algebren und der Satz von Wedderburn-Malcev

1.1 Separable Algebren

1.1.1 Eigenschaften, Kennzeichnungen, Beispiele

In diesem Abschnitt geben wir zunächst eine kurze Einführung zu separablen Algebren, wie sie zum Beispiel in den Standardwerken von Richard Pierce [16] und Yurij Drozd [4] zu assoziativen Algebren nachzulesen ist.

Definitionen 1 Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $\underline{n} := \mathbb{N}_{\leq n}$. Des Weiteren bezeichnen wir mit $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}_1$ die Klasse der unitären Ringe, die Klasse der assoziativen Algebren bzw. die Klasse der assoziativen unitären Algebren. Ist $\mathcal{K}$ eine der Klassen $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{A}_1$, so sei $\langle ... \rangle_{\mathcal{K}}$ bzw. $\cong_{\mathcal{K}}$ das Erzeugnis bzw. die Isomorphie innerhalb der Klasse $\mathcal{K}$. Des Weiteren sprechen wir auch von $\mathcal{K}$-Isomorphismen oder sagen, daß zwei der Klasse $\mathcal{K}$ zugehörigen Strukturen $\mathcal{K}$-isomorph sind. Mit A^- bzw. A^{op} bezeichnen wir die entgegengesetzte Algebra einer Algebra A, wobei $a \cdot_{op} b := ba$ für alle $a, b \in A$ gilt. Das Zentrum einer Algebra A geben wir durch die Notation $Z(A)$ an.$\diamond$

In dieser Arbeit verwenden wir modultheoretische Begriffe wie Modul, Algebrenmodul, halbeinfacher Modul, projektiver Modul, irreduzibler Modul etc. Der Leser mag diese Begriffswelt sowie auch deren grundlegende Theorie z.B. in den Standardwerken [16] oder [4] nachlesen.

Definition 1 *(separable Algebra)* Eine assoziative unitäre K-Algebra A heißt separabel, falls A ein projektiver $A^- \otimes_K A$-Algebren-Modul ist (vgl. [16], Kapitel 10.2, Definition). Der nächste Satz gibt mehr Aufschluß darüber, woher der Begriff der separablen Algebra stammt. Insbesondere erlaubt er es uns, diese Definition mit Hilfe von Eigenschaften der Radikalfaktorstruktur nachzuprüfen. Es zeigt sich, dass die Definition mit der der separablen Körpererweiterung in enger Beziehung steht.$\diamond$

Satz 1 *(Kennzeichnungen separabler Algebren) Seien K ein Körper und A eine assoziative unitäre K-Algebra. Es sind äquivalent:*

(i) *A ist separabel.*

(ii) *$A^- \otimes_K A$ ist halbeinfach und endlich-dimensional.*

(iii) *Für jede endlich-dimensionale Körpererweiterung $(K; L)$ ist die L-Algebra $A_L := A \otimes_K L$ (Grundringerweiterung) halbeinfach.*

(iv) *Es existieren $r \in \mathbb{N}$ und assoziative endlich-dimensionale unitäre einfache K-Algebren $A_1, ..., A_r$ derart, daß $A \cong_{\mathcal{A}_1} \bigoplus_{i=1}^{r} A_i$ gilt und für jedes $i \in \underline{r}$ das Paar $(K1_{A_i}; Z(A_i))$ eine separable Körpererweiterung ist.*

<u>**Beweis:**</u> Die Behauptung folgt aus dem Theorem 6.1.2 aus [4].$\diamond$

Aus diesem Satz ergeben sich einige Eigenschaften und Beispiele separabler Algebren.

