



Hartwig Hübel

Vereinfachte Fließzonentheorie

Auf Grundlage der Zarka-Methode

 Springer Vieweg

Vereinfachte Fließzonentheorie

Hartwig Hübel

Vereinfachte Fließzonentheorie

Auf Grundlage der Zarka-Methode

 Springer Vieweg

Hartwig Hübel
Fakultät für Bauen
Brandenburgische Technische Universität Cottbus-Senftenberg
Cottbus, Deutschland

ISBN 978-3-658-07921-5
DOI 10.1007/978-3-658-07922-2

ISBN 978-3-658-07922-2 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2015

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Lektorat: Thomas Zipsner, Ellen Klabunde

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort

Die vorliegende Dokumentation beschreibt die Vereinfachte Fließzonentheorie (VFZT), die in meiner Zeit als Professor an der Fachhochschule Lausitz (später Hochschule Lausitz (FH)) ab 1996 entwickelt wurde. Sie beruht auf den durch Prof. Zarka et al. an der École Polytechnique in Palaiseau bei Paris gelegten Grundlagen zu vereinfachten elastisch-plastischen Berechnungsmethoden, die häufig einfach als Zarka-Methode bezeichnet werden. Ihr Ziel ist die vereinfachte Ermittlung des plastischen Verhaltens von Tragwerken, deren Berechnung sonst sehr aufwendig wäre.

Inspiziert wurde die Entwicklung der VFZT dadurch, dass ich in meiner beruflichen Praxis bei Interatom/KWU/Siemens mit einem Dilemma konfrontiert wurde: Einerseits bestand die Notwendigkeit, eine ausreichende Lebensdauer von Strukturen unter wechselnder plastischer Beanspruchung nachweisen zu können. Andererseits aber war der für eine herkömmliche Anwendung der Fließzonentheorie erforderliche Berechnungsaufwand so enorm hoch, dass eine flächendeckende Nachweisführung der Lebensdauer aller thermozyklisch belasteter Bauteile eines Kernkraftwerks mit der Fließzonentheorie illusorisch war.

Die aus diesem Grund notwendigen und in den 1980er Jahren zur Verfügung stehenden vereinfachten Berechnungsverfahren zur Abschätzung elastisch-plastischer Verzerrungen hatten jedoch kein oder allenfalls ein sehr schwaches theoretisches Fundament oder waren allenfalls für spezielle Konfigurationen von Bauteilgeometrie und Belastungsart anwendbar. So entstand der Wunsch nach besser fundierten vereinfachten elastisch-plastischen Berechnungsmethoden.

Deren Notwendigkeit hat sich in den letzten Jahrzehnten trotz massiv verbesserter Hard- und Software keineswegs abgeschwächt. Vielmehr bleibt eine Verkürzung der Berechnungszeit in Anbetracht der immer umfangreicher werdenden Finite-Element-Modelle, der Weiterentwicklung der Regelwerke, welche eine immer bessere Erfassung der unvermeidlich nichtlinearen Grenzzustände der Trag- und Gebrauchsfähigkeit eines Tragwerks erfordern, sowie der betriebsbegleitenden Berechnung der Restlebensdauer auf Grundlage von Online-Monitoring-Systemen erstrebenswert.

Dass „vereinfachte Berechnungsmethoden“ überhaupt „vereinfacht“ genannt werden, kann in gewisser Weise als euphemistisch betrachtet werden. In Wahrheit sind sie nämlich schwieriger zu verstehen als die „exakten“ Methoden, da sie erst aus diesen durch

zusätzliche Annahmen, die wiederum entsprechender Rechtfertigung bedürfen, abgeleitet werden. Die Vereinfachung bezieht sich also nicht etwa darauf, dass komplizierte theoretische Sachverhalte umgangen werden könnten, sondern darauf, dass der erforderliche Berechnungsumfang reduziert werden kann.

Mit dem vorliegenden Buch wird versucht, die VFZT so darzustellen, dass ein Master-Student etwa im Bauingenieurwesen oder Maschinenbau ein Verständnis für sie entwickeln kann. Es wird dabei auf Erfahrungen zurück gegriffen, die ich bei meinen Vorlesungen über Fließzonentheorie im ehemaligen Diplom-Studiengang Bauingenieurwesen und im Master-Studiengang Computational Mechanics der Hochschule Lausitz (FH) gewinnen konnte. Andere Leser werden Teile des Buches überspringen können, vor allem diejenigen Abschnitte in den Kap. 1 und 2, die sich mit Grundlagen für elastisch-plastische Werkstoffmodelle und dem Phänomen Ratcheting beschäftigen. Andererseits wird der kundige Leser gerade in Kap. 2 bei der Behandlung des Phänomens Ratcheting, hier noch unabhängig von der VFZT, Spielräume zur Verbesserung verschiedener Regelwerke des Anlagen-, Reaktor-, Dampfkesselbaus usw. bis hin zum Eurocode 3 erkennen.

Für den einen oder anderen Leser mag die in diesem Buch gewählte Schreibweise mechanischer Größen mitunter ungewohnt sein. So wird an Stelle der sonst meist verwendeten Tensorschreibweise, bei der beispielsweise die Spannungen als Tensor zweiter Stufe geschrieben werden (also mit Doppelindex), und der Elastizitätstensor als Tensor vierter Stufe (vier Indizes), in diesem Buch die Spannung als Vektor (ein Index) geschrieben, was es gestattet, die Elastizitätsmatrix mit zwei Indizes zu schreiben. Diese Schreibweise wird gerade von Einsteigern in die Thematik dieses Buches als anschaulicher empfunden. Allerdings stehen dann einige elegante Schreibweisen, etwa für die Invarianten eines Tensors, nicht mehr zur Verfügung. Mancher Leser mag bei einigen Zahlenbeispielen außerdem die Angabe von Einheiten vermissen. Die zugehörigen Einheiten sind dann in irgendeinem beliebigen konsistenten Einheitensystem zu verstehen.

Die Grundlagen der VFZT werden zunächst für monotone Belastung in Kap. 3 dargelegt. Hier und nach jedem der darauf folgenden Erweiterungsschritte der VFZT (zyklische Belastung, temperaturabhängige Materialdaten, multilineare Verfestigung, Traglastberechnung) werden Beispiele ausführlich präsentiert.

