Pensamiento Matemático

MARIO PÉREZ RUIZ
ADELINA OCAÑA GÓMEZ

UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ
JORGE TADEO LOZANO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

Pensamiento Matemático

MARIO PÉREZ RUIZ
ADELINA OCAÑA GÓMEZ

UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ
JORGE TADEO LOZANO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES E INGENIERÍA • DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

Pérez Ruiz, Mario Ernesto
Pensamiento matemático / Mario Pérez Ruiz, Adelina Ocaña Gómez – Bogotá: Universidad de Bogotá Jorge Tadeo
Lozano. Facultad de Ciencias Naturales e Ingeniería. Departamento de Ciencias Básicas, 2013.
424 p.; 22 cm.

ISBN: 978-958-725-113-5

1. MATEMÁTICAS. 2. FUNCIONES. 3. LOGARITMOS I. Ocaña Gómez, Adelina. II. tit.

CDD510"P438"

Fundación Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano
Carrera 4 Nº 22-61 – PBX: 242 7030 – www.utadeo.edu.co

PENSAMIENTO MATEMÁTICO
Mario Ernesto Pérez Ruiz
Adelina Ocaña Gómez

ISBN: 978-958-725-113-5

Rectora: Cecilia María Vélez White

Vicerrector Académico: Diógenes Campos Romero

Decano de la Facultad de Ciencias Naturales e Ingeniería: Daniel Bogoya Maldonado

Director del Departamento de Ciencias Básicas: Favio Ernesto Cala Vitery

Director Editorial (e): Jaime Melo Castiblanco

Coordinación editorial y revisión de estilo: Henry Colmenares Melgarejo

Concepto gráfico, diseño, diagramación y portada: Luis Carlos Celis Calderón

Figuras y tablas: Adelina Ocaña Gómez

Edición de fórmulas: Francisco Jiménez Montero

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la colaboración recibida por los profesores del Área de Matemáticas de la Universidad Jorge Tadeo Lozano, tanto de tiempo completo como de cátedra, quienes al implementar la propuesta del presente texto durante los años 2011 y 2012, dieron apoyo y retroalimentación significativos.

PRESENTACIÓN

Pensamiento Matemático es un texto de matemáticas que cubre temas usualmente incluidos en libros del área de precálculo, con la intención de consolidar el lenguaje matemático básico que requieren la mayoría de las profesiones y de servir como preparación para el cálculo.

El título *Pensamiento Matemático* responde a la aceptación generalizada de que “el centro de atención de la educación matemática es el desarrollo del pensamiento matemático, entendiendo *pensamiento* como la unidad de procesos y contenidos”.[1] Dentro de estos procesos generales de pensamiento (razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, comunicación, modelación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos), se ha puesto de relieve el proceso de *modelación*, articulado con el concepto de *función* (concepto unificador del curso).

El libro se divide en cuatro unidades, con sus respectivas secciones. En la primera unidad se incluyen aspectos generales de las funciones, la Función Lineal, Funciones a Trozos, Transformaciones, Operaciones y Composición de funciones. En la segunda unidad se presenta el estudio de las Funciones Cuadráticas, Polinomiales y Racionales. En la tercera unidad se encuentran las Funciones Exponenciales y Logarítmicas, y finalmente en la cuarta unidad se desarrollan los contenidos relacionados con las Funciones Trigonométricas. En algunas secciones se introducen los contenidos con una *actividad inicial*, que busca motivar el estudio de los conceptos incluidos en la unidad; posteriormente se realiza una descripción de los conceptos, apoyados con ejemplos, gráficas, actividades a desarrollar y ejercicios y problemas que afiancen los contenidos tratados.

---

1. Serie *Cuadernos de Currículo*. *Orientaciones curriculares para el campo de Pensamiento Matemático*, Alcaldía Mayor de Bogotá, Secretaría de Educación, 2007.