Korollar 1 *(Eigenschaften und Beispiele separabler Algebren) Seien K ein Körper und A eine assoziative unitäre K-Algebra.*

(i) *Ist A separabel, so ist A halbeinfach und endlich-dimensional.*

(ii) *Ist A separabel, so ist $Z(A)$ separabel.*

(iii) *Direkte Produkte separabler Algebren sind separabel.*

(iv) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist K^n separabel.*

(v) *Direkte Produkte von vollen Matrixalgebren über K sind separabel.*

(vi) *Sei K algebraisch abgeschlossen. A ist genau dann separabel, wenn A endlich-dimensional und halbeinfach ist.*

(vii) *Sei K perfekt. A ist genau dann separabel, wenn A endlich-dimensional und halbeinfach ist.*

(viii) *Sei $(K; L)$ eine endlich-dimensionale Körpererweiterung. Es sind äquivalent:*

(a) *$(K; L)$ ist eine separable Körpererweiterung.*

(b) *L ist als $K-$Algebra separabel.*

(ix) *Direkte Produkte von separablen Körpererweiterung von K sind separabel als K-Algebra.*

Beweis. Dieses Korollar folgt direkt mit Aussage (iv) von Satz 1.$\diamond$

Beispiele 1 (i) $\mathbb{C}$ ist nach Teil (ii) von Korollar 1 eine separable $\mathbb{R}$-Algebra.

(ii) Da $\mathbb{R}$ eine unendlich-dimensionale $\mathbb{Q}$-Algebra ist, ist $\mathbb{R}$ nach Teil (i) von Korollar 1 keine separable $\mathbb{Q}$-Algebra.

(iii) Seien K ein Körper und A eine assoziative n-dimensionale unitäre zentral-einfache K-Algebra. Dann ist A nach Teil (iv) von Korollar 1 separabel. Insbesondere ist die Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$ eine separable $\mathbb{R}$-Algebra und für alle $n \in \mathbb{N}$ die K-Algebra $K^{n\times n}$ separabel.$\diamond$

1.1.2 Gruppenalgebren und Separabilität

Wir untersuchen nun, wann die Gruppenalgebra separabel ist. Seien K ein Körper und G eine endliche Gruppe. Mit $char(K)$ bezeichnen wir die Charakteristik des Körpers K. Für die Gruppenalgebra verwenden wir das Symbol KG.

Bemerkung 1 *Seien K ein Körper und G eine endliche Gruppe. Es gelten folgende Aussagen:*

(i) $KG \cong_{\mathcal{A}_1} (KG)^-$

(ii) *Für jede Gruppe H gilt $K(G\times H) \cong_{\mathcal{A}_1} KG \otimes_K KH$.*

Beweis. Durch die K-lineare Fortsetzung der Abbildung

$$G \longrightarrow KG, g \longmapsto g^{-1}$$

erhalten wir einen $\mathcal{A}_1$-Isomorhismus von KG auf $(KG)^-$. Des Weiteren sind die K-Algebren $K(G\times H)$ und $KG \otimes_K KH$ vermöge der K-linearen Fortsetzung der Abbildung

$$G \times H \longrightarrow KG \otimes_K KH, (g;h) \longmapsto g \otimes h$$

$\mathcal{A}_1$-isomorph.$\diamond$

Satz 2 *(Separabilität der Gruppenalgebra) Seien K ein Körper und G eine endliche Gruppe. Es sind äquivalent:*

(i) *KG ist separabel.*

(ii) *KG ist halbeinfach.*

(iii) $char(K)$ teilt nicht die Gruppenordnung von G.

Beweis. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ist der Satz von Maschke, und die Implikation von (i) nach (ii) ist in Teil (i) von Korollar 1 enthalten. Es verbleibt also, die Implikation von (ii) nach (i) zu zeigen. Mit Bemerkung 1 folgt $KG \otimes_K (KG)^- \cong_{\mathcal{A}_1} K(G \times G)$. Da $char(K)$ entweder Null oder eine Primzahl ist, folgt aus der Halbeinfachheit von KG mit dem Satz von Maschke auch die von $K(G \times G)$. Aus Aussage (ii) von Korollar 1 folgt die Behauptung.◇

1.1.3 Matrixalgebren separabler Algebren

Wir zeigen, dass Matrixalgebren separabler Algebren wieder separabel sind.