Manche Entwicklungsschritte der VFZT sind durch Studierende bei ihren Studien- oder Abschlussarbeiten oder ihrer Tätigkeit als wissenschaftliche Hilfskräfte erzielt worden. Ich war mir immer bewusst, dass sie hierzu eine gehörige Portion Mut aufbringen mussten, weil sie zunächst nicht wissen konnten, worauf sie sich da einließen. Am Ende war auch für mich der Erfolg dieser Arbeiten stets eine Freude. Mein Dank geht (in chronologischer Reihenfolge) an die Dipl.-Ing. (FH) Maik Glede, Holger Huhn, Jens Olbrich, Joachim Fella, Thomas Hoffmann, René Laqua, Maren Stange, M.Eng. Andy Kalisch, Marcus Reimann, Andreas Droigk, Dr.-Ing. Matthias Firl, Andreas Winkler, Olaf Beesdo und M.Sc. Bastian Vollrath. Besonderer Dank gebührt Herrn Dipl.-Ing. (FH) Andreas Kretzschmar, der als wissenschaftlicher Mitarbeiter 16 Monate lang mit starkem Einsatz die VFZT voran gebracht hat.

Nachdem die Arbeiten an der VFZT zwischen 2004 und 2007 ruhen mussten, erfuhr sie ab 2008 durch das Interesse der AREVA NP GmbH neuen Auftrieb. Über den in diesem Buch beschriebenen Entwicklungsstand hinaus erscheinen zahlreiche Erweiterungen möglich, so dass die VFZT noch lange nicht als abgeschlossen betrachtet werden kann.

Schließlich möchte ich mich noch beim Lektorat Maschinenbau des Springer-Verlages und insbesondere bei Herrn Thomas Zipsner für die konstruktive Kritik während der Erstellung dieses Buches bedanken.

Cottbus, im April 2015

Hartwig Hübel

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung in plastisches Werkstoff- und Strukturverhalten	1
1.1	Plastische Reserve	1
1.2	Grundbegriffe plastischen Werkstoffverhaltens	3
1.2.1	Elastisches Verhalten	3
1.2.2	Deviatorischer Spannungszustand	4
1.2.3	Fließfläche	5
1.2.4	Fließgesetz	8
1.2.5	Verfestigungsgesetz	9
1.2.6	Prager-Ziegler Verfestigung	11
1.2.7	Besseling-Modell	13
1.2.8	Chaboche-Modell	14
	Literatur	16
2	Strukturverhalten bei veränderlicher Belastung	19
2.1	Örtliche und direktionale Spannungumlagerung	19
2.2	Struktur-Ratcheting anhand des Zweistab-Modells	21
2.3	Einfluss kinematischer Verfestigung	24
2.4	Ratcheting-Interaktions-Diagramm	26
2.5	Beispiele für Ratcheting	28
2.5.1	Dreistab-Modell	28
2.5.2	Mehrachsiges Ratcheting	29
2.5.3	Bree-Rohr	35
2.5.4	Durchlaufträger	39
2.5.5	Querschnitts-Interaktion	43
2.6	Mythen zu Ratcheting	45
2.7	Restspannungen	46
2.8	Lebensdauer	48
2.8.1	Ermüdung	48
2.8.2	Dehnungsakkumulation	49

2.9	Berechnungsmethoden	51
2.9.1	Fiktiv elastische Berechnung und Korrekturfaktoren	52
2.9.2	Inkrementelle elastisch-plastische Analyse	53
2.9.3	Twice-Yield Methode	55
2.9.4	Direkte Methoden	56
	Literatur	58
3	VFZT bei monotoner Belastung	61
3.1	Transformierte interne Variable	61
3.1.1	Grundlegende Annahmen für das Werkstoffgesetz	61
3.1.2	Umformulierung des Werkstoffgesetzes	62
3.1.3	Modifizierte elastische Analyse	67
3.1.4	Einachsiger Spannungszustand	69
3.1.5	Ebener Spannungszustand	70
3.2	Fließzone	72
3.3	Transformierte interne Variable bei radialer Belastung	73
3.4	Beispiele für radiale Belastung	74
3.4.1	Zugstab mit Querschnittssprung	74
3.4.2	Biegeträger mit Sandwich-Querschnitt	77
3.5	Transformierte interne Variable bei nichtradialer Belastung	81
3.6	Beispiele für nichtradiale Belastung	83
3.6.1	Direktionale Spannungumlagerung aufgrund elastischer Inkompressibilität	83
3.6.2	Direktionale Spannungumlagerung trotz elastischer Inkompressibilität	87
3.6.3	Lochscheibe	90
3.6.4	Dickwandiger Zylinder unter Innendruck	93
	Literatur	97
4	VFZT bei zyklischer Belastung	99
4.1	Natur des Einspielzustandes	99
4.2	Dehnschwingbreite bei plastischem Einspielen	101
4.3	Beispiele für Dehnschwingbreite bei plastischem Einspielen	103
4.3.1	Zweistab-Modell	103
4.3.2	Mehrachsiges Ratcheting	105
4.3.3	Bree-Rohr	107
4.3.4	Dickwandiger Zylinder unter Temperaturtransiente	109
4.4	Akkumulierte Dehnungen bei elastischem Einspielen	113
4.4.1	Identifikation des elastischen und des plastischen Teilvolumens	113
4.4.2	Abschätzung der transformierten internen Variable	114

