SVEN BODO WIRSING

ÜBER DIE STRUKTUR DER SOLOMON-TITS-ALGEBREN DER SYMMETRISCHEN GRUPPEN

Eine Analyse assoziativer, gruppentheoretischer und Lie-theoretischer Phänomene. Mit 218 Übungsaufgaben

disserta Verlag

Wirsing, Sven Bodo: Über die Struktur der Solomon-Tits-Algebren der symmetrischen Gruppen: Eine Analyse assoziativer, gruppentheoretischer und Lie-theoretischer Phänomene. Mit 218 Übungsaufgaben. Hamburg, disserta Verlag, 2015

Buch-ISBN: 978-3-95935-160-7
PDF-eBook-ISBN: 978-3-95935-161-4
Druck/Herstellung: disserta Verlag, Hamburg, 2015
Covermotiv: pixabay.com

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Hermannstal 119k, 22119 Hamburg
http://www.disserta-verlag.de, Hamburg 2015
Printed in Germany

Für Manfred Schocker

20.8.1970 - 22.11.2006

Da wo Du jetzt bist, können wir
Dich nicht spüren,
doch Deine Werke werden uns in
Gedanken stets zu Dir führen.

Ich möchte an dieser Stelle die einleitenden Worte aus dem Journal of Algebraic Combinatorics von 2008 (Volume 28, Issue 1 and 2) zitieren, die von Nantel Bergeron, Frédéric Patras, Arun Ram, Christophe Reutenauer sowie den weiteren Editoren dieses Volumes zu Manfred Schockers Ehren verfasst worden sind. Sie drücken, so finde ich, sehr gut aus, was viele seiner Mitmenschen nach dem tragischen Tod von Manfred Schocker dachten:

"Manfred Schocker was a man full of life: he was dynamic and cheerful; he was a force of nature. It is difficult to imagine that he is with us no more. It is especially difficult when we look at his photographs. We can but stare, without understanding. This volume of Journal of Algebraic Combinatorics is intended as a tribute to him, a way to pay our respects.
Manfred comes from the algebraic combinatorics group at Kiel in the north of Germany. Manfreds adviser was Hartmut Laue and Manfred, Laue, Dieter Blessenohl and Armin Jöllenbeck, a co-student of Manfred, worked together often. Legend has it that they met in the university cafeteria where they explored and discussed a broad spectrum of mathematics. It was certainly a very special atmosphere. According to Laue, Manfred, as a student, carried the energy into the night, and worked very late. He continued this late night working pattern throughout his career, in Montreal, Oxford and Swansea.
After his PhD in Kiel in 2001, Manfred went to Montreal for one year, in a postdoctoral position under Christophe Reutenauer, and then to Oxford for two years, with Karin Erdmann. Thus he moved overseas twice in one year, with the whole family, his wife Ingke, and their sons Lasse and Bosse. After that he obtained a position at the University of Swansea, in Wales.
Be it the Solomon Algebra, the Free Lie Algebra or Character Theory, Manfred had a deep insight in all the subjects he considered, the kind of insight one develops when one thinks very often about a subject and tries to solve all the problems that may arise, great and small. He was both a great theoretician and a great calculator. Manfreds work contains deep results on, among other things, the descent algebra, the free Lie algebra and noncommutative character theory of the symmetric group. He wrote a remarkable book on this latter subject with Blessenohl, which appeared in 2005, and where Jöllenbecks theory was explained and developed. A second volume was in preparation.
Manfred explored, alone or with co-authors, the beautiful links between combinatorics and algebra. In one result, obtained in his early work in collaboration with Jöllenbeck, they showed elegantly how to take advantage of the major index in Klyachkos idempotent, introduced in the 70s. The Klyachko idempotent is an element of the group algebra of the symmetric group where the coefficient of a permutation depends on its major index, a combinatorial statistic introduced by MacMahon at the beginning of the 20th century which is now a central concept for many combinatorialists. Manfred and Armin showed how the Klyachko idempotent may be used to compute the multiplicities of the irreducible representations of the symmetric group in the Lie

representation and thus explain the formula of Kraskiewicz-Weyman which involves the major index of Young tableaux. The results of Klyachko and Kraskiewicz-Weyman had been known independently for 10 years and the problem of relating them was a good one. It is exactly that problem that was answered by Manfred and Armin.
Another remarkable result obtained by Manfred, together with Dieter Blessenohl and Christophe Hohlweg, is the symmetry of the Solomon homomorphism; the latter maps the descent algebra of a finite Coxeter group onto its character ring. Manfred wrote many articles in his short career: 23 according to Mathematical Reviews. The present volume contains one of Manfreds unfinished papers (written up by Nantel Bergeron) and also an article he wrote with Frédéric Patras, which was finished and accepted before his death.
Let us quote Pr. Aubrey Truman, of the University of Swansea, in his address in 2006: I only knew Manfred for just over 2 years but it was already obvious to me that he was a star. In my department there are many brilliant researchers, many gifted teachers who really care about their students and many wonderfully warm human beings. Manfred had all these qualities and in addition he had a charismatic personality. It is no exaggeration to say that he was loved by students and staff alike. His smiling eyes with their perpetual twinkle would disarm anyone. He had the advantage of being young and good looking and was even awarded a certificate by the students last summer for being the best dancer on our staff. The students found him irresistible and gravitated towards his courses and projects. The sudden death of Manfred in 2006 is a tragedy for us, for his family, and for the mathematical community.“

