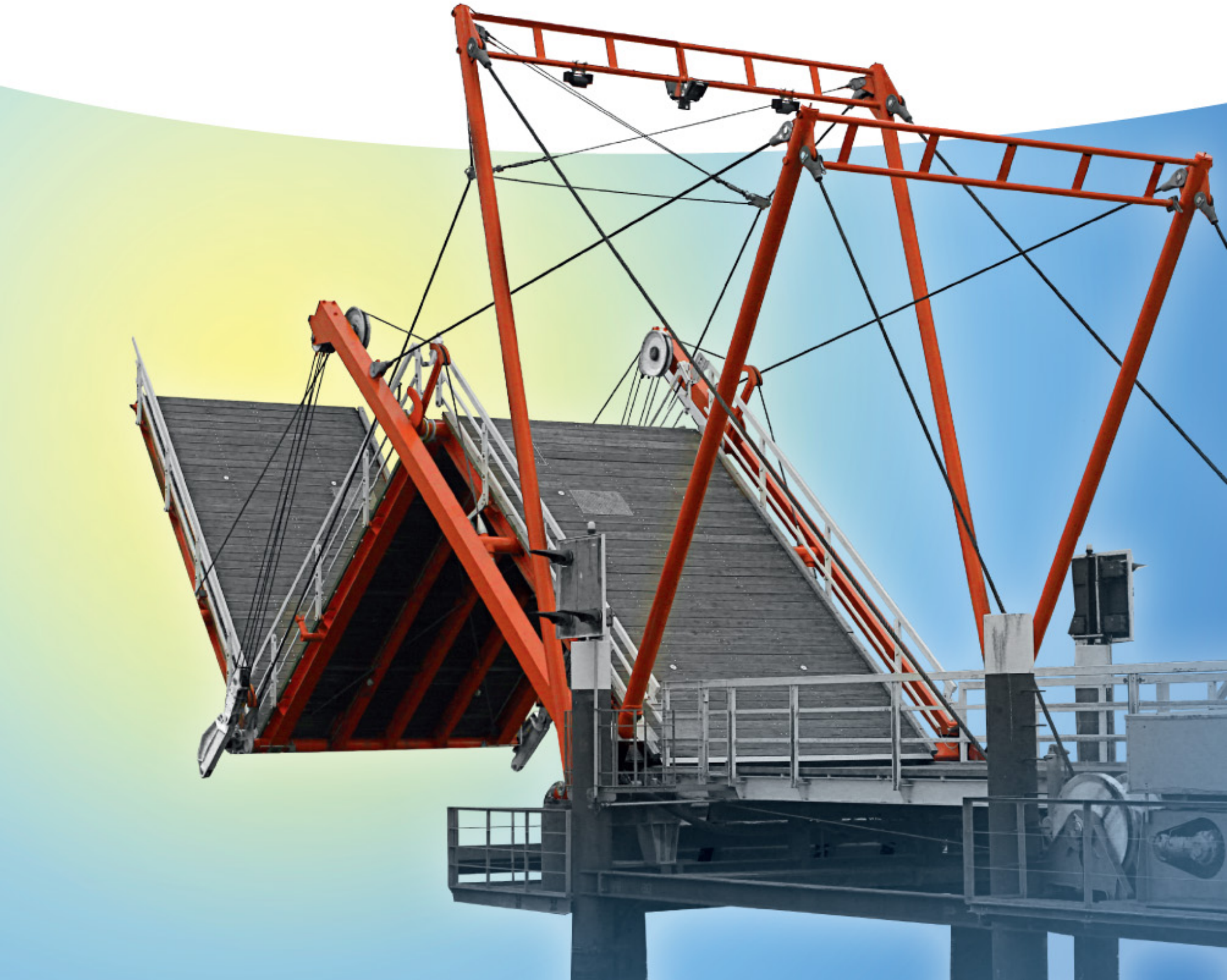
WILEY-VCH

Karl-Friedrich Fischer und Wilfried Günther

Technische Mechanik

Zweite Auflage



Karl-Friedrich Fischer und
Wilfried Günther

Technische Mechanik

Beachten Sie bitte auch weitere interessante Titel zu diesem Thema

Lange, G., Pohl, M. (Hrsg.)

Systematische Beurteilung technischer Schadensfälle

6. Auflage
2014
Print ISBN: 978-3-527-32530-6

Oettel, H., Schumann, H. (Hrgs.)

Metallografie

Mit einer Einführung in die Keramografie

15. Auflage
2011
Print ISBN: 978-3-527-32257-2

Worch, H., Pompe, W., Schatt, W. (Hrsg.)

Werkstoffwissenschaft

10. Auflage
2011
Print ISBN: 978-3-527-32323-4

Riehle, M., Simmchen, E.

Grundlagen der Werkstofftechnik

2. Auflage
2000
Print ISBN: 978-3-527-30953-5

Frohberg, M. G.

Thermodynamik für Werkstoffingenieure und Metallurgen

Eine Einführung

2. Auflage
1994
Print ISBN: 978-3-527-30922-1

Karl-Friedrich Fischer und
Wilfried Günther

Technische Mechanik

Zweite, erweiterte Auflage

WILEY-VCH
Verlag GmbH & Co. KGaA

Autoren

Karl-Friedrich Fischer
Westsächsische FH Zwickau
Fakultät Kraftfahrzeugtechnik
Dr.-Friedrichs-Ring 2
08056 Zwickau

Wilfried Günther
Westsächsische FH Zwickau
Fakultät Kraftfahrzeugtechnik
Dr.-Friedrichs-Ring 2
08056 Zwickau

Coverbild
Klappbrücke in Kiel; Foto von Jens Elgner, Heppenheim. Mit freundlicher Genehmigung.

2. Auflage 2013

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Print ISBN: 978-3-527-33381-3

Satz Kühn & Weyh, Satz und Medien, Freiburg
Druck und Bindung Betz-Druck, Darmstadt
Umschlaggestaltung Formgeber, Mannheim

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Contents

Vorwort (zur 2. Auflage) *XIII*

Einführung *XV*

1 Statik *1*
1.1 Grundbegriffe *1*
1.1.1 Starrer Körper *1*
1.1.2 Gleichgewicht *1*
1.1.3 Kraft – Kraftsysteme *2*
1.1.4 Schnittprinzip – Freischneiden *3*
1.2 Ebenes, zentrales Kraftsystem *3*
1.2.1 Zerlegen und Zusammensetzen von Kräften *3*
1.2.1.1 Analytisch *3*
1.2.1.2 Grafisch (Krafteckverfahren) *6*
1.2.2 Gleichgewicht *7*
1.2.3 Demonstrationsbeispiel (Wandkran) *7*
1.2.4 Hinweise und Tipps *8*
1.3 Ebenes, allgemeines Kraftsystem *9*
1.3.1 Kräftepaar und Moment *9*
1.3.1.1 Kräftepaar *9*
1.3.1.2 Moment einer Kraft in Bezug auf eine Achse *10*
1.3.1.3 Versetzungs-/Verschiebungsmoment *12*
1.3.2 Ermittlung der Resultierenden *13*
1.3.2.1 Analytisch *13*
1.3.2.2 Grafisch (zur Information) *15*
1.3.3 Gleichgewicht *17*
1.3.4 Demonstrationsbeispiel *17*
1.3.5 Hinweise und Tipps *19*
1.4 Schwerpunktsberechnung *20*
1.4.1 Definition, Körper- und Volumenschwerpunkt *20*
1.4.2 Flächenschwerpunkt *21*
1.4.3 Linienschwerpunkt *21*

Technische Mechanik, 2. Auflage. Karl-Friedrich Fischer und Wilfried Günther.