4.5	Beispiele für akkumulierte Dehnungen bei elastischem Einspielen	118
4.5.1	Zweistab-Modell	118
4.5.2	Mehrachsiges Ratcheting	127
4.5.3	Bree-Rohr	133
4.6	Akkumulierte Dehnungen bei plastischem Einspielen	136
4.6.1	Identifikation des elastischen und des plastischen Teilvolumens	137
4.6.2	Abschätzung der transformierten internen Variable	137
4.7	Beispiele für akkumulierte Dehnungen bei plastischem Einspielen	141
4.7.1	Zweistab-Modell	141
4.7.2	Mehrachsiges Ratcheting	143
4.7.3	Bree-Rohr	145
4.7.4	Dickwandiger Zylinder unter Temperaturtransiente und Innendruck	148
4.8	VFZT bei Mehr-Parameter-Belastung	153
4.8.1	Ermittlung der Natur des Einspielzustandes	153
4.8.2	Sukzessive Projektion für elastisches Einspielen	154
4.8.3	Sukzessive Projektion für plastisches Einspielen	155
4.8.4	Beispiel Dreistab-Modell	155
	Literatur	160
5	VFZT bei temperaturabhängigen Materialdaten	163
5.1	Lineare kinematische Verfestigung	163
5.1.1	Temperaturabhängiger Verfestigungsmodul	164
5.1.2	Temperaturabhängige Fließgrenze	167
5.1.3	Grundgleichungen für Zugstab	170
5.2	VFZT bei anisothermer monotoner Belastung	171
5.3	VFZT bei anisothermer zyklischer Belastung	172
5.4	Dehnschwingbreite bei plastischem Einspielen	173
5.5	Beispiele für Dehnschwingbreite bei plastischem Einspielen	176
5.5.1	Zweistab-Modell	176
5.5.2	Mehrachsiges Ratcheting	178
5.5.3	Bree-Rohr	178
5.5.4	Dickwandiger Zylinder unter Temperaturtransiente	181
5.6	Akkumulierte Dehnungen bei elastischem Einspielen	181
5.6.1	Y^* liegt in ω_2	184
5.6.2	Y^* liegt in ω_1	185
5.6.3	Y^* liegt in ω_4	185
5.7	Beispiele für akkumulierte Dehnungen bei elastischem Einspielen	186
5.7.1	Zweistab-Modell	186
5.7.2	Mehrachsiges Ratcheting	194
5.7.3	Bree-Rohr	195
5.8	Akkumulierte Dehnungen bei plastischem Einspielen	196

5.9	Beispiele für akkumulierte Dehnungen bei plastischem Einspielen	198
5.9.1	Zweistab-Modell	198
5.9.2	Mehrachsiges Ratcheting	205
5.9.3	Bree-Rohr	206
5.9.4	Dickwandiger Zylinder unter Temperaturtransiente und Innendruck	208
	Literatur	211
6	Overlay-Modell	213
6.1	Multilineare kinematische Verfestigung	213
6.2	Layer ohne Verfestigung	214
6.3	Layer mit linearer kinematischer Verfestigung	215
6.3.1	Grundgleichungen zur Bestimmung der Materialparameter	216
6.3.2	1. Segment des Gesamtzustandes	220
6.3.3	2. Segment des Gesamtzustandes	221
6.3.4	3. Segment des Gesamtzustandes	222
6.3.5	Materialparameter bei elastischer Inkompressibilität	224
6.3.6	Materialparameter bei trilinearem Werkstoffgesetz	225
6.3.7	Materialparameter bei quadrilinearem Werkstoffgesetz	227
6.4	Trilinearisierung realer Spannungs-Dehnungs-Kurven	229
	Literatur	233
7	VFZT bei multilinearer Verfestigung	235
7.1	Theorie	235
7.1.1	Verhalten der einzelnen Layer	236
7.1.2	Gesamtzustand	237
7.1.3	Einachsiger Spannungszustand	245
7.2	Beispiele	245
7.2.1	Zweistab-Modell	245
7.2.2	Mehrachsiges Ratcheting	247
7.2.3	Bree-Rohr	256
7.2.4	Stutzen	260
	Literatur	271
8	Traglastberechnung	273
8.1	Berechnungsschritte	273
8.2	Asymptotischer Zustand	274
8.3	Beispiele für asymptotische Zustände	276
8.3.1	Ein Element mit zweiachsigem Spannungszustand	276
8.3.2	Biegebalken und Fachwerkstäbe	278
8.3.3	Dickwandiges Rohr unter Innendruck	279
8.3.4	Lochscheibe	280

8.4	Durchplastiziertes Tragwerk	282
8.5	Beispiele für Traglast durchplastizierter Tragwerke	286
8.5.1	Ein Element mit zweiachsigem Spannungszustand	286
8.5.2	Biegebalken	288
8.5.3	Dickwandiges Rohr unter Innendruck	297
8.5.4	Lochscheibe	299
8.6	Nicht durchplastiziertes Tragwerk	302
8.7	Beispiele für Traglast nicht durchplastizierter Tragwerke	305
8.7.1	Statisch unbestimmter Biegebalken	306
8.7.2	Lochscheibe mit freien Längsrändern	308
8.8	Querschnitts-Tragfähigkeit	309
8.8.1	Bekannte Drehachse	309
8.8.2	Drehachse nicht bekannt	311
	Literatur	316
	Sachverzeichnis	317

Abkürzungsverzeichnis

ECM	Elastic Compensation Method
EMAP	elastic modulus adjustment procedures
ES	elastisches Einspielen, elastic shakedown
GLOSS	Global Stress Strain (Method)
HCF	high cycle fatigue
LATIN	Large Time Increment (Method)
LCF	low cycle fatigue
LMM	Linear Matching Method
meA	modifizierte elastische Analyse
PS	plastisches Einspielen, plastic shakedown
RID	Ratcheting-Interaktions-Diagramm
RSDM	Residual Stress Decomposition Method
TIV	transformierte interne Variable
VFZT	Vereinfachte Fließzonentheorie

Autor

Hartwig Hübel Der Autor wurde 1954 in Boppard am Rhein geboren, wuchs in St. Goar auf und studierte 1972 bis 1978 Konstruktiven Ingenieurbau an der damaligen TH (heute TU) Darmstadt. Er arbeitete 16 Jahre lang im Kernkraftwerksbau und an der Entwicklung von Regelwerken zur Berechnung thermisch beanspruchter Bauteile. In dieser Zeit entstand auch seine am Institut für Mechanik der Gesamthochschule (heute Universität) Kassel bei Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns im Jahre 1985 eingereichte Dissertation „Plastische Dehnungserhöhungsfaktoren in Regelwerken und Vorschlag zur Etablierung angemessenerer Faktoren“. 1994 wurde er als Professor für Baustatik, Stahlbau und FEM an die Fachhochschule Lausitz in Cottbus berufen, die 2013 in der neu gegründeten Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus-Senftenberg aufging.

Es werden einige Grundlagen plastischen Werkstoffverhaltens und Ansätze zu ihrer mathematischen Beschreibung durch Werkstoffmodelle dargelegt sowie Auswirkungen auf das Verhalten von überelastisch beanspruchten Tragwerken angesprochen.