El texto busca, de igual manera, facilitar la transición a textos de matemáticas que emplean un lenguaje más formal. Al leer detenidamente cada uno de los párrafos, generalmente breves, y escribir en los espacios en blanco el desarrollo de las actividades correspondientes, se espera conseguir poco a poco dicho objetivo. La importancia de una clara comprensión de los conceptos sin descuidar las destrezas operativas, las cuales van de la mano, son aspectos a tener en cuenta durante todo el desarrollo del curso.

El uso de la *tecnología* para agilizar el cálculo y la representación gráfica de diferentes expresiones, con el fin de dar paso a las interpretaciones a que den lugar los problemas y las ecuaciones, es un punto al que se quiere dar énfasis a lo largo del libro.

De esta manera el presente texto pretende apoyar el desarrollo de procesos relacionados con la lectura y la escritura, al igual que mejorar en la interpretación y argumentación al enfrentar situaciones problema que se presenten.

CONTENIDO

Unidad 1

Unidad 2

Unidad 3

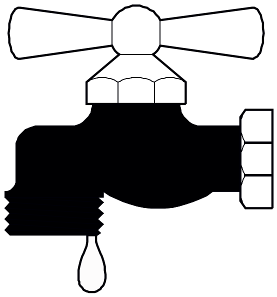
Unidad 4

UNIDAD 1

1.1 GENERALIDADES DE LA FUNCIÓN

ACTIVIDAD INICIAL

ESCAPE DE AGUA



El goteo permanente de una llave, un escape en la cisterna de un baño, generan pérdida de agua.

✎ Describa un procedimiento para estimar la cantidad de agua que se pierde debido a una llave que gotea.

✎ ¿Cómo calcularía el correspondiente costo en dinero?

Se recoge el agua que gotea de una llave en un recipiente con una capacidad de trece litros el cual contiene inicialmente tres litros de agua; se observa que cada hora se recogen dos litros de agua.

✎ Añada una pregunta a la situación anterior que la convierta en un problema.

✎ Complete los valores de volumen de agua en el recipiente correspondientes a los valores de tiempo indicados en la tabla 1:

Tiempo (t) (horas)	Volumen (v) (litros)
0	
1	
2	
3.5	
	13

Tabla 1

✎ ¿Qué interpretación le da al último renglón de la tabla?

Situación 1

Cecilia, María, Carlos y Edgar son jóvenes que ingresan a trabajar a una empresa. Alguna información relacionada con ellos se encuentra en las figuras 1, 2 y 3 por medio de las *correspondencias* f, g y h, donde:

f indica las edades, en años.
g indica quién le envía correo a quién después de la reunión.
h indica las actividades que realizan.

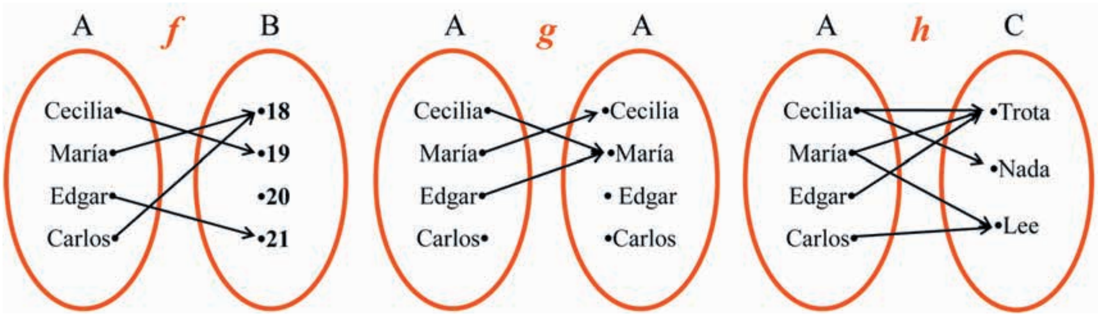


Figura 1 Figura 2 Figura 3

De los ***diagramas de flechas*** de las figuras 1, 2 y 3 observamos que Cecilia, por ejemplo, tiene 19 años, le envió un correo a María, le gusta ir a nadar y trotar. En el lenguaje de las correspondencias decimos que en la correspondencia *f*, a Cecilia le corresponde el 19 (o que la ***imagen*** de Cecilia por la correspondencia *f* es 19); en *g*, a Cecilia le corresponde María y en *h*, a Cecilia le corresponde nadar y trotar.