1.4.4 Flächenschwerpunkt zusammengesetzter Flächen – Demonstrationsbeispiel *22*
1.4.5 Hinweise und Tipps *24*
1.5 Ebene Tragwerke *24*
1.5.1 Modelle – Grundformen des starren Körpers *25*
1.5.2 Modelle von Lager- und Verbindungsarten *26*
1.5.3 Modelle der Belastung *28*
1.5.4 Auflagerreaktionen einfacher Tragwerke *30*
1.5.5 Zusammengesetzte Tragwerke *31*
1.5.5.1 Tragwerksarten (Auswahl) *31*
1.5.5.2 Statische Bestimmtheit *32*
1.5.5.3 Auflager- und Verbindungsreaktionen zusammengesetzter Tragwerke *33*
1.5.6 Hinweise und Tipps *35*
1.6 Schnittreaktionen *36*
1.6.1 Grundbegriffe *36*
1.6.2 Ermittlung von Schnittreaktionen in Tragwerken *38*
1.6.3 Zusammenhang zwischen Querkraft und Schnittmoment *41*
1.6.4 Schnittreaktionen im Kreisbogenträger – Demonstrationsbeispiel *42*
1.6.5 Hinweise und Tipps *45*
1.7 Haftung und Reibung (Reibungslehre) *47*
1.7.1 Einführung *47*
1.7.1.1 Haftreibungsproblem *48*
1.7.1.2 Gleitreibungsproblem *48*
1.7.2 Lösung von Reibungsaufgaben bei Haft- und Gleitreibung *50*
1.7.3 Reibung in Führungen und Gewinden *54*
1.7.3.1 Reibung in Führungen *54*
1.7.3.2 Reibung in Gewinden *55*
1.7.4 Seilreibung *57*
1.7.5 Rollreibung *60*
1.7.6 Hinweise und Tipps *61*
1.8 Ebene Fachwerke *61*
1.8.1 Begriff und statische Bestimmtheit *61*
1.8.2 Ermittlung der Stabkräfte *62*
1.8.3 Seil unter Eigengewicht *64*
1.8.4 Ausblick und Hinweise *68*
1.9 Räumliches Kraftsystem – Raumstatik *69*
1.9.1 Kraft, Moment, Gleichgewichtsbedingungen *69*
1.9.2 Auflagerreaktionen einfacher Tragwerke *70*
1.9.3 Ermittlung von Schnittreaktionen *74*
1.9.4 Hinweise und Tipps *80*
1.10 Zusammenfassung *80*

2 Festigkeitslehre *83*
2.1 Mathematischer Vorspann – Flächenmomente *n*-ter Ordnung *83*
2.1.1 Definition *83*
2.1.2 Berechnung von Flächenträgheitsmomenten einzelner Flächen *85*
2.1.3 Transformation von FTM zwischen parallelen Koordinatensystemen *88*
2.1.4 Ermittlung von FTM zusammengesetzter Flächen *89*
2.1.5 FTM bei Drehung des Koordinatensystems *91*
2.1.6 Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente *92*
2.1.7 Hinweise und Tipps *94*
2.2 Grundlagen der Festigkeitslehre *95*
2.2.1 Einführung *95*
2.2.2 Beanspruchungsarten und Lastfälle *96*
2.2.3 Spannungsbegriff – Spannungszustand *98*
2.2.3.1 Vorbetrachtung *98*
2.2.3.2 Definition der Spannung *98*
2.2.3.3 Einachsiger Spannungszustand *99*
2.2.3.4 Spannungszustand reiner Schub *103*
2.2.3.5 Überlagerung der Spannungszustände *104*
2.2.4 Formänderungen – Verzerrungszustand *105*
2.2.4.1 Vorbetrachtung *105*
2.2.4.2 Verschiebungen und Verzerrungen *106*
2.2.4.3 Ebener Verzerrungszustand *107*
2.2.5 Werkstoffverhalten – Stoffgesetz *110*
2.2.5.1 Zugversuch – Hooke'sches Gesetz *110*
2.2.5.2 Thermische Dehnung – Temperaturspannungen *113*
2.2.5.3 Ausblick *115*
2.2.6 Formänderungsarbeit *116*
2.2.7 Grundaufgaben der Festigkeitslehre *117*
2.3 Zug-Druck-Beanspruchung *119*
2.3.1 Zug-Druck-Spannung *119*
2.3.2 Formänderung *121*
2.3.2.1 Formänderungsberechnung *121*
2.3.2.2 Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke *123*
2.3.3 Flächenpressung und Lochleibung *125*
2.3.4 Formänderungsenergie *125*
2.3.5 Hinweise und Tipps *126*
2.4 Abscherbeanspruchung *127*
2.4.1 Beispiele *127*
2.4.2 Ermittlung der Abscherspannung *127*
2.5 Biegebeanspruchung – Biegung *128*
2.5.1 Voraussetzungen *128*
2.5.2 Spannungsberechnung bei gerader Biegung *129*
2.5.3 Spannungsberechnung bei schiefer Biegung *134*
2.5.4 Formänderung bei Biegung *136*
2.5.4.1 Voraussetzungen *136*

2.5.4.2 Differentialgleichung der elastischen Linie *136*
2.5.4.3 Überlagerungsverfahren *144*
2.5.5 Ergänzungen *146*
2.5.5.1 Träger aus inhomogenem Werkstoff – Schichtbalken *146*
2.5.5.2 Ausblick *148*
2.5.6 Formänderungsenergie *150*
2.5.7 Hinweise und Tipps *150*
2.6 Torsionsbeanspruchung – Torsion *152*
2.6.1 Torsion von Kreis- oder Kreisringquerschnitten *152*
2.6.1.1 Voraussetzungen *152*
2.6.1.2 Spannungsberechnung *154*
2.6.1.3 Formänderungsberechnung *155*
2.6.1.4 Statische Unbestimmtheit bei Torsion *155*
2.6.1.5 Formänderungsenergie *156*
2.6.2 Torsion von nichtkreisförmigen Vollquerschnitten (Einblick) *156*
2.6.3 Torsion dünnwandiger Profile *159*
2.6.3.1 Dünnwandig, geschlossene Profile *159*
2.6.3.2 Dünnwandig, offene Profile *162*
2.6.3.3 Vergleich zwischen dünnwandig geschlossenen und offenen Profilen *164*
2.6.4 Formänderungsenergie *165*
2.6.5 Hinweise und Tipps *165*
2.7 Querkraftschub *166*
2.7.1 Voraussetzungen *167*
2.7.2 Einfach zusammenhängende Vollquerschnitte *167*
2.7.2.1 Spannungsberechnung *168*
2.7.2.2 Formänderung und Formänderungsenergie *170*
2.7.2.3 Demonstrationsbeispiel *170*
2.7.3 Querkraftschubbeanspruchung dünnwandiger Profile *172*
2.7.3.1 Vorbemerkungen *172*
2.7.3.2 Dünnwandig, geschlossene Profile *172*
2.7.3.3 Dünnwandig, offene Profile *173*
2.7.3.4 Demonstrationsbeispiel *174*
2.7.3.5 Schubmittelpunkt *175*
2.7.4 Hinweise und Tipps *177*
2.8 Zusammengesetzte Beanspruchung *179*
2.8.1 Vorbemerkungen *179*
2.8.2 Zusammengesetzte Normalbeanspruchung *180*
2.8.3 Zusammengesetzte Normal- und Tangentialbeanspruchung *182*
2.8.3.1 Vorbemerkungen *182*
2.8.3.2 Festigkeitshypothesen und Vergleichsspannungen *183*
2.8.3.3 Anwendung auf die Bewertung von Wellen *185*
2.8.4 Hinweise und Tipps *188*
2.9 Energiemethoden *189*
2.9.1 Vorbemerkungen *189*