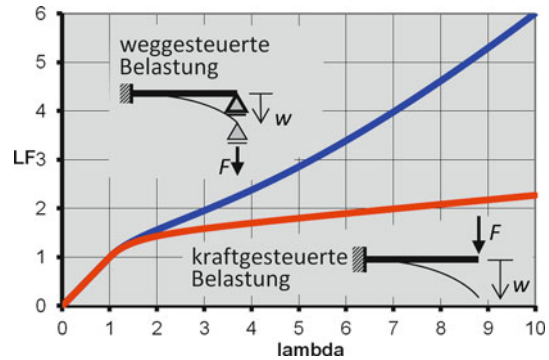
1.1 Plastische Reserve

Aufgrund seiner hohen Bruchdehnung von meist über 20 % besitzt der Werkstoff Stahl eine große plastische Reserve gegenüber seiner elastischen Grenzdehnung von meist weit weniger als 1 %. In Bezug auf die elastische Grenzspannung ist die plastische Reserve weitaus geringer. Damit geht eine wesentlich größere plastische Reserve in Bezug auf die elastische Grenzlaster bei weggesteuerter Belastung im Vergleich zu kraftgesteuerter Belastung einher.

Dies ist in Abb. 1.1 beispielhaft veranschaulicht für einen Kragarm, der an seinem Ende kraftgesteuert durch eine Einzellast bzw. weggesteuert durch eine, eine Einzelkraft als Lagerreaktion hervor rufende, Stützensenkung belastet wird. Dargestellt ist der Lastfaktor (LF) als Vielfaches der elastischen Grenzlaster über dem Vielfachen der elastischen Grenzdehnung (λ). Kraftgesteuerte und weggesteuerte Belastung sind im elastischen Bereich ($LF \leq 1$, $\lambda \leq 1$) nicht voneinander zu unterscheiden. Im plastischen Bereich jedoch gehört zu einer vorgegebenen Dehnung bei weggesteuerter Belastung ein höheres Belastungsniveau als bei kraftgesteuerter Belastung.

Insbesondere wenn die Belastung weggesteuert erfolgt, können also aufgrund der Duktilität des Werkstoffes recht hohe Belastungsniveaus weit oberhalb der elastischen Grenzlaster aufgebracht werden. Weggesteuerte Belastungen bestehen nicht nur aus der oben betrachteten Einwirkung durch Stützensenkung, sondern etwa auch aus freien thermischen Dehnungen. Die plastische Reserve wird daher insbesondere in thermischen Kraftwerken ausgenutzt, wo die infolge veränderlicher Betriebsbedingungen entstehenden Temperaturfelder zu beträchtlichen Spannungen führen. Unter der Annahme linear elastischen

Abb. 1.1 Plastische Reserve eines Kragarms unter weggesteuerter bzw. kraftgesteuerter Belastung¹



Werkstoffverhaltens, also fiktiv elastisch berechnet, können diese leicht mehr als das 12-fache der Fließgrenze des eingesetzten Stahls betragen.

Zu den weggesteuerten Belastungen zählen jedoch nicht nur Zwängungen infolge behinderter thermischer Dehnungen, sondern generell alle Zwängungen und somit auch die statisch überzähligen Schnittgrößen statisch unbestimmter Tragwerke. Abgesehen von wenigen speziellen Tragwerken wie Membranschalen sind Flächentragwerke ebenso wie dreidimensionale Kontinua innerlich stets statisch unbestimmt. Dort liegt daher eine plastische Reserve vor, selbst wenn diese Tragwerke primär einer kraftgesteuerten Belastung unterworfen werden.

Werden Tragwerke im überelastischen Bereich betrieben, so ist nicht nur sicher zu stellen, dass die Duktilität des Werkstoffes infolge monotoner Belastungssteigerung nicht überschritten wird. Sondern darüber hinaus ist auch noch zu beachten, dass selbst kleine veränderliche Belastungsanteile einen Mechanismus in Gang setzen können, der zu einer einsinnigen Zunahme der Dehnungen bei jeder Belastungsänderung führt und so die Lebensdauer des Tragwerks begrenzt. Ein solcher Vorgang wird oft als Ratcheting (häufig auch „Ratchetting“ geschrieben) oder als progressive Deformation bezeichnet und in Kap. 2 ausführlich erläutert.

Zudem kann eine Ermüdungsschädigung auftreten, insbesondere, wenn das Schwingenspiel so groß ist, dass es zu alternierendem Plastizieren kommt (low cycle fatigue, LCF). Da veränderliche Belastungsanteile aber immer vorhanden sind, sollte auch immer Ratcheting mit bedacht werden, wenn überhaupt plastische Beanspruchungen auftreten, und nicht nur bei so hohen veränderlichen Belastungsanteilen, dass alternierendes Plastizieren auftritt.

Die in diesem Buch behandelte Problematik ist somit nicht nur relevant für thermische Kraftwerke, sondern auch für viele Anwendungsbereiche im Bauingenieurwesen, etwa für Brückenlager und Straßendecken sowie in der Geotechnik. Zudem können Ratche-

¹ Abbildung 1.1 gilt für einen Kragarm mit Rechteck-Querschnitt aus linear verfestigendem Werkstoff (Verfestigungsparameter $C/E = 0,1$) bei Beschränkung auf Theorie kleiner Verschiebungen und kleiner Verdrehungen (siehe Gln. 3.11a und 6.17 in [1]).

ting und Ermüdung im LCF-Bereich bereits unter normalen Auslegungsbedingungen im Maschinen- und Fahrzeugbau, in der chemischen Industrie, bei Gasturbinen und vielen anderen Anwendungsbereichen auftreten. Darüber hinaus können diese Phänomene auch bei einer Absicherung gegen Grenzzustände eine Rolle spielen.

Die Duktilität des Werkstoffes wird nicht nur beim Werkstoff Stahl ausgenutzt, sondern in zunehmendem Maße auch bei Werkstoffen, die ein deutlich geringeres Plastizierungsvermögen besitzen als Stahl, etwa Beton oder Boden.