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Algebra

Sie ist strukturierend und klar,
voller Witz und Wunder, wenn man ist ihr nah.
Sie bleibt selten auf einer ihrer Schienen,
sondern verbindet die Disziplinen.
Sie zieht mich in ihren Bann,
in dem ich auch mal rechnen kann.
Ein Leben lang mag ich an sie denken,
ob sie mir wird weitere Ergebnisse schenken?
Sie ist einfach wunderbar,
die Königin, die Algebra.

(Sven Wirsing, im Mai 2013)

Im Jahre 2003 hielt Manfred Schocker im Oberseminar Algebrentheorie an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel einen Vortrag über seine neuesten Forschungsergebnisse zu der Modul-Struktur der Solomon-Tits-Algebra $\mathcal{T}_n$ der symmetrischen Gruppe S_n, die später in dem Artikel [16] im Journal of Algebra von ihm veröffentlicht worden sind (Eine Vorversion zu diesem Artikel ist im Internet unter http://arxiv.org/abs/math/0505137 frei zugänglich.). Zu dieser Zeit war ich als Promotions-Student Teilnehmer an diesem Oberseminar, dass von den Professoren Dieter Blessenohl und meinem Doktorvater Hartmut Laue geleitet wird. Der anregende Vortrag von Manfred Schocker war eine der Motivationen, mich näher mit $\mathcal{T}_n$ zu befassen.

Die Solomon-Tits-Algebra leitet sich von einer speziellen Halbgruppenstruktur auf der Menge der Simplizes eines Coxeter[1]-Komplexes assoziiert zur

[1]Harold Scott MacDonald Coxeter (geboren am 9. Februar 1907 in London, gestorbenam 31. März 2003 in Toronto) war ein britisch-kanadischer Mathematiker. Sein Arbeitsgebiet war die Geometrie, unter anderem beschäftigte er sich mit regulären Polytopen. Coxeter galt in englischsprachigen Ländern und darüber hinaus als führende Autorität in klassischer Geometrie, worüber er bekannte Lehrbücher verfasste. Er betrieb geometrische Forschung zu einer Zeit, als die Geometrie allgemein als abseits des mathematischen Mainstreams gelegen betrachtet wurde. Besonders bekannt waren sein Buch und seine Arbeiten über reguläre Polytope der verschiedensten Art. Er interessierte sich auch für

symmetrischen Gruppe ab. Sie wurde ursprünglich von Jacques Tits in einem Anhang zu der Arbeit von Louis Solomon in [18] betrachtet. Die Simplizes stehen in 1-1-Korrespondenz zu den geordneten Mengenpartitionen Π_n der Menge $\underline{n} := \{1, \cdots, n\}$. Die Halbgruppenstruktur auf der Menge der Simplizes des Coxeter-Systems findet ihr Analogon auf der Menge der geordneten Mengenpartitionen wieder: Sind $(P_1, \cdots, P_l)$ und $(Q_1, \cdots Q_k)$ zwei geordnete Mengenpartitionen, so ist ihr Produkt $\wedge_n$ definiert durch

$$\begin{gathered}(P_1, \cdots, P_l) \wedge_n (Q_1, \cdots, Q_k) := \\ (P_1 \cap Q_1, P_1 \cap Q_2, \cdots, P_1 \cap Q_k, \cdots, P_l \cap Q_1, P_l \cap Q_2, \cdots, P_l \cap Q_k)^{\emptyset}.\end{gathered}$$

Das Symbol $^{\emptyset}$ bedeutet, das leere Mengen aus diesem Tupel entfernt werden. Es kann eingesehen werden, dass die Verknüpfung eine Halbgruppenstruktur auf Π_n definiert, sowie $(\underline{n})$ neutral und jedes Element von Π_n ein Idempotent bzgl. $\wedge_n$ ist. Ist K ein Körper, so ist die zu $\mathcal{T}_n$ isomorphe Monoidalgebra $K\Pi_n$ in diesem Buch der Gegenstand der Forschung: die Solomon-Tits-Algebra der symmetrischen Gruppe.
Manfred Schocker beschreibt in seinem Artikel die Modul-Struktur der Solomon-Tits-Algebren der symmetrischen Gruppen. Diese Beschreibung beinhaltet u.a. die Konstruktion primitiver Idempotente, die Zerlegung in unzerlegbare Prinzipal-Moduln (PIM), die Beschreibung der Cartan[2]-Matrix, die Bestimmung der Nilpotenzlänge des Jacobson[3]-Radikals, eine Beschreibung eines