2.9.2 Prinzip der virtuellen Arbeit *190*
2.9.3 Äußere Arbeit und Einflusszahlen *192*
2.9.4 Sätze von Castigliano *194*
2.9.5 Formänderungsberechnung statisch bestimmter Tragwerke *196*
2.9.6 Auflager- und Schnittreaktionsermittlung statisch unbestimmter Tragwerke *199*
2.9.6.1 Vorbemerkungen *199*
2.9.6.2 Anwendung des Satzes von Castigliano *199*
2.9.6.3 Demonstrationsbeispiele *200*
2.9.7 Hinweise und Tipps *206*
2.10 Einführung in die Stabilitätstheorie *207*
2.10.1 Vorbemerkungen *207*
2.10.2 Knickung gerader Stäbe *208*
2.10.2.1 Elastisches Knicken *208*
2.10.2.2 Unelastisches Knicken *213*
2.10.3 Hinweise und Tipps *214*
2.11 Mehrachsige Spannungszustände *216*
2.11.1 Vorbemerkungen *216*
2.11.2 Dünnwandige Behälter (Membrantheorie) *219*
2.11.2.1 Voraussetzungen *219*
2.11.2.2 Spannungsermittlung *220*
2.11.2.3 Demonstrationsbeispiel *222*
2.11.2.4 Hinweise und Tipps *223*
2.11.3 Ebene, rotationssymmetrische Probleme *224*
2.11.4 Dickwandiges Rohr *226*
2.11.4.1 Formänderungs- und Spannungsermittlung *226*
2.11.4.2 Beispiel *228*
2.11.5 Rotierende Scheibe *229*
2.11.5.1 Voraussetzungen *229*
2.11.5.2 Formänderungs- und Spannungsermittlung *229*
2.11.5.3 Beispiele *232*
2.11.6 Kreisringplatte *234*
2.11.6.1 Voraussetzungen *234*
2.11.6.2 Ermittlung der Plattendurchsenkung *235*
2.11.6.3 Beispiele *239*
2.11.7 Hinweise und Tipps *242*
2.12 Ergänzungen *244*
2.12.1 Werkstoffmechanik *244*
2.12.1.1 Vorbemerkungen *244*
2.12.1.2 Bruchverhalten *245*
2.12.1.3 Dauerfestigkeit *247*
2.12.2 Bruchmechanik *249*
2.12.2.1 Voraussetzungen *249*
2.12.2.2 Linear-elastische Bruchmechanik *250*
2.12.2.3 Dauer des stabilen Risswachstums – Lebensdauer *253*

2.12.2.4 Ausblick *254*
2.12.3 Plastizitätstheorie *255*
2.12.3.1 Voraussetzungen *255*
2.12.3.2 Traglastberechnung in Fachwerken *256*
2.12.3.3 Traglastmoment im Stab unter reiner Biegung *259*
2.13 Zusammenfassung *260*

3 Kinematik *263*
3.1 Kinematik des Punktes *263*
3.1.1 Punktbahn *263*
3.1.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung *264*
3.1.3 Geradlinige Bewegung *265*
3.1.4 Beispiel zur geradlinigen Bewegung *268*
3.1.5 Ebene Bewegung *269*
3.1.6 Darstellung der Punktbewegung in anderen Koordinaten *271*
3.2 Kinematik des starren Körpers *273*
3.2.1 Bewegungsarten des starren Körpers *273*
3.2.2 Kinematik der Rotation um eine feste Achse *274*
3.2.3 Kinematik der allgemeinen Bewegung *276*
3.2.4 Ebene Bewegung *276*
3.2.4.1 Überlagerung von Translation und Rotation *276*
3.2.4.2 Rotation um den Momentanpol *278*
3.2.4.3 Demonstrationsbeispiel *279*
3.2.5 Relativbewegung *281*
3.3 Hinweise und Zusammenfassung *284*

4 Kinetik *287*
4.1 Kinetik des Massenpunktes *287*
4.1.1 Kinetisches Grundgesetz *287*
4.1.2 Kinetostatische Methode *288*
4.1.3 Arbeits- und Energiesatz *293*
4.1.4 Impuls- und Drehimpulssatz *298*
4.1.5 Hinweise und Tipps *300*
4.2 Kinetik des Massenpunktsystems *300*
4.2.1 Schwerpunktsatz *301*
4.2.2 Arbeits- und Energiesatz *303*
4.2.3 Impuls- und Drehimpulssatz *305*
4.3 Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse *308*
4.3.1 Kinetisches Grundgesetz *308*
4.3.2 Axiale Massenträgheitsmomente *309*
4.3.3 Deviationsmomente, Hauptachsen, Hauptträgheitsmomente *312*
4.3.4 Arbeits- und Energiesatz *314*
4.3.5 Drehimpulssatz *315*
4.3.6 Gegenüberstellung wichtiger Größen bei Translation und Rotation *319*
4.3.7 Demonstrationsbeispiel *320*

4.3.8 Hinweise und Tipps *323*
4.4 Ebene Bewegung eines starren Körpers *324*
4.4.1 Kinetostatische Methode *324*
4.4.2 Arbeits- und Energiesatz *327*
4.4.3 Impuls- und Drehimpulssatz *329*
4.5 Ebene Bewegung eines Systems starrer Körper *330*
4.5.1 Zwangsbedingungen *330*
4.5.2 Kinetostatische Methode *332*
4.5.3 Arbeitssatz *334*
4.5.4 Hinweise und Tipps *337*
4.6 Stoßprobleme *338*
4.6.1 Grundbegriffe, Voraussetzungen *338*
4.6.2 Gerader zentrischer Stoß *339*
4.6.3 Gerader exzentrischer Stoß *342*
4.6.4 Drehstoß *344*
4.7 Mechanische Schwingungen *345*
4.7.1 Grundbegriffe *346*
4.7.2 Freie ungedämpfte Schwingungen mit einem Freiheitsgrad *348*
4.7.2.1 Schwingungsmodelle *348*
4.7.2.2 Bewegungsgleichung *348*
4.7.2.3 Lösung der Bewegungsgleichung *350*
4.7.2.4 Schwingungssysteme mit mehreren Federn *351*
4.7.3 Freie gedämpfte Schwingungen mit einem Freiheitsgrad *353*
4.7.3.1 Dämpfungsarten *354*
4.7.3.2 Bewegungsgleichung *354*
4.7.3.3 Lösungen der Bewegungsgleichung *355*
4.7.4 Erzwungene gedämpfte Schwingungen mit einem Freiheitsgrad *358*
4.7.4.1 Bewegungsgleichungen für verschiedene Erregerarten eines Längsschwingers *358*
4.7.4.2 Lösung der Bewegungsgleichung *360*
4.7.5 Beispiele *363*
4.7.6 Hinweise und Tipps *367*
4.8 Zusammenfassung *368*

5 Numerische Methoden *371*
5.1 Einführende Hinweise *371*
5.2 Von der Berechnungsformel zum Algorithmus – Beispiele *371*
5.2.1 Ermittlung des Schwerpunktes und der Flächenträgheitsmomente zusammengesetzter Flächen *371*
5.2.2 Schnittreaktionen im Stab *374*
5.2.3 Formänderung bei Biegung *376*
5.3 Überblick zu Simulationsverfahren *377*
5.3.1 Übertragungsmatrizenverfahren *378*
5.3.2 Finite-Element-Methode *380*
5.3.2.1 Vorbemerkungen *380*

5.3.2.2 Grundidee der FEM *380*
5.3.2.3 Demonstrationsbeispiel *384*
5.3.2.4 Anwendungsspektrum *386*
5.3.3 Randelementmethode *387*
5.3.4 Simulation von Mehrkörpersystemen *388*
5.4 Zusammenfassung *389*

Anhang *391*
Ausgewählte Werkstoffkennwerte *391*
Haft- und Gleitreibungskoeffizienten (Auswahl) *391*
Elastizitätsmodul E, Schubmodul G und linearer thermischer Ausdehnungskoeffizient α_{th} ausgewählter Werkstoffe *392*

Ergänzende Literatur *393*
Lehrbücher und Aufgabensammlungen zur Technischen Mechanik (Auswahl) *395*
Tabellen- und Taschenbücher (Auswahl) *393*

Sachwörterverzeichnis *395*

Vorwort (zur 2. Auflage)

Warum kann man im Gegensatz zum vierfüßigen ein dreifüßiges Maschinengestell stets ohne „kippeln“ auf eine ebene starre Unterlage stellen, wieso benutzt man sehr häufig Querschnitte von querbelasteten Trägern in Form eines Doppel-T (I-Profil), warum versucht man schroffe Querschnittsänderungen in hochbeanspruchten Wellen zu vermeiden, wie kann man die Formänderung von Tragwerksteilen im Betriebszustand vorausberechnen, wie erreicht man mittels Werkstoffauswahl und Geometrieoptimierung, dass Triebwerksteile eines PKW eine Lebensdauer von mindestens 3000 Betriebsstunden aufweisen, warum und in welchen Drehzahlbereichen treten beim Anfahren einer Maschine deutlich verstärkte Schwingungen auf?