1.2 Grundbegriffe plastischen Werkstoffverhaltens

In diesem Abschnitt werden einige Begriffe erläutert, die das plastische Werkstoffverhalten betreffen und für das Verständnis der VFZT von Bedeutung sind. Es ist hier nicht beabsichtigt, die thermodynamischen oder mikroskopischen werkstoffkundlichen Grundlagen der Plastizitätstheorie zu erläutern oder ihre umfangreiche Phänomenologie darzustellen. Jedoch sollten die folgenden Beschreibungen genügen, um einem Interessenten zu gestatten, bei Bedarf gezielt eigene Recherchen anstellen zu können. Als Einstieg in eine ausführlichere Behandlung der werkstoffmechanischen Grundlagen der Plastizitätstheorie wird beispielsweise auf Reckling [2], Lemaitre und Chaboche [3], Schreiber [4] sowie Burth und Brocks [5] verwiesen.

Das mechanische Verhalten von Werkstoffen wird durch Materialmodelle beschrieben und durch Werkstoffgesetze (konstitutive Gleichungen) mathematisch erfasst, die den Zusammenhang beschreiben zwischen den sechs Verzerrungs- und den sechs Spannungskomponenten:

$$\varepsilon_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 \end{pmatrix}; \quad \sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

1.2.1 Elastisches Verhalten

Das einfachste Werkstoffgesetz ist das Hooke'sche Gesetz, mit dem linear elastisches Verhalten beschrieben wird. Nichtlinear elastisches sowie viskoelastisches Verhalten, mit dem sich etwa elastische Hysterese-Effekte beschreiben lassen, wird im Folgenden dagegen nicht betrachtet. Das Hooke'sche Gesetz gibt den Zusammenhang zwischen den Spannungs- und Verzerrungskomponenten an. Bei einachsiger Spannung σ ergibt sich im Falle isotropen Materialverhaltens die in dieselbe Richtung wirkende elastische Dehnung ε^{el} aus

$$\varepsilon^{\text{el}} = \frac{\sigma}{E}. \quad (1.2)$$

Bei einem isotropen Werkstoff, der einer mehrachsigen Beanspruchung unterworfen wird, tritt zu dem E -Modul noch die Querdehnzahl ν als zweiter elastischer Werkstoffparameter hinzu:

$$\varepsilon_i^{\text{el}} = E_{ij}^{-1} \sigma_j; \quad i, j = 1 \dots 6, \quad (1.3)$$

$$E_{ij} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

$$E_{ij}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Bei dieser Schreibweise wird Gebrauch gemacht von der sog. Summationskonvention, nach der über Indizes, die in einem Term doppelt vorkommen, summiert wird, also in Gl. 1.3 über j .

Ist der Werkstoff anisotrop, sind zur Beschreibung seines linear elastischen Verhaltens bis zu 21 unterschiedliche Parameter erforderlich.

1.2.2 Deviatorischer Spannungszustand

Das Plastizieren eines Werkstoffes ist gewöhnlich von allen sechs Spannungskomponenten abhängig. Der mittlere allseitige Druck, der sich aus arithmetischer Mittelung der drei Normalspannungen ergibt,

$$\sigma_H = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad (1.6)$$

spielt bei manchen Werkstoffen eine große Rolle, z. B. bei Böden. Beim sog. hydrostatischen Spannungszustand bestehen alle Normalspannungen nur aus dem allseitigen Druck:

$$\sigma_{i,H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sigma_H. \quad (1.7)$$

Bei isotropen oder auch anisotropen kristallinen Werkstoffen hingegen wird das plastische Verhalten von Schubprozessen dominiert, für deren Beschreibung der sog. Spannungsdeviator σ'_i heran gezogen wird. Dieser ergibt sich aus dem Spannungszustand σ_i (Gl. 1.1) durch Subtraktion des hydrostatischen Spannungszustandes:

$$\sigma'_i = \sigma_i - \sigma_{i,H} = \begin{pmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_x - \frac{1}{3}\sigma_y - \frac{1}{3}\sigma_z \\ -\frac{1}{3}\sigma_x + \frac{2}{3}\sigma_y - \frac{1}{3}\sigma_z \\ -\frac{1}{3}\sigma_x - \frac{1}{3}\sigma_y + \frac{2}{3}\sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

bzw.

$$\sigma'_i = L_{ij}\sigma_j \quad \text{mit} \quad L_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Es ist festzuhalten, dass

$$\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0 \quad (1.10)$$

gilt, so dass nur zwei der drei deviatorischen Normalspannungen unabhängig voneinander sind.

1.2.3 Fließfläche

Beim einachsigen Spannungszustand beginnt der Werkstoff zu fließen, wenn der Betrag der Spannung die Fließgrenze f_y erreicht. Bei mehrachsigen Spannungszuständen tritt an die Stelle des Betrages der Spannung die Vergleichsspannung. Als Fließbedingung gilt daher, dass das Fließen einsetzt, wenn die Vergleichsspannung die Fließgrenze erreicht.

Zur Bildung der Vergleichsspannung gibt es zahlreiche Hypothesen. Für den Werkstoff Stahl, der sich unter einer Zugbeanspruchung sehr ähnlich verhält wie unter einer Druckbeanspruchung, und der in guter Näherung als isotrop betrachtet werden kann, haben sich vor allem zwei Vergleichsspannungshypothesen eingebürgert, die sog. Schubspannungshypothese nach Tresca und die sog. Gestaltänderungsenergiehypothese nach von Mises. Beide machen nur Gebrauch von den deviatorischen Spannungen, hängen also von den fünf unterschiedlichen deviatorischen Spannungskomponenten ab, sind also im 5-dimensionalen deviatorischen Spannungsraum definiert. Betrachtet man nur Hauptspannungszustände ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), reduziert sich der Spannungsraum auf drei Dimensionen, und der deviatorische Spannungsraum wg. Gl. 1.10 auf zwei Dimensionen, die sog. Deviator-

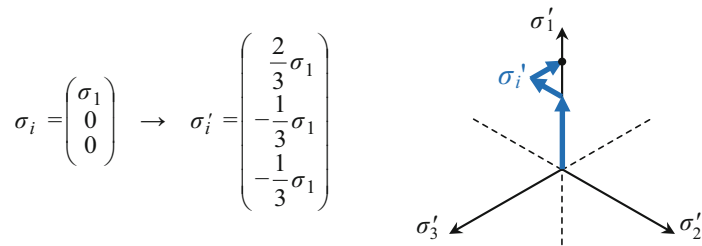


Abb. 1.2 Einachsiger Spannungszustand im deviatorischen Hauptspannungsraum (der Deviator-ebene)

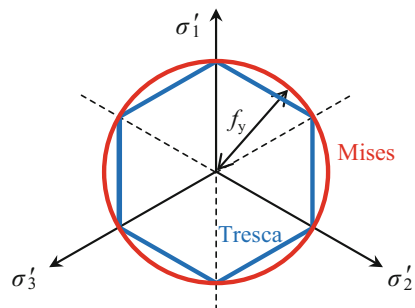
ebene. Die deviatorischen Hauptspannungen ($\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$) lassen sich in dieser Deviator-ebene zweckmäßigerweise mit Hilfe eines dreibeinigen Koordinatensystems darstellen, siehe Abb. 1.2 für einen einachsigen Zugspannungszustand.