---

Unterhaltungsmathematik, besorgte die Neuauflage des Klassikers von W. W. Rouse Ball Mathematical Recreations and Essays und schrieb über den mathematischen Hintergrund der Graphiken von M. C. Escher. Coxeter befasste sich zudem mit kombinatorischer Gruppentheorie und der Theorie der Lie-Algebren. Nach Coxeter wurden unter anderem der Todd-Coxeter-Algorithmus und die Coxeter-Gruppen benannt. Ihm zu Ehren wird der Coxeter-James-Preis der Canadian Mathematical Society vergeben.

[2]Élie Joseph Cartan (geboren am 9. April 1869 in Dolomieu, Dauphiné, gestorben am 6. Mai 1951 in Paris) war ein französischer Mathematiker, der bedeutende Beiträge zur Theorie der Lie-Gruppen und ihrer Anwendungen lieferte. Er leistete darüber hinaus bedeutende Beiträge zur mathematischen Physik und zur Differentialgeometrie. Élie Cartan ist hauptsächlich bekannt für seine Untersuchungen zur Klassifikation halbeinfacher komplexer Lie-Algebren und seine Beiträge zur Differentialgeometrie. Nach ihm sind viele Konzepte der Theorie der Lie-Algebren wie Cartan-Unteralgebren, die Cartan-Involution und die Cartan-Matrix benannt. In der Differentialgeometrie tragen die Cartan-Ableitung und Maurer-Cartan-Gleichungen seinen Namen; manchmal werden auch Zusammenhänge auf Prinzipalbündeln (Hauptfaserbündel) als Cartan-Zusammenhänge bezeichnet. Sein Sohn Henri Cartan wurde ebenfalls ein bedeutender Mathematiker. Ein nach ihm benannter Mathematikpreis (Prix Élie Cartan) wird von der Academie des Sciences verliehen.

[3]Nathan Jacobson (geboren am 5. Oktober 1910 in Warschau, gestorben am 5. Dezember 1999 in Hamden, Connecticut) war ein US-amerikanischer Mathematiker, der sich mit Algebra beschäftigte. 1934 promovierte er bei Joseph Wedderburn an der Princeton University (Non commutative polynomials and cyclic algebras). 1935/36 lehrte er am Bryn Mawr College als Nachfolger von Emmy Noether. 1936/37 war er mit einem Stipendium des National Research Council an der Universität Chicago bei Abraham Adrian Albert und Leonard Dickson. Jacobson war vor allem für seine Arbeit in der Theorie der Ringe bekannt (Jacobson-Radikal, Dichtesatz von Jacobson) sowie über Lie-Algebren und nicht-assoziative Algebren wie Jordan-Algebren. Außerdem verfasste er zahlreiche

Radikalkomplementes mit orthogonalen unzerlegbaren Idempotenten, eine Beschreibung des Ext-Quivers und der absteigenden Loewy[4]-Reihe, um nur einige der Ergebnisse aus seinem Artikel zu nennen. Die Grundlage seiner Resultate ist der Übergang von der natürlichen Basis Π_n aus Idempotenten zu einer neuen Basis aus Idempotenten, mit denen Manfred Schocker seine Untersuchungen durchführt. Seine Ergebnisse bilden die Basis einiger Ergebnisse in diesem Buch.
Die symmetrische Gruppe S_n agiert auf der Menge Π_n in natürlicherweise auf den Komponenten ihrer Elemente durch $(P_1, \cdots, P_l)\alpha := (P_1\alpha, \cdots, P_l\alpha)$ für alle $(P_1, \cdots, P_l) \in \Pi_n$ und $\alpha \in S_n$. Diese Gruppenaktion respektiert das Produkt $\wedge_n$ auf Π_n, also ist der Fixraum von S_n in $K\Pi_n$ eine Teilalgebra der Solomon-Tits-Algebra. Patrick Bidigare zeigt in seinem Artikel [5], dass dieser Fixraum zu der sogenannten Solomon-Algebra D_n isomorph ist, eine Algebra, die in der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen eine wichtige Rolle spielt und in vielen neuen Artikeln und Arbeiten ins Blickfeld der Forschung gerückt ist. Eine gute Literaturübersicht hierzu ist z.B. in den Arbeiten von Manfred Schocker [16] und Thorsten Bauer [3] enthalten.
Das Einwirken der Solomon-Algebra in verschiedenen kombinatorischen und algebraischen Kontexten veranlaßte Thorsten Bauer, sich in seiner Dissertation [3] mit der algebraischen Struktur der Solomon-Algebren (im nicht modularen Fall) zu beschäftigen. Ein wesentlicher Schritt hierbei ist es wieder, eine neue Basis zu finden, mit der sich diese Struktur analysieren läßt. Thorsten Bauer beschreibt in seiner Dissertation u.a. die Stagnation der absteigenden und aufsteigenden Lie-Zentralreihen der Solomon-Algebra, ihre Derivationen und Algebrenautomorphismen, und er analysiert im Kontext von sogenannten auflösbaren assoziativen Algebren die Carter-Untergruppen