Bemerkung 2 *Seien K ein Körper, $n, m \in \mathbb{N}$ und A eine assoziative unitäre endlich-dimensionale K-Algebra. Dann ist die Matrixalgebra $A^{n\times n}$ zu $K^{n\times n} \otimes_K A$ isomorph. Des Weiteren ist $K^{n\times n} \otimes_K K^{m\times m}$ zu $K^{(nm)\times(nm)}$ isomorph.*

Beweis. Der Beweis verbleibt als Übungsaufgabe.◇

Innerhalb der assoziativen Algebrentheorie ist das Radikal der Matrixalgebra bekannt:

Bemerkung 3 *Seien $n \in \mathbb{N}$ und A eine assoziative rechtsartinsche K-Algebra. Dann ist das Radikal der Matrixalgebra $A^{n\times n}$ genau $rad(A)^{n\times n}$, also die Matrixalgebra zum Radikal von A. Insbesondere ist A genau dann halbeinfach, wenn $A^{n\times n}$ halbeinfach ist.*

Beweis. Der Beweis verbleibt als Übungsaufgabe, bei dem der Leser dies als Literaturrecherche nachlesen vermöge.◇

Satz 3 *(Separabilität von Matrixalgebren) Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und A eine assoziative separable K-Algebra. Dann ist die Matrixalgebra $A^{n\times n}$ wieder separabel.*

Beweis. Nach Satz 1 müssen wir einsehen, dass $(A^{n\times n}) \otimes (A^{n\times n})^-$ halbeinfach ist. Der Leser möge als Übungsaufgabe beweisen, dass $(A^{n\times n})^-$ zu $(A^-)^{n\times n}$ isomorph ist. Damit und zusammen mit Bemerkung 2 sowie der Kommutativität und Assoziativität des Tensorproduktes erhalten wir nun: $(A^{n\times n}) \otimes (A^{n\times n})^- \cong_{\mathcal{A}} K^{n\times n} \otimes A \otimes K^{n\times n} \otimes A^- \cong_{\mathcal{A}} K^{n^2\times n^2} \otimes (A \otimes A^-) \cong_{\mathcal{A}} (A \otimes A^-)^{n^2\times n^2}$. Da nach Voraussetzung A separabel ist, ist somit $A \otimes A^-$ halbeinfach nach Satz 1. Wegen Bemerkung 3 ist somit auch die Matrixalgebra $(A \otimes A^-)^{n^2\times n^2}$ halbeinfach, und wir haben den Satz bewiesen.◇

1.2 Radikalkomplemente und der Satz von Wedderburn-Malcev

Um den Satz von Wedderburn-Malcev (vgl. [12]) formulieren zu können, sind die folgenden Definitionen hilfreich.

Definitionen 2 *(Radikalkomplement)* Seien A eine K-Algebra und U ein K-Teilraum von A. Eine K-Teilalgebra T von A nennen wir ein Algebrenkomplement von U in A, falls T ein K-Raumkomplement von U in A ist. Sind speziell A assoziativ und $U = rad(A)$ das Nilradikal von A, so sprechen wir auch von Radikalkomplementen in A. Entsprechend definieren wir Linksidealkomplemente, Rechtsidealkomplemente und Idealkomplemente von Teilräumen von A.$\diamond$

Definition und Bemerkung 1 *(Konjugation)* Sei A eine assoziative unitäre K-Algebra. Mit $E(A)$ bezeichnen wir die Einheitengruppe von A. Für alle $e \in E(A)$ sei

$$\kappa_e : A \longrightarrow A, x \longmapsto x^e := e^{-1}xe.$$

Des Weiteren sei

$$\kappa : E(A) \longrightarrow Aut_K(A), e \longmapsto \kappa_e.$$

Dabei ist $Aut_K(A)$ die Gruppe der K-Algebrenautomorphismen von A. Für alle $e \in E(A), a \in A$ und $T \subseteq A$ schreiben wir statt $a\kappa_e$ bzw. $T\kappa_e$ auch a^e bzw. T^e. Ist $e \in E(A)$, so nennen wir die Abbildung κ_e Konjugation mit e.$\diamond$

Satz 4 *(Der Satz von Wedderburn-Malcev für unitäre Algebren) Seien K ein Körper und A eine endlich-dimensionale assoziative unitäre K-Algebra. Ist $A/rad(A)$ separabel, so gelten:*

(i) $rad(A)$ besitzt ein Algebrenkomplement in A.

(ii) Der nilpotente Normalteiler $1_A + rad(A)$ von $E(A)$ operiert vermöge Konjugation transitiv auf der Menge der Algebrenkomplemente von $rad(A)$ in A.