Die Linie gleicher Vergleichsspannungen in dieser Deviator-ebene stellt die sog. Fließfläche dar (Abb. 1.3). Aufgrund der Isotropie muss die Fließfläche auf den drei deviatorischen Hauptspannungsachsen dieselbe Entfernung vom Koordinatenursprung haben, nämlich die Fließgrenze f_y , und zwar bei gleichartigem Verhalten unter Zug wie unter Druck sowohl in positiver als auch in negativer Koordinatenrichtung. Damit liegen bereits sechs Punkte für die Fließfläche fest, in denen die Tresca- und die Mises-Fließfläche also identisch sein müssen.

Der hydrostatische Spannungszustand wirkt senkrecht zur Deviator-ebene, so dass die Mises-Fließfläche auch als Mantelfläche eines Zylinders mit der Erzeugenden senkrecht zur Zeichenebene in Abb. 1.3 betrachtet werden kann. Hängt die Fließfläche vom hydrostatischen Spannungszustand ab, wie etwa bei Böden, so stellt sie im Raum der nicht-deviatorischen Hauptspannungen im einfachsten Fall die Mantelfläche eines Kegels dar (Drucker-Prager Fließbedingung).

Spannungszustände innerhalb dieser Fließfläche stellen eine rein elastische Beanspruchung dar. Erreichen die Spannungszustände mit wachsender Belastung den Rand, tritt der Fließbeginn ein. Spannungszustände außerhalb der Fließfläche sind meist nicht zu-

Abb. 1.3 Fließflächen im deviatorischen Hauptspannungsraum (der Deviator-ebene)



lässig. Es gibt jedoch auch Werkstoffmodelle, die auch außerhalb der Fließfläche liegende Spannungszustände gestatten. Dadurch kann zeitabhängiges (viskoses) Werkstoffverhalten, wie Dehnungszunahme bei konstanter Spannung infolge Kriechen, Spannungsabnahme bei konstanter Dehnung infolge Relaxieren oder dehnratenabhängiges Plastizieren beschrieben werden. Der Abstand des Spannungsbildpunktes von der Fließfläche (overstress) gilt dann als Maß für die Dehnungsgeschwindigkeit. Im Weiteren wird nur zeitunabhängiges (inviscides) Verhalten betrachtet.

Aus thermodynamischen Gründen, die durch die Drucker'schen Postulate von stabilem Werkstoffverhalten formuliert sind, muss verlangt werden, dass eine Fließfläche konvex ist. Sonst könnte bei kontinuierlicher Belastungssteigerung der plastische Bereich verlassen werden und sich der Werkstoff bei ausreichend hoher Beanspruchung dann wieder elastisch verhalten, was schon intuitiv auszuschließen ist. Rein geometrisch betrachtet wären natürlich außer der Tresca- und der Mises-Fließfläche noch weitere hexagonal symmetrische Fließflächen denkbar. Aufgrund der Konvexitätsbedingung können sie aber nicht erheblich von den beiden genannten abweichen.

Wie sich aus einfachen geometrischen Zusammenhängen in Abb. 1.3 ergibt, kann die Mises-Vergleichsspannung maximal das $2/\sqrt{3}$ -fache der Tresca-Vergleichsspannung betragen, so dass beide Hypothesen maximal um 15,5 % voneinander abweichen. Innerhalb dieses Unterschiedes können beide für den Werkstoff Stahl als experimentell gut belegt betrachtet werden, mit leichten Vorteilen für die Mises-Hypothese. Die Entscheidung zugunsten der einen oder der anderen Hypothese orientiert sich daher nicht unbedingt an der größeren Genauigkeit, als vielmehr an der einfacheren rechnerischen Handhabung. Für manche speziellen Probleme der Festigkeitslehre besitzt die Tresca-Hypothese wegen ihrer stückweisen Linearität rechnerische Vorteile. Zudem liegt sie im Vergleich zur Mises-Hypothese auf der sicheren Seite. Ihre in den Ecken vorliegenden Singularitäten verursachen jedoch bei vielen anderen Anwendungen Probleme, auf die im folgenden Abschnitt kurz eingegangen wird. Daher wird die Mises-Bedingung allgemein bevorzugt.

Die Mises-Fließfläche lässt sich allgemein formulieren durch die Funktion

$$g(\sigma'_i) = f_y, \quad (1.11)$$

wobei $g(\sigma'_i)$ die Mises-Vergleichsspannung σ_v ist.

Im deviatorischen Hauptspannungsraum stellt die Mises-Fließfläche einen Kreis dar:

$$\sigma_v^2 = \frac{3}{2} \left[(\sigma'_1)^2 + (\sigma'_2)^2 + (\sigma'_3)^2 \right] = f_y^2 \quad (1.12)$$

bzw. in nicht-deviatorischen Größen:

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right] = f_y^2, \quad (1.13)$$

$$\sigma_v^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \sigma_z + 3 \left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 \right) = f_y^2. \quad (1.14)$$

1.2.4 Fließgesetz

Solange die Verzerrungen hinreichend klein sind, sagen wir, kleiner als 10 %, was bei Tragwerken im Gebrauchszustand im Gegensatz etwa zu Umformprozessen der Fall sein wird, lassen sie sich additiv in elastische und plastische Anteile aufspalten (Additivität):

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{\text{el}} + \varepsilon_i^{\text{pl}}. \quad (1.15)$$

Während die elastischen Verzerrungsanteile nach Gl. 1.3 aus dem Spannungszustand gewonnen werden können, wird für die plastischen Verzerrungsanteile ein Fließgesetz benötigt.