---

Algebra-Lehrbücher. Jacobson war Mitglied der National Academy of Sciences und der American Academy of Arts and Sciences. 1971 bis 1973 war er Präsident der American Mathematical Society (AMS). 1998 erhielt er deren Leroy P. Steele Prize für sein Lebenswerk. Zu seinen Doktoranden zählen Charles Curtis und George Seligman.

[4] Alfred Loewy (geboren am 20. Juni 1873 in Rawitsch bei Posen; gestorben am 25. Januar 1935 in Freiburg im Breisgau) war ein deutscher Mathematiker. Loewy, der aus einer streng orthodoxen jüdischen Familie stammt, besuchte 1891 bis 1895 die Universitäten von Breslau, München, Berlin und Göttingen. 1894 wurde er bei Ferdinand Lindemann an der Universität München promoviert (Über die Transformation einer quadratischen Form in sich selbst mit Anwendungen auf die Linien- und Kugelgeometrie). 1897 habilitierte er sich an der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, wo er 1902 außerordentlicher Professor, 1916 Honorarprofessor und 1919 Professor wurde. 1933 wurde er durch die Nationalsozialisten zwangspensioniert. Loewy hatte Probleme mit den Augen und war seit 1916 einseitig und nach einer misslungenen Operation 1928 vollständig blind. Loewy arbeitete über die lineare Substitutionsgruppen, der Reduktion algebraischer Gleichungen und Galoistheorie, der Theorie linearer homogener Differentialgleichungen (wo er Methoden der Gruppentheorie anwandte) und Stieltjesintegralen. Außerdem befasste er sich mit Versicherungsmathematik. Zu seinen Doktoranden zählen Wolfgang Krull und Friedrich Karl Schmidt und zu seinen Studenten Ernst Witt, Bernhard Neumann, Richard Brauer und Reinhold Baer. Er war der angeheiratete Onkel des Mathematikers Adolf Fraenkel, den er systematisch förderte. 1912 wurde Loewy zum Mitglied der Leopoldina berufen.

der Einheitengruppe sowie die Cartan-Teilalgebren der assoziierten Lie-Algebra. Dies mündet in dem rundem Ergebnis, dass die Einheitengruppen der Cartan-Teilalgebren genau die Carter-Untergruppen sind.
Seine Analysen und Ergebnisse sind für mich der zweite Anreiz, mich mit der Struktur der Solomon-Tits-Algebren der symmetrischen Gruppen auseinanderzusetzen, und zwar hinsichtlich folgender Fragestellungen:

- Können die Schlussweisen von Thorsten Bauer zu den Solomon-Algebren so verallgemeinert werden, dass sie auch für die Solomon-Tits-Algebren anwendbar sind?

- Gibt es weitere Zusammenhänge bzgl. der Einheitengruppe und der assoziierten Lie[5]-Algebra einer auflösbaren assoziativen Algebra?

- Welche Erkenntnisse gibt es zu der assoziativen Struktur der Solomon-Tits-Algebren, welche zu ihren assoziierten Lie-Algebren, welche zu ihren Einheitengruppen?

- Sind diese Erkenntnisse auch übertragbar auf die Solomon-Algebren?

Diese Fragestellungen werden in diesem Buch natürlich nicht allumfassend beantwortet, doch bilden sie den Leitfaden für die Analysen, die hier dargelegt werden. Diese schildern wir nun abschliessend im Rahmen dieser Einleitung. Es wird dabei deutlich, dass assoziative auflösbare zerfallende Algebren mit selbstzentralen Radikalkomplementen eine übergeordnete Rolle spielen.