Dies sind nur wenige, aber typische Fragen aus dem breiten Spektrum, dem der Ingenieur in seiner Tätigkeit als Konstrukteur, aber auch Werkstoffmechaniker und vor allem Berechnungsingenieur begegnet.

Befriedigende Antworten auf derartige Fragen, die oftmals mitentscheidend für die Konkurrenzfähigkeit eines Produktes sein können, lassen sich vor allem mit Hilfe der Kenntnisse und Methoden der Wissenschaftsdisziplin Technische Mechanik geben. Als „flankierende Partner“ benötigen wir die Konstruktionslehre, die Thermodynamik, die Strömungsmechanik und vor allem die Werkstoffwissenschaft/Werkstoffprüfung.

Letztendlich geht es darum, anhand geeigneter Modelle der Bauteile und Konstruktionen, d. h. Modelle der Geometrie, der Belastung, des Werkstoffes und der Umgebungsbedingungen, eine Bewertung derselben hinsichtlich ihrer Festigkeit, Lebensdauer, Zuverlässigkeit und ihres Verformungs- und Schwingungsverhaltens vorzunehmen.

Damit ist die effektive Vermittlung derartiger anwendbarer Kenntnisse im Studium des Ingenieurwesens an Hochschulen und Universitäten ein unverzichtbares „Muss“.

Darüber hinaus hat sich mit der Entwicklung, Verbreitung und Anwendung von Software der computergestützten Konstruktion ein Zustand eingestellt, dem seitens der Lehre durch die Verschiebung einiger Gewichte in der Stoffvermittlung entsprochen wird.

Der Inhalt des vorliegenden Lehrbuches ist vorwiegend auf den Anwender der Technischen Mechanik und ihrer Methoden zugeschnitten. Dieser wird vor allem

Technische Mechanik, 2. Auflage. Karl-Friedrich Fischer und Wilfried Günther.

befähigt, anhand soliden Grundwissens die Maxime aller Bauteilbewertung „so genau wie nötig, so einfach wie möglich“ zu befolgen.

Dies gelingt umso besser, je eher das Computerprogramm und dessen Ergebnisse als ein effektives Werkzeug zur Bauteilbewertung angesehen werden, ohne dass der wesentliche Schritt der Abschätzung und Sinnfälligkeit dieser Resultate durch den Ingenieur mit dem eigenen „Know-how“ und herkömmlichen Methoden vergessen wird. Folgerichtig widmet sich dieses Lehrbuch auch dem Spagat zwischen den Lösungswegen der traditionellen Technischen Mechanik und den Möglichkeiten der Anwendung numerischer Methoden der Festkörpermechanik.

Der alleinige Besitz des Lehrbuches verbürgt leider bis dato noch nicht die Beherrschung des Inhalts, sondern auch hier gilt die Regel beim Studium „10 % Inspiration und 90 % Transpiration“.

Zum Schluss danken wir dem Wiley-VCH Verlag Weinheim, insbesondere Herrn Dr. Martin Preuß, Frau Dr. Waltraud Wüst und Herrn Hans-jochen Schmitt, für die vertrauensvolle und partnerschaftliche Zusammenarbeit bei der Herstellung der zweiten Auflage dieses Lehrbuches.

Zwickau, im Frühjahr 2013 Die Autoren

Einführung

Ungeachtet der angenehmen Seiten des studentischen Daseins müsste der angehende Ingenieur im Hinblick auf die im späteren Berufsleben an ihn gestellten Anforderungen bemüht sein, sein Studium effektiv und effizient zu organisieren und zu absolvieren.

Hat man sich vorgenommen Ingenieur zu werden, also nach einem erfolgreichen universitären oder Fachhochschul-Studium den akademischen Grad Diplom-Ingenieur, Bachelor of Engineering oder Master of Engineering des Maschinen- und/oder Kraftfahrzeugbaus zu erwerben, dann sollte der Weg zum Vordiplom bzw. zum ersten Praktikumssemester zielstrebig und in der gegebenen Kürze erfolgreich durchlaufen werden.

Ein wichtiger Dreh- und Angelpunkt der Ausbildung (und späteren Praxis) ist das Fach *Technische Mechanik* (TM). In Abhängigkeit des gewählten Studienganges ist dieses im Allgemeinen über mehrere Semester in aufeinander aufbauende Pflichtmodule gegliedert. Studentenzeitungen, Studieninformationen für erstsemestrige Studenten, wie sie von verschiedenen Fachschaften verbreitet werden, entnimmt man oftmals den dezenten Hinweis „steht TM am Stundenplan, fängt schon das Dilemma an“. Nachrichten über hohe Durchfallquoten in den obligaten Prüfungen, überfüllte Hörsäle und überbelegte Übungen, Seminare und Praktika tun ein Übriges, dem Fach TM mit seiner eigentlich „zeitlosen Schönheit und Praxisnähe“ den Mantel einer Angstdisziplin überzustülpen.

Nun wäre es vermessen, mit einem Lehrbuch allein zu versuchen, dieses etwas angekratzte Image vollständig zu korrigieren. Aber vielleicht gelingt es mit den nachfolgenden Ausführungen, den wesentlichen Inhalt der Technischen Mechanik so zu vermitteln, dass an Stelle des Attributes „schwierig“ schließlich das Motto „anspruchsvoll, aber erlernbar und notwendig“ gesetzt werden kann.

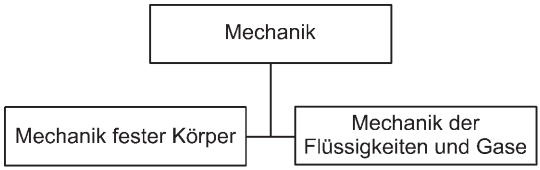
Die Gültigkeit des Letzteren beweisen vor allem die zahllosen Absolventen der Hochschulen, die Kenntnisse und Methoden der Technischen Mechanik erfolgreich und zu unser aller Nutzen anwenden.

Technische Mechanik, 2. Auflage. Karl-Friedrich Fischer und Wilfried Günther.

Zunächst wollen wir uns mit dem Begriff Technische Mechanik etwas näher befassen. Die Aufgabe der Mechanik als ältestes Teilgebiet der Physik lässt sich wie folgt umreißen:

Die Aufgabe der Mechanik ist die Untersuchung der in der Natur und Technik vorkommenden Bewegungen von Körpern, Flüssigkeiten und Gasen und deren mathematische Beschreibung.

Die Mechanik lässt sich folglich grob in zwei große Teilgebiete gliedern:



Die Technische Mechanik ist innerhalb der Mechanik fester Körper die Wissenschaftsdisziplin von der Änderung des

- Bewegungszustandes,
- Formzustandes und
- Beanspruchungs-/Spannungszustandes

technischer Gebilde (*tragender Konstruktionen*, Bauteile).

Den Grenzfällen der Bewegung „Ruhe“ bzw. gleichförmige Bewegung kommt dabei große Bedeutung zu.

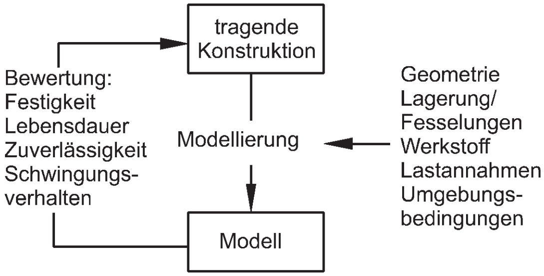
Letztendlich geht es zumeist darum, tragende Konstruktionen und Bauteile hinsichtlich ihrer

- *Bewegung* (z. B. Schwingung) und *Formänderung,*
- *Festigkeit,*
- *Lebensdauer* (Nutzungsdauer) und
- *Zuverlässigkeit* (im statistischen Sinne),

zu bewerten.