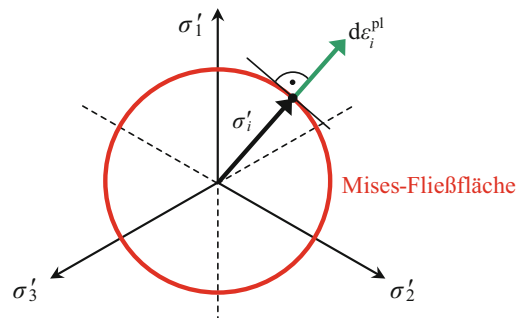
Die Fließfläche beschreibt, bei welchem Spannungszustand es zum Plastizieren kommt. Dagegen gibt das Fließgesetz an, in welche Richtung sich während des Plastizierens die plastischen Dehnungen entwickeln. Je nach Werkstoff kann diese Richtung bei gleichem Spannungszustand recht unterschiedlich sein, beispielsweise aufgrund von Porosität, Bindigkeit und innerer Reibung. Bei Stahl ist empirisch gut gesichert, dass plastische Deformationen das Volumen des Werkstoffes kaum ändern, so dass von der Inkompressibilitätsbedingung

$$\varepsilon_x^{\text{pl}} + \varepsilon_y^{\text{pl}} + \varepsilon_z^{\text{pl}} = 0 \quad (1.16)$$

ausgegangen werden kann. Damit sind plastische (anders als die elastischen) Verzerrungen von deviatorischer Natur, so dass sich ihre Richtungen allein im deviatorischen Raum angeben lassen. Da sie bei einachsigen Spannungszustand in die Richtung dieser Spannung und damit in die Richtung des deviatorischen Spannungsvektors wirken müssen, steht der plastische Verzerrungsvektor dort senkrecht auf der Mises-Fließfläche. Dies wird verallgemeinert zur sog. Normalenregel. In einem auf dem Rand der Fließfläche befindlichen Spannungsbildpunkt σ'_i wirkt das plastische Verzerrungsinkrement $d\varepsilon_i^{\text{pl}}$ danach stets normal zur Fließfläche und ist nach außen gerichtet (Abb. 1.4). Das Fließgesetz ist somit mit der Fließbedingung assoziiert:

$$d\varepsilon_i^{\text{pl}} \propto \sigma'_i. \quad (1.17)$$

Abb. 1.4 Assoziiertes Fließgesetz, Normalenregel



Diese Proportionalität zwischen plastischem Verzerrungssinkrement und deviatorischem Spannungszustand wird durch das Prandtl-Reuss-Fließgesetz präzisiert:

$$d\varepsilon_i^{\text{pl}} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_v^{\text{pl}}}{\sigma_v} \sigma'_i, \quad (1.18)$$

wonach das plastische Vergleichsdehnungssinkrement $d\varepsilon_v^{\text{pl}}$ proportional zum Spannungsdeviator, der durch die Vergleichsspannung σ_v normiert wird, auf die verschiedenen Richtungen aufgeteilt wird. Das zunächst noch unbekannte plastische Vergleichsdehnungssinkrement $d\varepsilon_v^{\text{pl}}$ lässt sich durch die sog. Konsistenzbedingung finden, wonach der Spannungsbildpunkt den Rand der Fließfläche nicht verlassen darf.

Von großer Bedeutung für den später zu diskutierenden erforderlichen Berechnungsaufwand bei plastischen Analysen ist die Tatsache, dass Gl. 1.18 gewöhnlich nicht geschlossen und somit exakt integriert werden kann. Denn der Term σ'_i/σ_v ist während eines plastischen Prozesses selbst bei monotoner Belastung meist nicht konstant, was als direktionale Spannungumlagerung bezeichnet wird (siehe Abschn. 2.1). Hieraus resultiert eine Abhängigkeit plastischer Beanspruchungen von der Belastungsgeschichte, also davon, auf welchem Weg der momentane Beanspruchungszustand erreicht wurde, während elastische Beanspruchungen nur vom momentanen Belastungszustand abhängen. Nur in Ausnahmefällen, wie bei einachsigen Spannungszuständen unter monotoner Belastung, kann Gl. 1.18 exakt zum finiten Fließgesetz

$$\varepsilon_i^{\text{pl}} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_v^{\text{pl}}}{\sigma_v} \sigma'_i \quad (1.19)$$

integriert werden. Wird Gl. 1.19 auch in anderen Fällen als Näherung verwendet, erhält man die Deformationstheorie von Hencky.

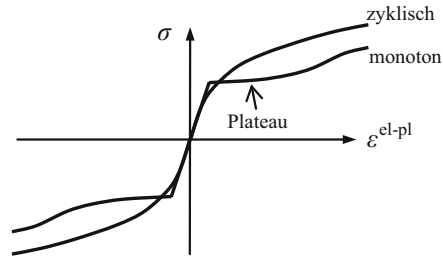
Die Normalenregel ist auch der ausschlaggebende Grund dafür, dass, wie im vorigen Abschnitt bereits erwähnt, die Verwendung der Tresca-Fließfläche problematisch sein kann. In ihren sechs Ecken ist nämlich die Normale nicht eindeutig definiert.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass die Normalenregel bei manchen Werkstoffen bzw. Fließflächen nicht geeignet ist, etwa bei reibungsbehafteten Materialien wie Böden.

1.2.5 Verfestigungsgesetz

Werkstoffversuche zeigen, dass auch nach Erreichen der Fließgrenze die Spannung meist noch weiter gesteigert werden kann. Dies trifft insbesondere auf Stähle zu, wozu Boller, Seeger und Vormwald umfangreiche Daten zusammengestellt haben [6]. Eine Besonderheit ist bei erstmaliger monotoner Belastung von Baustahl zu beobachten. Ein weiterer Spannungsanstieg ist dann nämlich erst nach einem Plateau-artigen Verhalten möglich, bei dem zwar die Dehnung zunehmen kann, die Spannung aber ungefähr konstant bleibt.

Abb. 1.5 Prinzipskizze für das Verhalten von Baustahl, in Anlehnung an [7]



Bei zyklischer Belastung ist dieses Phänomen jedoch nicht mehr zu beobachten. Stattdessen sinkt die Fließgrenze (Abb. 1.5).