* * *

Das erste Kapitel hat einleitenden Charakter. Da $K\Pi_n$ eine assoziative idempotente Monoidalgebra ist, betrachten wir in diesem allgemeineren Kontext

[5] Marius Sophus Lie (geboren am 17. Dezember 1842 in Nordfjordeid, gestorben am 18. Februar 1899 in Kristiania, heute Oslo) war ein norwegischer Mathematiker. Lie studierte von 1859 bis 1865 in Christiania (später Kristiania, heute Oslo) Naturwissenschaften und hörte 1862 bei Peter Ludwig Mejdell Sylow Vorlesungen über Gruppentheorie. Ausschlaggebend für Lies weitere Laufbahn wurde die Bekanntschaft und Freundschaft mit Felix Klein, mit dem er 1870 nach Paris reiste und gemeinsame Arbeiten über Transformationsgruppen schrieb. 1872 wurde Lie Professor in Christiania, und 1886 wurde er als Nachfolger Kleins (der nach Göttingen wechselte) nach Leipzig berufen. Lie begründete die Theorie der kontinuierlichen Symmetrie und verwendete sie zur Untersuchung von Differentialgleichungen und geometrischen Strukturen. Kontinuierliche oder stetige Symmetrieoperationen sind zum Beispiel Verschiebungen und Drehungen um beliebige, auch infinitesimale, Beträge, im Unterschied zu diskreten Symmetrieoperationen wie zum Beispiel Spiegelungen. Auf der Grundlage seiner Arbeiten wurde u. a. ein Algorithmus zur numerischen Integration von Differentialgleichungen entwickelt (Lie-Integration) oder auch die Methode der Fußpunkt-Transformation. Um stetige Transformationsgruppen (heute Lie-Gruppen genannt) zu untersuchen und anzuwenden, linearisierte er die Transformationen und untersuchte die infinitesimalen Erzeugenden. Die Verknüpfungseigenschaften der Lie-Gruppe können durch Kommutatoren der Erzeugenden ausgedrückt werden; die Kommutator-Algebra der Erzeugenden heißt heute Lie-Algebra.

folgende Thematiken, die teilweise auch schon von Kenneth Brown in [6] mit Hilfe einer Äquivalenzrelation auf einem idempotenten Monoid M analysiert worden sind und hier teilweise neu bewiesen und um neue Erkenntnisse ergänzt werden:

- Beschreibung des assoziativen Radikals von KM mittels einer Äquivalenzrelation auf M
- Beschreibung der Radikalfaktorstruktur von KM, für die der Körper ein Zerfällungskörper ist (insbesondere auch für die Solomon-Algebra)
- Zerlegung der Monoidalgebra in lokale Komponenten mittels der Äquivalenzrelation auf M
- Identifikation der Ableitung (im assoziativen wie auch im Lie-Sinne) als das Radikal der assoziativen Algebra KM
- Beschreibung, wann KM kommutativ, separabel, halbeinfach, einfach oder eine Divisionsalgebra ist
- Beispiele zu selbstzentralen Radikalkomplementen der assoziativen auflösbaren Algebren $K\Pi_1$, $K\Pi_2$ und $K\Pi_3$.

In Kapitel 2, das weiterhin einen einleitenden Charakter hat, fassen wir einige Hauptergebnisse der Analyse von Manfred Schocker aus [16] bzgl. $K\Pi_n$ zusammen, angereichert um neue Erkenntnisse:

- Übergang zu einer neuen Basis für $K\Pi_n$, mit der Manfred Schocker seine Resultate in [16] durchsichtig darstellt
- Beschreibung des Radikals und eines Radikalkomplementes bzgl. dieser neuen Basis
- Beschreibung sämtlicher Idempotente in $K\Pi_n$
- Betrachtung der K-Raum Summe aller Idempotente in $K\Pi_n$
- Betrachtung der beiden Extremfälle der K-Raum Summe aller Idempotente (identisch mit einem Radikalkomplement oder mit der ganzen Algebra) in auflösbaren Algebren.

In Kapitel 3 klären wir folgende Thematiken bzgl. Dimensionsbetrachtungen zur Solomon-Tits-Algebra:

- Dimension von $K\Pi_n$: Formeln für die Anzahl der Menge der geordneten Mengenpartionen
- Dimension der Radikalfaktorstruktur: Anzahlformeln ungeordneter Mengenpartionen (Bell-Zahlen, Stirling-Zahlen)

- Dimension des Radikals als Differenz dieser Dimensionen
- Wachstumsbetrachtungen dieser Dimensionen
- untere Schranken für diese Dimensionen durch die Solomon-Algebra.

Das vierte Kapitel betrachtet folgende Thematiken bzgl. Links- und Rechtsidealen zur Solomon-Tits-Algebra:

- Einbettungen von $K\Pi_n$ in $K\Pi_{n+1}$: Hauptrechtsidealeigenschaft und Komplemente ihrer Bilder
- $K\Pi_n$ und (Quasi)-Frobeniusalgebren
- $K\Pi_n$ und Uniserialität
- $K\Pi_n$ und Lokalität
- Teilalgebren von $K\Pi_n$ isomorph zu Gruppenalgebren symmetrischer Gruppen
- eine spezielle Idealkette in $K\Pi_n$ basierend auf der Längenfunktion auf Π_n
- Beispiele für Hauptlinksideale von $K\Pi_n$, die keine Hauptrechtsideale und keine Hauptideale sind (und entsprechende Beispiele für die anderen Variationen).