Diese *Bewertung* erfolgt sowohl an bereits existierenden als auch an solchen Bauteilen, die sich im Entwurfsstadium befinden.

Es gelingt jedoch mittels *analytischer und numerischer Methoden* nicht, derartige Aussagen über den Zustand am konkreten Bauteil zu machen. Vielmehr ist es notwendig, ein zumindest gedankliches *Modell des Bauteiles* zu schaffen, an dem die notwendigen Untersuchungen durchgeführt werden. Die daraus resultierende Vorgehensweise lässt sich übersichtlich im nachfolgenden Schema veranschaulichen.



Für die *Modellierung* gilt der Grundsatz: *So einfach wie möglich, so genau wie nötig.*

(Sie werden noch feststellen, dass sich diese Leitregel einfacher erlernen als konsequent umsetzen lässt.)

Obwohl die Methoden der experimentellen Mechanik nicht Gegenstand des Buches sind, wird auf folgenden Umstand hingewiesen. Die Anwendung der *experimentellen Mechanik* am Bauteil oder entsprechenden physischen Modellen erweist sich vor allem dann als notwendig, wenn das noch weitgehend unbekannte Belastungsmodell geschaffen werden muss (sog. Lastannahmen) und wenn die Ergebnisse der analytischen und numerischen Untersuchungen zu Zweifel Anlass geben. Grundsätzlich sollte bei allen hochbeanspruchten Bauteilen, die z. T. auch in großer Stückzahl gefertigt werden und die einem hohen sicherheitstechnischen Standard genügen müssen, experimentelle Bauteiluntersuchungen durchgeführt werden, was auch vielfach in entsprechenden Regelwerken festgelegt ist.

Darüber hinaus dienen experimentelle Methoden in Verbindung mit der Werkstoffprüfung der Ermittlung der für viele Rechnungen notwendigen Werkstoffkennwerte wie Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl, thermischer Ausdehnungskoeffizient, Streckgrenze, Bruchfestigkeit, Dauerfestigkeit, Bruchzähigkeit usw.

Um den erforderlichen Ablauf insgesamt bewältigen zu können, sind anspruchsvolle, aber übersichtliche und erlernbare Kenntnisse und Methoden notwendig. Betreffs Ihrer Vorkenntnisse wird neben der Physik vor allem auf die Mathematik zurückgegriffen. Sollten sie Lücken auf den Gebieten Vektoralgebra, lineare Algebra (Gleichungslehre) und Grundlagen der Differential- und Integralrechnung haben, dann sollten Sie diese schnellstmöglich schließen.

Der entsprechende Lehrinhalt der Technischen Mechanik wird in vielen Darstellungen – und auch hier – nach den folgenden Schwerpunkten abschnittsweise gegliedert:

- *Statik* (einschließlich Haftung und Reibung)
- *Festigkeitslehre* (Elastostatik)
- *Kinematik*
- *Kinetik*
- *Numerische Methoden*

Bevor wir mit der Abhandlung der Statik beginnen, erweist es sich als sinnvoll, die nach Isaac Newton benannten Axiome voranzustellen. Axiome sind bekanntlich durch die Erfahrung bestätigte Gesetze. Die Darstellung erfolgt zugeschnitten auf die Belange der Technischen Mechanik und aus heutiger Sicht:

1. Axiom (Trägheitsgesetz)

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe bzw. der gleichförmigen Bewegung, solange keine äußere resultierende Belastung einwirkt.

2. Axiom (kinetische Grundgesetze)

Wirkt eine äußere resultierende Belastung auf einen Körper ein, dann ändert sich seine Bewegungsgröße.

3. Axiom (Wechselwirkungsgesetz)

Bei der mechanischen Wechselwirkung zwischen zwei Körpern sind Wirkung und Gegenwirkung vom Betrag gleich und in der Richtung entgegengesetzt (lat.: *actio est reactio*).

Zusätzlich benötigen wir das *Superpositionsprinzip*, den sog. Parallelogramm-Satz (nach Simon Stevin):

Mechanische Wirkungen addieren sich jeweils wie Vektoren.

1
Statik

Die Statik ist die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte am ruhenden starren Körper bzw. an Teilen davon.

1.1
Grundbegriffe

Die in der Begriffserklärung der Statik enthaltenen Grundbegriffe werden nachfolgend erläutert.

1.1.1
Starrer Körper

Starrer Körper ist ein für die weiteren Betrachtungen notwendiger Abstraktionsbegriff:

Starr bezeichnet man einen Körper, der unter Einwirkung von Kräften seine Form nicht ändert.

Bei technischen Gebilden ist dies nur näherungsweise erfüllt.

1.1.2
Gleichgewicht

Als Gleichgewicht bezeichnet man die Unveränderlichkeit (Invarianz) des Bewegungszustandes bzw. den Zustand eines Körpers, bei dem die Bedingung gleichförmige Bewegung oder Ruhe erfüllt ist.
Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen:

Die möglichen Verschiebungen und Verdrehungen des starren Körpers müssen so unterbunden werden, damit sich der Bewegungszustand nicht ändert.

Die möglichen Verschiebungen und Verdrehungen des starren Körpers nennt man Freiheitsgrade. Der starre Körper besitzt in der Ebene drei Freiheitsgrade (zwei Verschiebungen in senkrecht zueinander stehenden Richtungen, eine Ver-

Technische Mechanik, 2. Auflage. Karl-Friedrich Fischer und Wilfried Günther.

drehung um eine Achse senkrecht zur Ebene) und im Raum sechs Freiheitsgrade (drei Verschiebungen in Richtung dreier senkrecht aufeinander stehender Achsen und drei Verdrehungen jeweils um diese Achsen).

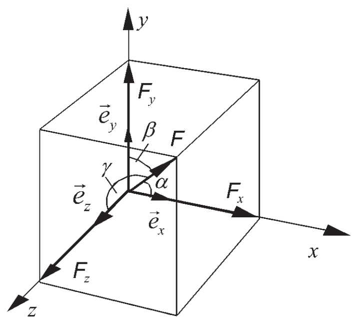
1.1.3
Kraft – Kraftsysteme

Als Kraft bzw. Einzelkraft bezeichnet man eine Wechselwirkung zwischen Körpern, durch die Änderungen des mechanischen Zustandes der Körper verursacht werden (Bewegung, Form, Spannung). Die Wirkung erfolgt geradlinig. Die entsprechende Gerade nennt man *Wirkungslinie* (WL) der Kraft. Offensichtlich benötigen wir zur eindeutigen Erfassung der Kraft sowohl ihren Betrag als auch die Richtung. Damit ist die Kraft mathematisch als Vektor beschreibbar. Der Anfangspunkt des Kraftvektors heißt *Kraftangriffspunkt*. Entsprechend dem 2. Newton'schen Axiom ist die Kraft mit der Beschleunigung des massebehafteten Körpers verknüpft. Für einen ruhenden Körper ergibt sich dessen Kraftwirkung (das *Gewicht* bzw. *Gewichtskraft*) aus dem Produkt von Erdbeschleunigung ($g \approx 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$) und seiner Masse (der sog. schweren Masse). Danach besitzt die Kraft die kohärente Maßeinheit 1 Newton = $1\,\mathrm{N} := 1\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$.

Aus der Erfahrung weiß man, dass der Kraftangriffspunkt beliebig auf der Wirkungslinie gewählt werden kann:

Axiom: Die Kraft ist ein linienflüchtiger Vektor.