<u>**Beweis**</u>. Da A endlich-dimensional ist, gilt $rad(A) = J(A)$, wobei $J(A)$ das Jacobson-Radikal von A ist. Die Behauptung folgt daher mit Corollary a aus Kapitel 11.5 in [16] und dem Theorem aus Kapitel 11.6 in [16].$\diamond$

Anmerkung 1 Der Satz von Wedderburn-Malcev findet häufig in folgender Situation seine Anwendung: Sind K ein perfekter Körper und A eine assoziative endlich-dimensionale unitäre K-Algebra, so sind die Voraussetzungen von Satz 4 nach Teil (ii) von Korollar 1 erfüllt. Des Weiteren findet er auch dann Anwendung, wenn die Radikalfaktorstruktur sich wie in den Teilen (iii)-(v) dieses Korollars verhält oder sie zu einer der separablen Algebren dieses Abschnittes isomorph ist.$\diamond$

1.3 Beispiele zur Thematik des Satzes von Wedderburn-Malcev

Zum Abschluß dieses einführenden Kapitels betrachten wir Beispiele zur Thematik des Satzes von Wedderburn-Malcev. Wir behandeln zunächst ein Beispiel für eine Algebra aus den Übungen zu Kapitel 11.6 aus [16], die kein Radikalkomplement besitzt. Eine Algebra, die zwei nicht-konjugierte Radikalkomplemente besitzt, werden wir in dem Kapitel über die Verallgemeinerten Quaternionenalgebren entdecken.
Das zweite Beispiel, das wiederum aus den Übungen zu Kapitel 11.6 aus [16] stammt, zeigt die Wirkungsweise des Satzes von Wedderburn-Malcev. Dieses Beispiel wird durch den Abschnitt über Dreiecksmatrizen verallgemeinert. Dort berechnen wir bei den unteren und oberen Dreiecksmatrizen die Radikalkomplemente explizit.
Auch in modernen Gebieten der interdisziplinären Mathematik wie bei 'Dynamischen Netzwerken' wird der Satz von Wedderburn-Malcev zu dessen Analyse benutzt. Ian Stewart und Martin Golubitsky demonstrieren dies bei sog. Koordinaten-Veränderungen in ihrem Artikel [19]. Ihre mit dem Satz von Wedderburn-Malcev im Zusammenhang stehenden Ergebnisse skizzieren wir im letzten Abschnitt dieses Kapitels.

1.3.1 Ein Abspiel und ein Beispiel

Bemerkung 4 *Sind A eine assoziative unitäre K-Algebra und C ein Algebrenkomplement von $rad(A)$ in A, so C eine unitale Teilalgebra.*

Beweis. Wegen $A = rad(A) \oplus_K C$ gibt es genau ein Paar $(c; r) \in C \times rad(A)$, so daß $1_A = c + r$ gilt. Es folgt $c + r = 1_A = {1_A}^2 = c^2 + cr + rc + r^2$. Da $rad(A)$ ein Ideal von A ist, folgt nun $c = c^2$ und $r = cr + rc + r^2$. Aus $r = 1_A r = (c + r)r = cr + r^2$ ergibt sich $rc = 0_A$, und aus $r = r1_A = r(c + r) = rc + r^2$ folgt $cr = 0_A$. Dies zeigt $r^2 = r$. Also ist r zugleich nilpotent und idempotent in A, woraus wir $r = 0_A$ schließen. Es folgt die Behauptung.$\diamond$

Definition 2 Seien $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Es seien $Pot(n, K) := \{x \mid \exists k \in K : x = k^n\}$ und $QA(K) := Pot(2, K)$. Wir nennen $Pot(n, K)$ die Menge der n-ten Potenzen und speziell $QA(K)$ die Menge der Quadrate von K.$\diamond$

Abspiel 1 *(Eine Algebra ohne Radikalkomplement)* Seien K ein Körper mit $char(K) = 2$, $F := K(t)$ der Quotientenkörper der Polynomalgebra $K[t]$ in der Variablen t und A die 4-dimensionale unitäre F-Algebra mit F-Basis $\{1_A, d, y, z\}$ und der Multiplikation

$\cdot$	1_A	d	y	z
1_A	1_A	d	y	z
d	d	$t1_A + y + z$	z	ty
y	y	z	0_A	0_A
z	z	ty	0_A	0_A.