In Kapitel 5 behandeln wir exkursartig einige Thematiken aus der Theorie der Duo-Algebren angeregt durch die Frage nach einem simultanen Erzeuger für Ideale, die sowohl ein Rechts- als auch ein Linkshauptideal sind, in Bemerkung 12 am Ende des vorherigen Kapitels:

- positive Beantwortung der einleitenden Frage der Existenz eines simultanen Erzeugers im Rahmen von Bi-Moduln
- ausgewählte Konsequenzen der Existenz eines simultanen Erzeugers
- bekannte Kennzeichnungen von Duo-Algebren und Erweiterungen mit Hilfe der Existenz eines simultanen Erzeugers
- eine notwendige Lie-Bedingung für Duo-Algebren und ihre Anwendung auf $K\Pi_n$ und D_n.

Das sechste Kapitel behandelt folgende Thematiken zu Cartan-Teilalgebren der assoziierten Lie-Algebra von $K\Pi_n$ und allgemeiner einer assoziativen auflösbaren Algebra:

- Beschreibung der Cartan-Teilalgebren der assoziierten Lie-Algebra von endlich-dimensionalen assoziativen unitären Algebren mit diagonalisierbarer Radikalfaktorstruktur durch Pierce-Komponenten

- Kriterium für die Existenz eines selbstzentralen Radikalkomplementes durch spezielle Pierce-Komponenten
- Beschreibung der ganzen Algebra, des Radikals und der Radikalkomplemente mit Hilfe von Pierce-Komponenten bei Vorliegen von selbstzentralen Radikalkomplementen in auflösbaren zerfallenden assoziativen Algebren
- Selbstzentralität der Radikalkomplemente der assoziierten Lie-Algebra von $K\Pi_n$
- Beschreibung der Cartan-Teilalgebren von $K\Pi_n$.

Kapitel 7 behandelt folgende Thematiken zur der auflösbaren Einheitengruppe von $K\Pi_n$ und allgemeiner einer auflösbaren assoziativen Algebra:

- Beschreibung der Carter-Untergruppen von $E(K\Pi_n)$ mit Hilfe allgemeiner Resultate aus [3]
- Beschreibung, wann die Einheitengruppe von $K\Pi_n$ abelsch bzw. nilpotent ist
- Bestimmung der p-Sylow-[6]Untergruppe der Einheitengruppe einer auflösbaren assoziativen unitären endlich-dimensionalen K-Algebra über einen endlichen Körper der Charakteristik p
- Beschreibung und Bestimmung der Anzahl der p'-Hall-[7]Untergruppen der Einheitengruppe einer auflösbaren assoziativen unitären endlich-

[6]Peter Ludwig Mejdell Sylow (geboren am 12. Dezember 1832 in Christiania, heute Oslo; gestorben am 7. September 1918 Oslo) war ein norwegischer Mathematiker, der grundlegende Arbeiten zur Gruppentheorie verfasste. Sylow studierte an der Universität Oslo und gewann 1853 einen Mathematikwettbewerb. In den Jahren 1858 bis 1898 unterrichtete er an der Schule von Fredrikshald. 1862 war er ersatzweise Dozent an der Universität Christiania, wo er die Galoistheorie unterrichtete. Die drei nach ihm benannten Sylow-Sätze bewies er 1872. Zusammen mit Sophus Lie überarbeitete Sylow zwischen 1873 und 1881 das gesamte Werk von Niels Henrik Abel. Laut Lie hatte Sylow die maßgebliche Arbeit dazu geleistet. 1894 wurde Sylow Herausgeber der Acta Mathematica und erhielt die Ehrendoktorwürde der Universität Kopenhagen. Lie richtete 1898 für Sylow einen eigenen Lehrstuhl an der Universität Christiania ein.

[7]Philip Hall (geboren am 11. April 1904 in Hampstead, London; gestorben am 30. Dezember 1982 in Cambridge) war ein englischer Mathematiker, der sich mit Gruppentheorie und Kombinatorik beschäftigte. Die Lektüre von William Burnsides Buch interessierte ihn für die Gruppentheorie. Im Juni 1939 hielt er Vorträge in Göttingen auf einer Gruppentheorie-Konferenz auf Einladung von Helmut Hasse, die in Crelle's Journal 1940 erschienen. Hall leistete zahlreiche wichtige Beiträge zur Gruppentheorie. 1928 verallgemeinerte er die Sylow-Sätze der Theorie endlicher auflösbarer Gruppen. 1934 erschien sein berühmter Aufsatz 'A contribution to the theory of groups of prime power order', in dem er reguläre p-Gruppen untersuchte, sowie Kommutatorgruppen und Zusammenhänge mit Lie-Ringen und deren Identitäten (Hall-Witt-Identitäten). Viele seiner Ergebnisse präsentierte er nur in Vorlesungen. Die Hall-Littlewood-Polynome und die Hall-Algebra in der Darstellungstheorie stellte er z.B. in Vorlesungen in St Andrews 1955 vor. Er ist auch

dimensionalen K-Algebra über einen endlichen Körper der Charakteristik p

- Zusammenhang zwischen Carter-Untergruppen und p'-Hall-Untergruppen Untergruppen der Einheitengruppe einer auflösbaren assoziativen unitären endlich-dimensionalen K-Algebra über einen endlichen Körper der Charakteristik p