Zur Beschreibung der Bestimmungsgrößen einer Kraft betrachten wir die nebenstehende Skizze. Durch den Ursprung eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems verläuft die WL einer Kraft. Als Kraftangriffspunkt wird der Ursprung gewählt. Den Koordinaten ordnen wir die Einheitsvektoren (d. h., Richtungsvektoren vom Betrag 1) zu. Nunmehr kann man den *Kraftvektor* durch seine *Komponenten* in Richtung der Koordinatenachsen darstellen:



Kraftvektor: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$

Komponenten: $\vec{F}_x = F_x \cdot \vec{e}_x\ ,\quad \vec{F}_y = F_y \cdot \vec{e}_y\ ,\quad \vec{F}_z = F_z \cdot \vec{e}_z$

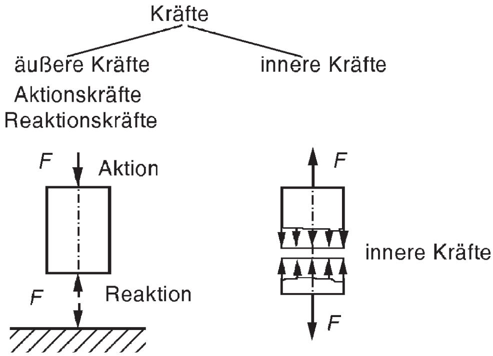
$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ Einheitsvektoren, F_x , F_y , F_z sind die Beträge der Komponenten.

Betrag: $|\vec{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$.

Die Winkel α, β, γ zwischen dem Kraftpfeil und den Achsen dienen zur Beschreibung der Richtung.

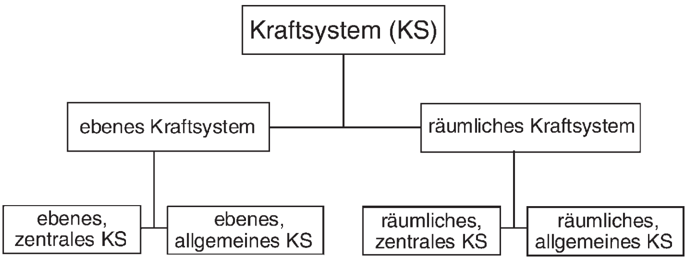
Es gibt eine Reihe von Möglichkeiten zur Einteilung der Kräfte. Wir ordnen hier nach ihrem Wirkungsort:

Kräfte, die keine Reaktionskräfte im Sinne der Statik sind, bezeichnen wir als *eingeprägte Kräfte*. Dies sind z. B. die Gewichtskraft und Belastungen.



Auf ein technisches Gebilde bzw. auf das entsprechende Modell, den starren Körper, wirken im Allgemeinen mehrere Kräfte ein. Man fasst diese als Kraftsysteme (oder auch Kräftegruppen) zusammen. Die Statik wird im Wesentlichen nach der Struktur der auftretenden Kraftsysteme geordnet.

In Abhängigkeit davon, ob die zum Kraftsystem gehörenden Kräfte eine gemeinsame Wirkungsebene besitzen oder nicht, unterscheidet man ebene und räumliche Kraftsysteme.



Als zentral bezeichnen wir ein Kraftsystem dann, wenn die WL der Kräfte einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen.

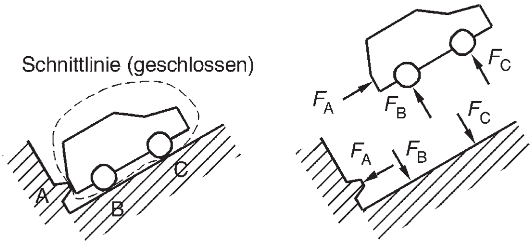
1.1.4
Schnittprinzip – Freischneiden

Als Freischneiden bezeichnet man das *gedankliche Zerlegen* der Systeme oder auch einzelner starrer Körper in Einzelkörper bzw. Teile davon. Dies erfolgt anschaulich durch das gedankliche Umfahren der betreffenden Körper durch jeweils geschlossene *Schnittflächen* (im Raum) und *Schnittlinien* (in der Ebene).

An den Schnittstellen werden dann entsprechend dem 3. Newton'schen Axiom die paarweisen Reaktionskräfte frei. Diese besitzen an den je Schnittstelle neu entstandenen zwei Schnittufern jeweils die gleiche Wirkungslinie, den gleichen Betrag und entgegengesetzte Richtung.

(Die Grundidee wurde übrigens bereits Mitte des 18. Jahrhunderts vom Schweizer Mathematiker Leonhard Euler entwickelt; ein Name, der uns noch an vielen Stellen der Technischen Mechanik begegnen wird.) Ein Beispiel für das Freischneiden in der Ebene zeigt das nachstehende Bild.

Unter dem Leitspruch „vom Einfachen zum Schwierigen", wollen wir nunmehr die mechanischen Gesetzmäßigkeiten in Kraftsystemen kennenlernen. Dementsprechend folgt zunächst das ebene, zentrale Kraftsystem.



1.2
Ebenes, zentrales Kraftsystem

Ein ebenes, zentrales Kraftsystem liegt dann vor, wenn die Wirkungslinien der Kräfte eine gemeinsame Ebene aufspannen und einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen. Wir legen in die Wirkungsebene ein kartesisches Koordinatensystem *x, y*.

1.2.1
Zerlegen und Zusammensetzen von Kräften

Die zum Kraftsystem gehörenden Kräfte üben eine Gesamtwirkung oder auch resultierende Wirkung auf den starren Körper aus. Um dies beschreiben zu können, ist es zunächst notwendig, zu untersuchen, wie eine Kraft in ihre Komponenten zerlegt wird und umgekehrt, wie mehrere Kräfte zu einer Kraft zusammengesetzt (addiert) werden. Im Weiteren bezeichnen wir den Kraftvektor mit $\vec{F}$ und seinen Betrag mit F.

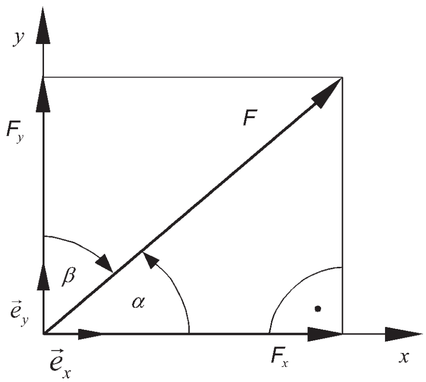
1.2.1.1 Analytisch

Wir *zerlegen* eine Kraft in ihre rechtwinkligen Komponenten, d. h., wir ermitteln analytisch die Beträge der Komponenten des Kraftvektors. Der Kraftangriffspunkt liegt im Koordinatenursprung.

geg.: F, α ist der Winkel zwischen der Abszisse und dem Kraftvektor.

ges.: F_x, F_y

Lösung:



Die Projektion des Kraftvektors auf die beiden Koordinatenachsen liefert jeweils die Komponenten. Auf Grund des entstehenden rechtwinkligen Dreieckes aus F (Hypothenuse), F_x (Ankathete) und F_y (Gegenkathete) gelten nachfolgende trigonometrischen Beziehungen:

$$\sin\alpha = \frac{F_y}{F}\,,\ \cos\alpha = \frac{F_x}{F}\,.$$

Damit kann man die Beträge der Komponenten angeben:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F\cos\alpha,\\ F_y &= F\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Benutzen wir zur Beschreibung der Komponenten (Katheten) dagegen den Komplementärwinkel β, dann gelten die nachfolgenden Beziehungen:

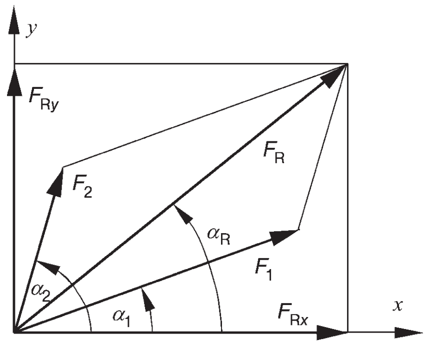
$$F_x = F\cdot\ \sin\beta\ ,\quad F_y = F\cdot\ \cos\beta\,,\ \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Wir untersuchen das *Zusammensetzen* von Kräften. Dabei ist der Lösungsweg durch die Nutzung des Superpositionsprinzips (oder auch Parallelogrammsatz) bereits vorgegeben. Auf unser Problem angewendet heißt dies: *Kräfte addieren sich wie Vektoren*. Die Vektorsumme von Kräften heißt *resultierende Kraft* oder auch nur *Resultierende*. Ihre Wirkung auf den starren Körper ist gleich der Summe der Einzelwirkungen der Kräfte. Diese Gleichheit von resultierender Wirkung und der Summe der Einzelwirkungen bezeichnet man als *statische Äquivalenz*. Der Übersichtlichkeit wegen addieren wir zunächst zwei Kräfte, vgl. untenstehendes Bild:

geg.: $F_1, \alpha_1,\ F_2,\ \alpha_2$
ges.: $F_R\ ,\ \alpha_R$ (resultierende Kraft nach Betrag, Richtung)