Las correspondencias que estudiaremos en este curso son del tipo que se define a continuación.

Una correspondencia *f* de un conjunto A en un conjunto B que asigna a cada elemento de A un único elemento de B, es una ***función.***

De las correspondencias entre los conjuntos de las figuras 1, 2 y 3 tenemos que:

f es función de A en B pues a cada elemento de A le corresponde un solo elemento de B.

g no es función de A en A porque a Carlos no le corresponde algún elemento en A.

h no es función de A en C pues a Cecilia le corresponde más de un elemento en C.

¿Cuáles de las correspondencias señaladas en las figuras 4, 5, 6 y 7 son funciones de D en E?

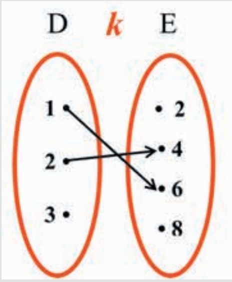


Figura 4

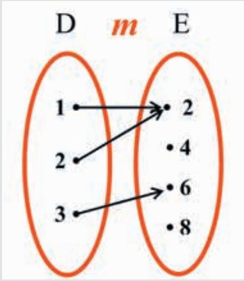


Figura 5

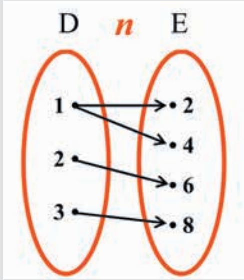


Figura 6

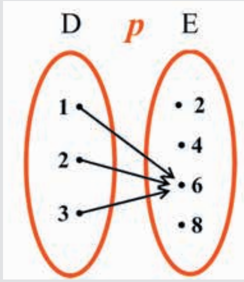


Figura 7

Cuando una correspondencia es función, como en el caso de *f*, figura 1, se usa también una representación llamada ***notación funcional***. Por ejemplo, para representar con notación funcional que a Cecilia le corresponde el número 19, lo hacemos así:

$$f(\text{Cecilia}) = 19$$

Leemos lo anterior:

f de Cecilia *es igual a* 19

Observemos también con respecto a *f* que de todos los elementos de A salen flechas (como era de esperarse pues por ser *f* una función, a cada elemento de A le tiene que corresponder algún elemento de B) y que no llegan flechas a todos los elementos de B (o que no todos los elementos de B son imagen de algún elemento de A). A continuación se hace distinción de los conjuntos formados por los elementos mencionados:

Sea f una función de A en B. El conjunto A es el ***dominio*** de f, *el conjunto* B es el ***codominio*** de f y el subconjunto de B formado por los elementos que son imágenes es el ***rango*** de f.
Las abreviaturas dom f, codom f y ran f serán usadas para esos conjuntos, respectivamente.

Ejemplo 1

Para la función f de la figura 1 determine dominio, codominio y rango.

Solución

dom $f = A$ = {Cecilia, María, Carlos, Edgar}
codom $f = B = \{18, 19, 20, 21\}$
ran $f = \{18, 19, 21\}$

✎ Una función m entre los conjuntos $D = \{1, 2, 3\}$ y $E = \{2, 4, 6, 8\}$ está definida así: $m(1) = 4$, $m(2) = 6$, $m(3) = 4$. Haga el diagrama de flechas de m y determine su dominio y rango.

Consideremos la función *r* de la figura 8:

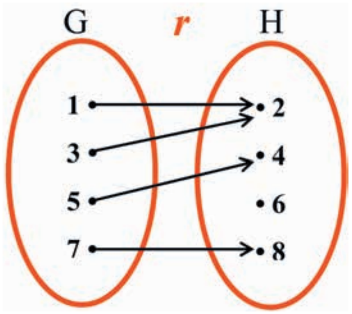


Figura 8

Para esta función tenemos que $r(1) = 2$. La notación funcional la entendemos mejor si comparamos la función con una *máquina* (figura 9): al introducir el 1 (*input* o *entrada*) en la máquina, esta lo procesa y lo convierte en 2 (*output* o *salida*).