- Folgerungen aus den letzten beiden Thematiken für $E(K\Pi_n)$ wie z.B. die Selbstzentralität der p'-Hall-Untergruppen.

Das Zentrum von $K\Pi_n$ und das ihrer Einheitengruppe stehen im Fokus von Kapitel 8:

- Zentralität von $K\Pi_n$

- Beschreibung des Zentrums von $K\Pi_n$ durch Schnittbildung der Radikalkomplemente

- direkte Unzerlegbarkeit von $K\Pi_n$

- Beschreibung des Zentrums von Π_n mittels einer Äquivalenzrelation auf Π_n (siehe Kapitel 1)

- interne Beschreibung des Zentrums der Einheitengruppe sowie von außen durch Schnittbildung der Carter-Untergruppen

- Zusammenhang des Zentrums der Einheitengruppe und der Einheitengruppe des Zentrums von $K\Pi_n$.

Das neunte Kapitel behandelt folgende Thematiken zur Stagnation von Lie- und Gruppen-Zentralreihen:

- Stagnation der aufsteigenden Zentralreihe der assoziierten Lie-Algebra einer endlich-dimensionalen assoziativen unitären auflösbaren Algebra mit selbstzentralem Radikalkomplement beim Zentrum

- Stagnation der absteigenden Zentralreihe der assoziierten Lie-Algebra einer endlich-dimensionalen assoziativen unitären auflösbaren Algebra mit selbstzentralem Radikalkomplement bei der Ableitung

---

für den Heiratssatz in der Kombinatorik bekannt (1935). 1942 wurde Hall als Mitglied in die Royal Society gewählt, die ihm 1961 die Sylvester-Medaille verlieh. 1958 erhielt er den Senior Berwick-Preis der London Mathematical Society und 1965 ihren Larmor-Preis und die De Morgan-Medaille. 1955 bis 1957 war er ihr Präsident, nachdem er 1938 bis 1941 und 1945 bis 1948 ihr Honorary Secretary war. Zu seinen Doktoranden zählen Kurt Hirsch, Bernhard Neumann, Garrett Birkhoff, James Alexander Green, Karl Gruenberg und Brian Hartley. Auch Graham Higman war sein Schüler.

- Stagnation der aufsteigenden Zentralreihe der Einheitengruppe einer endlich-dimensionalen assoziativen unitären auflösbaren Algebra mit selbstzentralem Radikalkomplement beim Zentrum
- Konsequenzen für $K\Pi_n$ und D_n zu diesen drei allgemeiner analysierten Punkten
- Stagnation der absteigenden Zentralreihe der Einheitengruppe von $K\Pi_n$ und D_n bei der Ableitung (mit Hilfe von allgemeinen Kommutatorrechnungen zu Pierce-Komponenten und eines allgemeinen Summen-Produkt-Lemmas, das eine K-Raum-Summe mit Hilfe von Kommutatoren aus der Einheitengruppe darstellt).

In Kapitel 10 behandeln wir folgende Thematiken zu Nilpotenzklassen und auflösbaren Stufen:

- Ermittlung des Lie-Produktes[8] von k und l-stelligen assoziativen Radikalpotenzen der assoziierten Lie-Algebra einer endlich-dimensionalen assoziativen unitären auflösbaren Algebra A mit selbstzentralem diagonalisierbarem Radikalkomplement
- Bestimmung der absteigenden Zentralreihe von $rad(A)^\circ$
- Rückführung der Nilpotenzklasse von $rad(A)^\circ$ auf die von $rad(A)$
- Bestimmung der Kommutatorreihe von $rad(A)^\circ$, A°, $rad(A)$ und A
- Beschreibung der auflösbaren Stufe dieser vier auflösbaren Strukturen mit Hilfe der Nilpotenzklasse von $rad(A)$
- Konsequenzen dieser Resultate für D_n und $K\Pi_n$
- Ermittlung des Kommutators von k und l-stelligen assoziativen um Eins verschobenen Radikalpotenzen von D_n und $K\Pi_n$ (mit Hilfe des Summen-Produkt-Lemmas sowie durch Rückführung von gewissen Gruppen-Kommutatoren auf Lie-Produkte)
- Berechnung der absteigenden Zentralreihen der Eins-Einheiten[9] von D_n und $K\Pi_n$
- Rückführung der Nilpotenzklasse dieser Eins-Einheiten auf die des assoziativen Radikals
- Berechnung der absteigenden Kommutator-Reihen dieser Eins-Einheiten und der Einheitengruppen von D_n und $K\Pi_n$

[8] Für jede assoziative Algebra A wird durch die Verknüpfung $a \circ b := ab - ba$ für alle $a, b \in A$ eine Lie-Algebra A° definiert.