Lösung:

Die Resultierende ergibt sich als Vektorsumme der beiden Kräfte:



$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Nunmehr zerlegt man die beiden Kräfte in ihre Komponenten, setzt in obige Gleichung ein und fasst in den beiden Koordinatenrichtungen zusammen:

$$\vec{F}_R = (F_{1x} + F_{2x})\cdot\vec{e}_x + (F_{1y} + F_{2y})\cdot\vec{e}_y\ .$$

Dies entspricht aber genau der Komponentendarstellung der Resultierenden:

$$\vec{F}_R = F_{Rx}\cdot\vec{e}_x + F_{Ry}\cdot\vec{e}_y\,.$$

Damit lauten die beiden Komponenten der Resultierenden:

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x}, \quad F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} \, .$$

F_R, F_{Rx}, F_{Ry} bilden wiederum ein rechtwinkliges Dreieck. Folglich kann man den Betrag der Resultierenden und den Tangens ihres Neigungswinkels angeben:

$$|\vec{F}_R| = F_R = \sqrt{F_{Rx}{}^2 + F_{Ry}{}^2}, \; \tan \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \, .$$

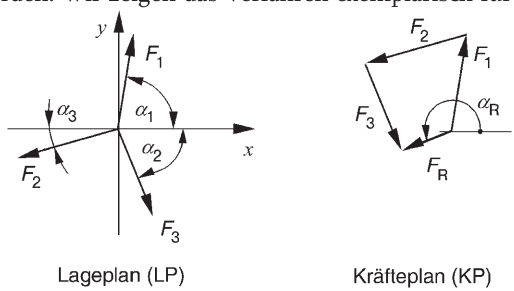
Nunmehr können wir eine *Verallgemeinerung für n Kräfte* durchführen:
Komponenten:

$$\left.\begin{array}{l} F_{Rx} = \sum\limits_{i=1}^{n} F_{ix} = \sum\limits_{i=1}^{n} F_i \cdot \cos \alpha_i , \quad F_{Ry} = \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iy} = \sum\limits_{i=1}^{n} F_i \cdot \sin \alpha_i \\ \textit{Betrag} \text{ und } \textit{Richtung} \text{ (Winkel } \alpha_R \text{ zwischen WL und Abszisse):} \\ F_R = \sqrt{F_{Rx}{}^2 + F_{Ry}{}^2} \, , \quad \tan \alpha_R = \dfrac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \, . \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

1.2.1.2 Grafisch (Krafteckverfahren)

Dem Verfahren liegt wiederum das Superpositionsprinzip zugrunde. Dazu werden die Kräfte unter Wahl eines geeigneten Kräftemaßstabes (Verhältnis der Krafteinheit zur Längeneinheit) in einem Lageplan (LP) in ihrer wahren Lage dargestellt. Nunmehr führt man im Kräfteplan (KP) grafisch die vektorielle Addition der einzelnen Kräfte durch. Dabei wählt man zunächst beliebig zwei Kräfte aus und ermittelt ihre Resultierende als Diagonale im dazugehörigen Kräfteparallelogramm. Diese addiert man mit einer weiteren Kraft zu einer neuen Resultierenden usw. Aus dem so entstehenden (und unübersichtlichen) Kräfteplan geht hervor, dass man die Resultierende aller Kräfte einfacher erhält, indem die Kräfte in beliebiger Reihenfolge unter Beachtung der Richtung aneinandergefügt werden. In diesem Krafteck entspricht der Vektor vom Anfangspunkt der ersten zum Endpunkt der letzten Kraft dem Vektor der Resultierenden. Betrag und Neigungswinkel können im KP abgelesen werden. Wir zeigen das Verfahren exemplarisch für drei Kräfte.

geg.: F_i, α_i
ges.: F_R, α_R
Lösung:



1.2.2
Gleichgewicht

Der Bewegungszustand ändert sich dann nicht, wenn der gemeinsame Schnittpunkt der Wirkungslinien aller angreifenden Kräfte nicht verschoben wird. Dies ist aber nur der Fall, wenn keine Resultierende auftritt. Somit kann man formulieren:

Ein ebenes, zentrales KS mit n Kräften befindet sich im Gleichgewicht, wenn

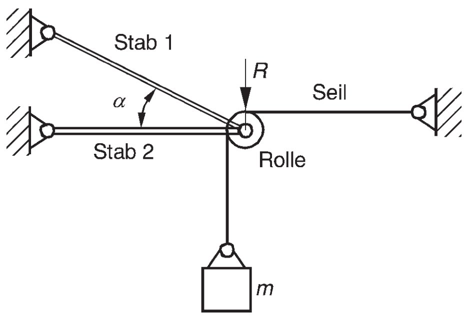
$$\vec{F}_R = \vec{0} \text{ bzw. in Komponenten: } \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \ . \tag{1.3}$$

Voraussetzung ist lediglich, dass gilt: $x \perp y$. Das heißt aber auch, man kann diese Kräftebilanzen in zwei beliebigen Richtungen aufstellen, die einen rechten Winkel miteinander bilden. Die Gln. (1.3) nennt man die analytischen *Gleichgewichtsbedingungen* (GGB).

Grafisch erhält man im Gleichgewichtsfall im KP ein *geschlossenes Krafteck*, da $F_R = 0$.

1.2.3
Demonstrationsbeispiel (Wandkran)

Ein Wandkran besteht aus zwei geraden, gelenkig gelagerten Stäben, die in einem Gelenk reibungsfrei miteinander verbunden sind. (Das geometrische Modell des Stabes wird im Abschnitt 1.5.1 erläutert). Ein durch eine Masse belastetes Seil wird über eine Umlenkrolle (feste Rolle) geführt. Der Rollenradius R ist vernachlässigbar klein.



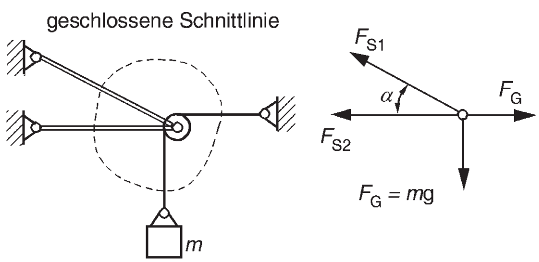
geg.: Masse m, Erdbeschleunigung g, α

ges.: Kräfte, die die Stäbe 1 und 2 übertragen müssen, d. h. die Stabkräfte (analytisch)

Lösung (typische Lösungsschritte einer Statikaufgabe):

Freischneiden (vgl. Abschnitt 1.1.4):

Die Schnittlinie trennt (gedanklich) die Stäbe 1 und 2 sowie an zwei Stellen das Seil. Dabei wird jeweils die durch das Seil zu übertragende Gewichtskraft F_G frei. Die Pfeilrichtungen der Stabkräfte (und auch anderer



noch unbekannter Kräfte) sind prinzipiell frei wählbar. Vielfach ist es üblich, sie vom Knoten wegweisend anzuzeichnen. Das heißt, man nimmt an, dass sie im Stab als Zugkräfte wirken. Ob dies tatsächlich so ist, erkennt man aus dem Vorzeichen der Lösung, s. u. Aus der oberen rechten Skizze ist sofort ersichtlich, dass durch das Freischneiden des Knotens ein ebenes, zentrales Kraftsystem entsteht.