Man rechnet leicht nach, daß A assoziativ und kommutativ ist.

Als nächstes zeigen wir $rad(A) = \langle y, z\rangle_F$.
Aus der Multiplikationstafel ergibt sich leicht, daß $\langle y, z\rangle_F$ ein Ideal von A ist. Weiter gilt für $f_1, f_2 \in F$: $(f_1y+f_2z)^2 = {f_1}^2y^2+f_1f_2yz+f_2f_1zy+{f_2}^2z^2 = 0_A$. Also ist $\langle y, z\rangle_F$ ein niles, und daher auch nilpotentes Ideal von A. Es verbleibt, die Halbeinfachheit von $A/\langle y, z\rangle_F$ zu zeigen. Sei $B := A/\langle y, z\rangle_F$. Angenommen, B wäre nicht halbeinfach. Da 1_A nicht nilpotent ist, hätte B ein ein-dimensionales Radikal. Dann wäre $rad(B)$ ein Zero-Ideal von B. Somit gäbe es ein $r \in rad(B)$ mit $r \neq 0_B$ und $r^2 = 0_B$. Seien $h_1, h_2 \in F$ mit $r = (h_11_A + h_2d) + \langle y, z\rangle_F$. Aus $r^2 = 0_B$ folgt nun ${h_1}^2 + {h_2}^2t = 0_K$. Wäre $h_2 \neq 0_K$, so würde $t \in QA(K(t))$ gelten, was ein Widerspruch ist. Also gilt $h_2 = 0_K$ und damit auch $h_1 = 0_K$. Somit würde $r = 0_B$ gelten, was den Widerspruch ergibt. Also gilt $rad(A) = \langle y, z\rangle_F$.

Nun zeigen wir, daß $rad(A)$ kein Algebrenkomplement in A besitzt.
Angenommen, es existiere ein Algebrenkomplement C von $rad(A)$ in A. Aus Bemerkung 4 folgt $1_A \in C$. Sei nun $\{1_A, c\}$ eine $F-$Basis von C, und seien $f_1, f_2, f_3, f_4 \in F$ mit $c = f_11_A + f_2d + f_3y + f_4z$. Aus $c^2 = ({f_1}^2 + {f_2}^2t)1_A + {f_2}^2(y + z) \in C$ folgt ${f_2}^2(y + z) \in C \cap rad(A) = \{0_A\}$, also $f_2 = 0_K$. Somit gilt $f_11_A + f_3y + f_4z \in C$, also auch $f_3y + f_4z \in C$. Dies zeigt $f_3y + f_4z \in C \cap rad(A) = \{0_A\}$, woraus $f_3 = f_4 = 0_K$ folgt. Nun sind aber 1_A und c linear abhängig, was den Widerspruch zeigt.

Ein wichtiger Grund für diese Nichtexistenz ist, daß die Radikalfaktorstruktur von A nicht separabel ist. Dazu zeigen wir, daß die kommutative F-Algebra $T := A/rad(A) \otimes_F A/rad(A)$ ein von Null verschiedenes nilpotentes Element besitzt. also nicht halbeinfach ist (vgl. Teil (ii) von Satz 1). Es gilt:

$$\begin{aligned}(((d + rad(A)) \otimes (1_A + rad(A)) + (1_A + rad(A)) \otimes (d + rad(A)))^2 &= \\ (d^2 + rad(A)) \otimes (1_A + rad(A)) + (d + rad(A)) \otimes (d + rad(A)) &+ \\ (d + rad(A)) \otimes (d + rad(A)) + (1_A + rad(A)) \otimes (d^2 + rad(A)) &= \\ 2t((1_A + rad(A)) \otimes (1_A + rad(A))) &= \\ 0_T.\end{aligned}$$

Da eine zwei-dimensionale unitäre F-Algebra entweder nicht halbeinfach, ein Körper oder zu $F \times F$ $\mathcal{A}_1$-isomorph ist, zeigen das Vorherige und Teil (iv)