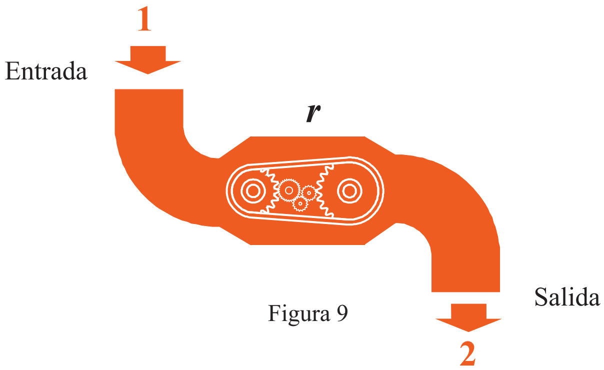


Figura 9

En $r(1) = 2$, imaginemos que r es el nombre de la máquina, el paréntesis es el cuerpo de la máquina en la cual *entra* el número 1, y el 2 que está después del igual es el número que *sale* de la máquina.

En esta comparación de una función con una máquina, los elementos del dominio de la función son los objetos que se permiten entrar en la máquina, aquellos para los cuáles estas se construyen, y los elementos del rango son los objetos que produce la máquina.

1.1.1 FORMAS DE REPRESENTAR O DESCRIBIR UNA FUNCIÓN

Como las funciones que encontraremos a lo largo del curso involucran conjuntos infinitos, la manera de definirlas por medio de diagramas de flechas ya no es apropiada. Habrá entonces que utilizar una regla (usualmente una expresión algebraica) que indique cómo establecer la correspondencia entre los conjuntos.

Retomemos la situación inicial para ilustrar lo mencionado anteriormente y otros aspectos generales relacionados con las funciones. El tiempo que va transcurriendo desde que se abre la llave es un ejemplo de una cantidad *variable*:

Una ***variable*** es una letra que representa cualquier elemento de un conjunto.

Utilizaremos la letra t para la variable tiempo. Como el tiempo de llenado del recipiente es de 5 horas, t toma valores en el conjunto de los números comprendidos entre 0 y 5, incluidos el 0 y el 5, el cual es un conjunto infinito; este conjunto es el *intervalo cerrado* de extremos 0 y 5: $[0, 5]$.

El volumen v de agua que va quedando en el recipiente también es una variable.

✎ ¿En qué conjunto toma valores la variable v?

Como inicialmente había 3 litros de agua en el recipiente y ya que cada hora ingresan 2 litros constantemente, las variables t y v las podemos relacionar con la ecuación:

$$v = 2t + 3$$

En esta ecuación, a cada valor del tiempo le corresponde un único valor del volumen; por tanto, consideramos a la variable v como una función de la variable t.

A la variable t se le llama la ***variable independiente*** pues se le puede asignar cualquier valor del dominio (el intervalo [0, 5]). La variable v se llama la ***variable dependiente***; el valor que toma depende de t ya que el volumen en el recipiente depende del tiempo transcurrido.

El nombre que usualmente damos a la función es el mismo que el de la variable dependiente. Así, llamamos v a esta función. Con notación funcional escribimos:

$$v(t) = 2t + 3, \qquad t \in [0, 5]$$

Los valores que toma v para valores particulares de t, se llaman ***valores funcionales;*** por ejemplo:

para $t = 1$, $v(1) = 2(1) + 3 = 5$

para $t = 2$, $v(2) = 2(2) + 3 = 7$

✎ Determine los siguientes valores funcionales: $v(1.5)$; $v(3.8)$

Los puntos del plano cartesiano correspondientes a los pares ordenados $(t, v(t))$ constituyen la ***gráfica*** de la función. Veremos más adelante (sección 1.3) que funciones como v tienen gráficas como la de la figura 10.