GGB (Anwendung der Gln. (1.3)):

(Warum? Das Tragwerk wird unter der Voraussetzung betrieben, dass sich sein Bewegungszustand, d. h. die „Ruhe“, nicht ändert.)

$$\sum_{i=1}^{4} F_{ix} = 0 = -F_{S2} - F_{S1} \cdot \cos\alpha + F_G \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{4} F_{iy} = 0 = -F_G + F_{S1} \cdot \sin\alpha \qquad (2)$$

Lösung des (linearen, inhomogenen) Gleichungssystems:

Aus Gl. (2) folgt: $F_{S1} = \dfrac{F_G}{\sin\alpha}$, $\alpha \neq 0$. (Damit gilt: $F_{S1} \geq F_G$!)

Nach Einsetzen in Gl. (1) erhält man $F_{S2} = F_G \cdot (1 - \cot\alpha)$ mit dem Sonderfall:

$\alpha = 45°: F_{S2} = 0$!

Diskussion:

In beiden Stäben ergibt sich für $45° < \alpha \leq 90°$ eine positive Stabkraft, d. h., die tatsächliche Kraft wirkt in die angenommene Richtung. Derartige Stäbe werden als Zugstäbe (ansonsten Druckstäbe; Nullstäbe, wenn sich die Stabkraft zu null ergibt) bezeichnet. Bei zu spitzem Winkel erhöhen sich die Beanspruchungen der Stäbe stark, z. B. ergibt sich für $\alpha = 10°$ eine Stabkraft $F_{S1} = 5{,}76 \cdot F_G$!

1.2.4
Hinweise und Tipps

Nachfolgend einige Hinweise, die Ihnen u. U. die Lösung von Aufgaben erleichtern können.

Der im vorigen Beispiel dargestellte *Lösungsablauf*

- Freischneiden
- Formulierung der GGB
- Lösung des linearen Gleichungssystems
- Diskussion und Kontrolle der Lösung

ist typisch für sehr viele Aufgaben der TM, speziell der Statik.

Benutzen Sie zur Komponentenzerlegung von Kräften möglichst spitze Winkel.

Man kann die Richtungen, in denen die Kräftegleichgewichtsbedingungen formuliert werden, frei wählen. Jedoch sollte man solche bevorzugen, für die die Komponentenzerlegung der Kräfte insgesamt am wenigsten aufwendig wird.

Die Lösung des linearen Gleichungssystems (der GGB) fällt formal in die Sparte Mathematik. Aber ohne diesen fehlerlos ausgeführten Schritt der Aufgabenlösung bleibt der Ingenieur stets unwirksam.

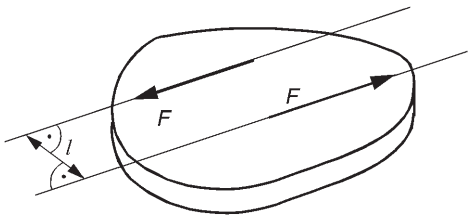
Tragende Konstruktionen bzw. Teile davon können in erster Näherung auch dann als zentrale Kraftsysteme modelliert werden, wenn es ein eng abgegrenztes Gebiet der Schnittpunkte der Wirkungslinien gibt. Das ist z. B. bei Knotenblechen in Fachwerken üblich, vgl. Abschnitt 1.8.

1.3 Ebenes, allgemeines Kraftsystem

Nunmehr wollen wir die Voraussetzung des zentralen Kraftsystems – die Wirkungslinien aller zum System gehörenden Kräfte haben einen gemeinsamen Schnittpunkt – fallenlassen. Die daraus resultierenden Phänomene werden zunächst am Sonderfall des sog. Kräftepaares beschrieben.

1.3.1 Kräftepaar und Moment

1.3.1.1 Kräftepaar



Ein Kräftepaar wird gebildet durch zwei gleichgroße, entgegengesetzt gerichtete, auf parallelen Wirkungslinien angreifende Kräfte, vgl. nebenstehendes Bild. Damit liegt ein allgemeines Kraftsystem vor. Wir wollen nun untersuchen, inwieweit sich beim Einwirken eines solchen Kräftepaares auf einen starren Körper der Bewegungszustand ändert bzw. inwieweit Gleichgewicht herrscht.

Aus der Anschauung ist klar, dass, obwohl das Kräftegleichgewicht erfüllt ist, insgesamt kein Gleichgewicht. herrscht. Der Körper erfährt keine Verschiebung, aber wohl eine ebene *Drehung* (hier mathematisch positiv). Er befindet sich demzufolge *nicht im Gleichgewicht*.

Wie Ihnen bereits bekannt ist, nennt man die physikalische Ursache der Verdrehung/Drehung (bzw. das Maß dafür) *Moment* oder auch *Drehmoment*. Es besitzt den Betrag:

$$M := l \cdot \mathrm{F} \tag{1.4}$$

In kohärenten Einheiten hat das Moment demzufolge die Maßeinheit Newtonmeter (Nm).

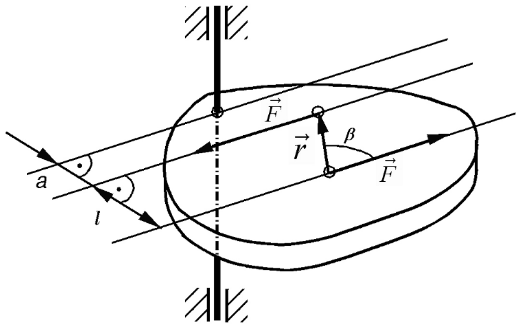
Der Ausdruck Gl. (1.4) entspricht einer Gleichungsseite des Ihnen bekannten Hebelgesetzes. Werden die Kräfte des Kräftepaares jeweils entgegengesetzt gerichtet angetragen, kehrt sich offensichtlich die Drehrichtung um. Demnach besitzt die physikalische Größe Moment sowohl Betrag als auch Richtung und ist folglich ein Vektor.

Wir wollen diesen *Momentenvektor* $\vec{M}$ etwas eingehender untersuchen. Dazu führt man den im Bild gezeigten *Ortsvektor* $\vec{r}$ ein. Er beschreibt die Lage der Kraftangriffspunkte zueinander. Da die beiden Kräfte des Kräftepaares linienflüchtige Vektoren sind, ist offensichtlich die Komponente des Ortsvektors in Richtung der Wirkungslinien für die weitere Betrachtung ohne Bedeutung.

Unter Benutzung von Gl. (1.4) kann aus nebenstehender Skizze folgendes abgelesen werden:

$$M = |\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot \sin\beta \cdot |\vec{F}|.$$

Dies entspricht aber dem Betrag des Vektorproduktes: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.



Damit steht der Momentenvektor senkrecht auf der Ebene, die vom Kräftepaar aufgespannt wird. Ein Vertauschen der Faktoren im Vektorprodukt führt bekanntlich auf eine Richtungsumkehr von $\vec{M}$.

Schließlich bleibt festzustellen, dass die absolute Lage der Wirkungslinien des Kräftepaares in der Ebene auf das Moment keinen Einfluss nimmt. Im Vektorprodukt ist keine Koordinate zur Beschreibung der absoluten Lage der Wirkungslinien, Abstand a zwischen der Bezugsachse und der zur gedachten Drehachse nächsten Wirkungslinie, enthalten.

Kräftepaare bzw. Momente können beliebig in der Ebene verschoben werden, ohne dass sich die statische Wirkung ändert. Das Moment ist damit ein sog. freier Vektor.

Das Moment ist neben der Kraft die zweite wichtige Kenngröße der mechanischen Wirkung. Sie ist mittels des Kräftepaares darstellbar und existiert auch dann, wenn die vektorielle Kräftesumme verschwindet ($\vec{F}_R = \vec{0}$).

Nunmehr untersuchen wir die Momentenwirkung von Einzelkräften bezüglich einer (Dreh-)Achse.

1.3.1.2 Moment einer Kraft in Bezug auf eine Achse

Die Überschrift steht mit der Momentendefinition nur scheinbar im Widerspruch. Wenn man gedanklich eine (raumfeste) Drehachse senkrecht zur Ebene des starren Körpers errichtet, s. u., dann stehen die angreifende Einzelkraft und die Reaktionskraft an der Achse im Kräftegleichgewicht. Diese Reaktionskraft ent-