[9] Eins-Einheiten sind Einheiten einer assoziativen unitären Algebra der Form $1 + r$, wobei r ein Element des Nilradikals ist. Die Menge der Eins-Einheiten ist also $1 + rad(A)$.

- Rückführung der jeweiligen auflösbaren (Gruppen-)Stufen auf die entsprechenden der assoziativen und die der Lie-Struktur.

Kapitel 11 behandelt den Zusammenhang zwischen Fitting[10]-Untergruppe und Nilradikal für unitäre assoziative auflösbare Algebren motiviert durch Analysen zwischen Carter-Untergruppen und Cartan-Teilalgebren in der Dissertation von Thorsten Bauer in [3]:

- Vorbetrachtung zur allgemeinen Jordan[11]-Zerlegung der adjungierten Darstellung in einer assoziierten Lie-Algebra einer assoziativen Algebra

- Ermittlung des Nilradikals der assoziierten Lie-Algebra einer endlichdimensionalen assoziativen unitären auflösbaren Algebra mit separabler Radikalfaktorstruktur

- Ermittlung des Nilradikals der Lie-Algebren $(D_n)^\circ$ und $(K\Pi_n)^\circ$

- Ermittlung der Fitting-Untergruppe der Einheitengruppe einer endlichdimensionalen assoziativen unitären auflösbaren Algebra mit separabler Radikalfaktorstruktur

[10] Hans Fitting (geboren am 13. November 1906 in Mönchengladbach; gestorben am 15. Juni 1938 in Königsberg (Preußen)) war ein deutscher Mathematiker, der sich mit Algebra befasste und vor seinem frühzeitigen Tod wichtige Konzepte der Theorie endlicher Gruppen entwickelte. Hans Fitting war der Sohn eines Mathematik-Gymnasiallehrers und studierte Mathematik, Physik und Philosophie in Tübingen und Göttingen. Dort wurde er 1931 bei Emmy Noether promoviert. Fitting bewies Struktursätze für endliche Gruppen, wo die Fitting-Untergruppe nach ihm benannt ist. Sie wird von allen normalen nilpotenten Untergruppen einer endlichen Gruppe G erzeugt (deren Produkt nach dem Satz von Fitting wieder normal und nilpotent ist). Diese maximale nilpotente normale Untergruppe bestimmt in gewisser Weise die Struktur auflösbarer endlicher Gruppen G. Eine entsprechende Rolle bei allgemeinen endlichen Gruppen spielt die verallgemeinerte Fitting-Untergruppe, die in den 1970er Jahren durch Helmut Bender eingeführt wurde. Nach Fitting ist auch die Fitting-Zerlegung von Lie-Algebren benannt. Das Fitting-Lemma ist ein grundlegender Satz der Algebra, der verschieden formuliert wird, aber meist in der Form eines Satzes für Endomorphismenen von Moduln angegeben wird. Er besagt dann, dass ein Endomorphismus eines unzerlegbaren Moduls endlicher Länge über einem Ring entweder nilpotent oder ein Automorphismus ist.

[11] Marie Ennemond Camille Jordan, genannt Camille Jordan, (geboren am 5. Januar 1838 in Lyon; gestorben am 21. Januar 1922 in Paris) war ein französischer Mathematiker. Er hat fundamentale Beiträge zur Analysis, Gruppentheorie und Topologie geleistet. Noch heute erinnert der Begriff Jordan-Kurve an seinen Namen. Sein Lehrbuch der Gruppentheorie war im 19. Jahrhundert sehr einflussreich (es war das erste Buch über Gruppentheorie) ebenso wie sein Analysis-Lehrbuch (Cours d´Analyse). Die jordansche Normalform in der Linearen Algebra und der Satz von Jordan-Hölder in der Gruppentheorie sind nach ihm benannt. Felix Klein und Sophus Lie besuchten 1870 Paris nicht zuletzt, um bei Jordan dessen gruppentheoretische Konzepte zu studieren. Für sein Buch über Gruppentheorie erhielt er den Poncelet-Preis der Academie des Sciences. 1890 wurde er Offizier der Ehrenlegion. 1920 war er Ehrenpräsident des Internationalen Mathematikerkongresses in Straßburg.