Tiempo (*t*) (horas)	Volumen (*v*) (litros)
0	3
1	5
2	7
3.5	10
5	13

Tabla 1

Gráfica de la función *v*

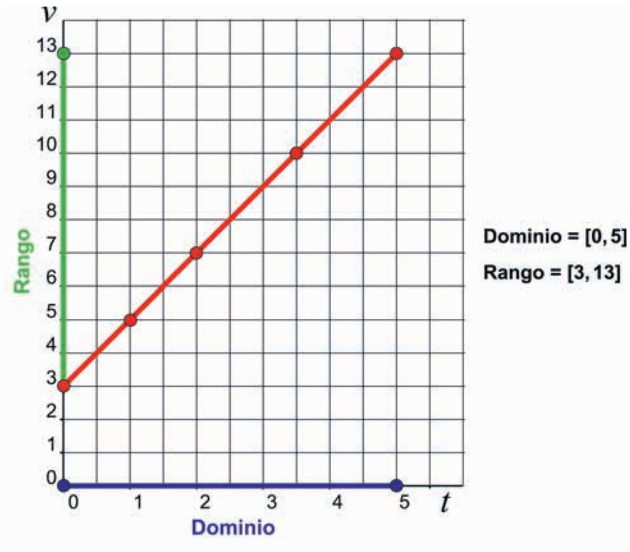


Figura 10

Otra manera de representar o describir una función es por medio de palabras o *verbalmente*. Por ejemplo, la función $v(t) = 2t + 3$ se representa verbalmente diciendo que "multiplica por 2 y luego suma tres".

Observe cómo interviene el orden en que se realizan las operaciones en las descripciones verbales de las siguientes funciones:

Representación algebraica	*Representación verbal*
$f(x) = x^2$	Eleva al cuadrado
$f(x) = x + 5$	Suma cinco
$f(x) = \dfrac{x+5}{2}$	Suma cinco y luego divide por dos
$f(x) = \dfrac{x}{2} + 5$	Divide por dos y luego suma cinco

Hemos visto que una función puede representarse o describirse de varias maneras:

- con flechas (figura 1) ⟶ *representación sagital*
- por medio de una tabla (tabla 1) ⟶ *representación tabular*
- en el plano cartesiano (figura 10) ⟶ *representación gráfica*
- por medio de una ecuación ($v(t) = 2t + 3$) ⟶ *representación algebraica*
- con palabras ("multiplica por 2 y suma 3") ⟶ *representación verbal*

Los ejemplos 2, 3 y 4 ilustran los aspectos generales de las funciones presentados hasta el momento:

Ejemplo 2

Un artículo cuesta \$500; tomemos el costo C de varios de esos mismos artículos como una función de la cantidad n de ellos. Por ejemplo: $C(1) = 500$, $C(4) = 2\,000$.

i. Defina algebraicamente la función C

ii. ¿Cuál es el dominio y el rango de C?

Solución

i. $C(n) = 500n$

ii. El dominio es el conjunto de los enteros no negativos: $\{0, 1, 2, 3,...\}$ y el rango es el conjunto de los múltiplos no negativos de 500: $\{0, 500, 1\,000, 1\,500,...\}$.

✎ Haga la gráfica de la función C.

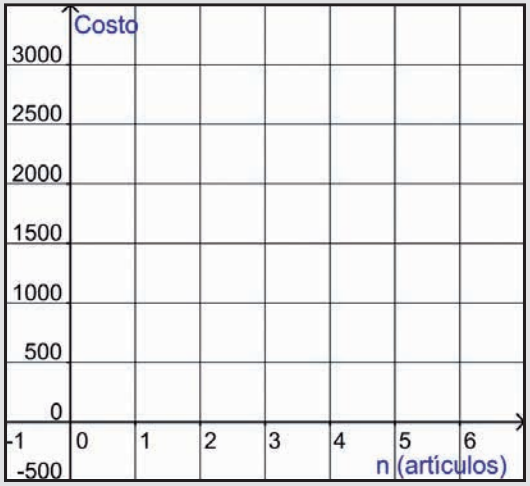


Figura 11

Ejemplo 3

La función $f(x) = x^2$, o también $y = x^2$, es la función que "*eleva al cuadrado*". En la figura 12 vemos la gráfica de esta función:

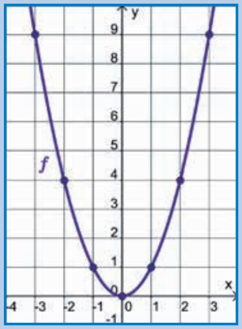


Figura 12

i. ¿Cuál es el dominio y rango de f?

ii. Halle los siguientes valores funcionales $f(-7)$, $f(4.2)$, $f(-x)$, $f(x-3)$, $f(a+h)$.

Solución

i. El dominio es el conjunto de los números reales, es decir, el intervalo $(-\infty, \infty)$; el rango es el conjunto de los números reales no negativos: el intervalo $[0, \infty)$.

ii. Valores funcionales :

$$f(-7) = (-7)^2 = 49$$
$$f(4.2) = (4.2)^2 = 17.64$$
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$
$$f(x-3) = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$
$$f(a+h) = (a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$$

✎ Si f es la función $f(x) = x^2$, encuentre: $f(2x)$; $f(x+4)$; $f(x-h)$

Ejemplo 4

En la figura 13 tenemos la gráfica de una función g.

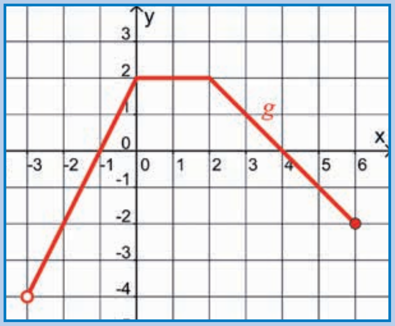


Figura 13

Con respecto a esta función, halle:

i. $g(-2)$.
ii. dominio y rango.
iii. $g(-3)$.
iv. puntos de corte de la gráfica con los ejes o "***interceptos con los ejes***".
v. los valores de x que satisfacen la ecuación $g(x) = -2$.

Solución

i. $g(-2) = -2$

ii. El dominio de g es el intervalo (–3, 6]; el rango de g es el intervalo (–4, 2].

iii. $g(-3)$ no está definido ya que –3 no está en el dominio de g.

iv. Corte con el eje y o ***y–intercepto*** es el punto (0, 2).

Cortes con el eje x o ***x–interceptos*** (llamados también *ceros* de la función) son los puntos (–1, 0), (4, 0).

v. Los valores de x para los cuales se verifica que $g(x) = -2$, son $x = -2$ y $x = 6$, es decir, aquellos puntos de la gráfica de g en los que la segunda coordenada es –2; dichos puntos son (–2, –2) y (6, –2). Estos puntos se obtienen en las intersecciones de la recta horizontal que pasa por –2, en el eje y, con la gráfica de la función (figura 14):

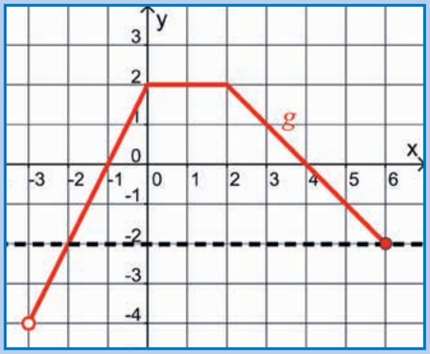


Figura 14

✎ Para la función g de la figura 14, estime:

- $g(1)$; $g(2.5)$
- los valores de x para los cuales $g(x) = 1$

1.1.2 GRÁFICAS EN EL PLANO CARTESIANO QUE SON GRÁFICAS DE FUNCIONES

Examinaremos ahora qué gráficas del plano cartesiano pueden ser la gráfica de una función.
Observemos las gráficas de las figuras 15 y 16:

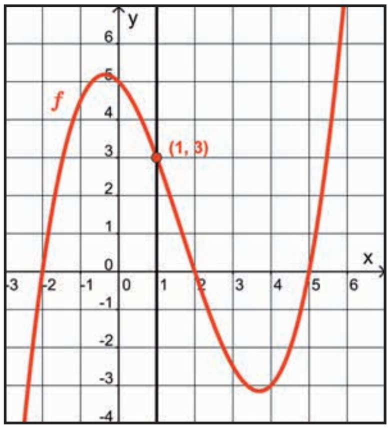


Figura 15

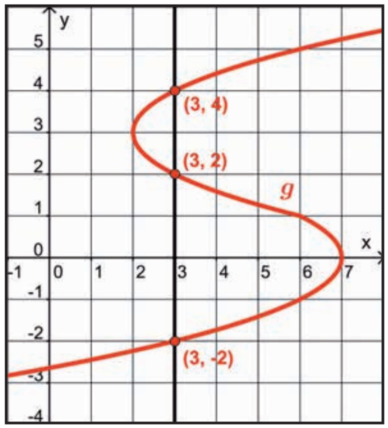


Figura 16

En la figura 15 se observa que a cada uno de los valores del dominio le corresponde un único valor del rango; por ejemplo a $x = 1$, le corresponde solamente $y = 3$. Notemos que la recta vertical que pasa por (1, 3), no intercepta a ningún otro punto de la gráfica; la gráfica de la figura 15 sí es la gráfica de una función (en este momento no nos preocupamos por su representación algebraica).

En la figura 16, los puntos (3, 4), (3, 2), (3, –2) indican que al número 3 le corresponden tres valores: –2, 2 y 4. Esta correspondencia no puede ser entonces una función. Observemos que la recta vertical de la figura 16 intercepta a la gráfica en más de un punto.

Las anteriores consideraciones ilustran la

Prueba de la recta vertical
Si alguna recta vertical en el plano xy intercepta a la gráfica en más de un punto, entonces la gráfica no define a y como una función de x.

Ejemplo

¿Cuáles de las siguientes gráficas definen a y como una función de x?

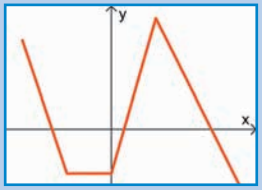


Figura 17

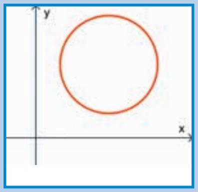


Figura 18

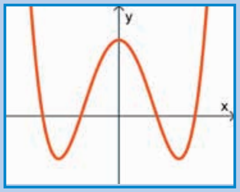


Figura 19

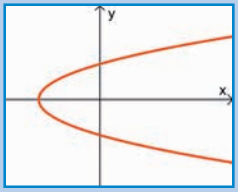


Figura 20

Solución

La prueba de la recta vertical indica que las gráficas de las figuras 17 y 19 definen a y como una función de x ya que ninguna recta vertical intercepta a la gráfica en más de un punto (figuras 21 y 23). Las gráficas de las figuras 18 y 20 no corresponden a gráficas de funciones: hay rectas verticales que interceptan a la curva en más de un punto (figuras 22 y 24).

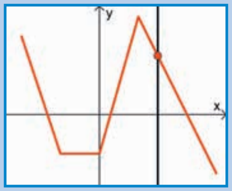


Figura 21

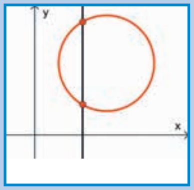


Figura 22

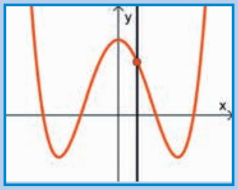


Figura 23

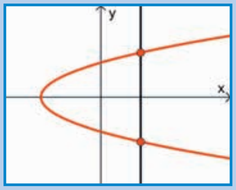


Figura 24