Das Verhalten bei Überschreitung der Fließgrenze wird Verfestigung genannt. Im Spannungs-Dehnungs-Diagramm ist es stets mit einer Tangentensteigung verbunden, die kleiner ist als unterhalb der Fließgrenze, also im elastischen Bereich. Trotz der nur schematischen Darstellung in Abb. 1.5 kann man bereits ahnen, dass die Berücksichtigung der Verfestigung bei zyklischem elastisch-plastischem Verhalten eine große Bedeutung besitzt.

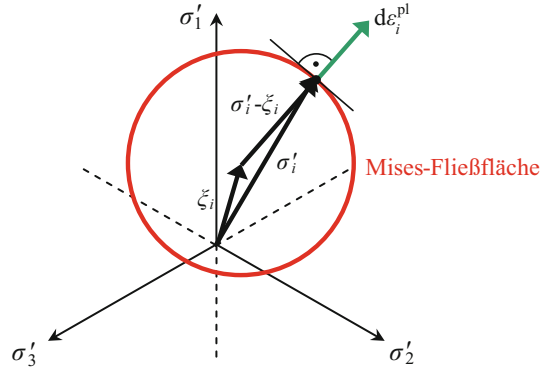
Wenn einerseits die Spannungen die Fließgrenze überschreiten können, die Fließfläche aber andererseits nicht verlassen können, muss sich die Fließfläche während des Verfestigungsvorganges ändern. Hierfür kommt eine konzentrische Aufweitung, eine Verschiebung, eine Gestaltänderung oder eine Mischung dieser Geometrieänderungen in Frage.

Eine Gestaltänderung der Fließfläche ist zwar im Prinzip experimentell bestätigt, aber deutlich geringer ausgeprägt als ihre konzentrische Aufweitung (isotrope Verfestigung), und diese wiederum ist bei monotoner Belastungssteigerung gewöhnlich weitaus weniger ausgeprägt als eine Verschiebung der Fließfläche (kinematische Verfestigung). Jedoch spielt bei zyklischer Belastung häufig auch die isotrope Verfestigung eine erhebliche Rolle, ist jedoch meist auf die ersten Zyklen beschränkt. Manche Werkstoffe können unter gewissen Umständen auch zyklisch entfestigen, sodass die Fließfläche kleiner wird als bei erstmaliger Belastung [6].

Das Verfestigungsgesetz beschreibt, wie die Verfestigung von der Beanspruchung abhängt, nämlich etwa von der momentanen plastischen Dehnung, von der Beanspruchungsgeschichte, von der Richtungsänderung des Spannungsvektors usw. Diese Abhängigkeit wird oft mittels sog. interner Variabler definiert, die im Gegensatz zu externen Variablen wie Dehnung oder Temperatur einer direkten Messung im Experiment nicht zugänglich sind. Ihre Entwicklung wird in Abhängigkeit von der Beanspruchungsgeschichte durch Evolutionsgleichungen beschrieben.

In den folgenden Abschnitten werden einige gebräuchliche Verfestigungsgesetze zur Beschreibung kinematischer Verfestigung bei einer Mises-Fließfläche unter isothermen Bedingungen angesprochen, und zwar das Prager-Ziegler-, das Besseling- und das Chaboche-Modell. Hierzu wird eine vektorielle interne Variable ξ_i eingeführt, die die Verschiebung des Mittelpunktes der Fließfläche im deviatorischen Spannungsraum aus dem Koordinatenursprung beschreibt und daher auch Translationsvektor oder Rückspannung

Abb. 1.6 Kinematische Verfestigung bei einer Mises-Fließfläche



(backstress) genannt wird, Abb. 1.6. Hierdurch entsteht eine plastische Anisotropie, weil die Fließgrenze nun nicht mehr in alle Richtungen gleich ist.

Die Rückspannung ist selbst ebenfalls deviatorisch:

$$\xi_x + \xi_y + \xi_z = 0. \quad (1.20)$$

Aufgrund der Normalenregel ist das plastische Verzerrungsinkrement nun nicht mehr koaxial mit dem Spannungsdeviator σ'_i (Gl. 1.18), sondern proportional zur reduzierten Spannung ($\sigma'_i - \xi_i$):

$$d\varepsilon_i^{pl} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_v^{pl}}{f_y} (\sigma'_i - \xi_i), \quad (1.21)$$

und die Fließfläche wird an Stelle von Gl. 1.11 allgemein beschrieben durch die Funktion

$$g(\sigma'_i - \xi_i) = f_y \quad (1.22)$$

bzw. für den deviatorischen Hauptspannungsraum

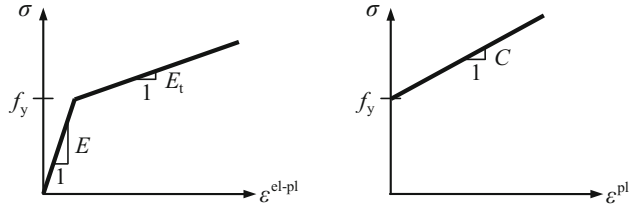
$$\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{(\sigma'_1 - \xi_1)^2 + (\sigma'_2 - \xi_2)^2 + (\sigma'_3 - \xi_3)^2} = f_y. \quad (1.23)$$

1.2.6 Prager-Ziegler Verfestigung

Nach Ziegler verschiebt sich die Fließfläche in Richtung der reduzierten Spannung, nach Prager in Richtung des plastischen Dehnungsinkrementes. Bei einer Mises-Fließfläche sind beide aufgrund von Gl. 1.21 gleich gerichtet. Nach der Prager-Ziegler Verfestigung ist das Rückspannungsinkrement also proportional zum plastischen Verzerrungsinkrement, so dass die Evolutionsgleichung für die interne Variable lautet:

$$d\xi_i = \frac{2}{3} C d\varepsilon_i^{pl}. \quad (1.24)$$

Abb. 1.7 Bilineares Spannungs-Dehnungs-Diagramm bei linearer kinematischer Verfestigung für einachsigen Spannungszustand unter monotoner Belastung



Dabei ist der Proportionalitätsfaktor C der plastische Verfestigungsmodul, der mit dem elastisch-plastischen Verfestigungsmodul E_t über

$$C = \frac{E E_t}{E - E_t} \quad (1.25)$$

zusammen hängt (Abb. 1.7). Ist C konstant, kann Gl. 1.24 geschlossen integriert werden zu

$$\xi_i = \frac{2}{3} C \varepsilon_i^{\text{pl}}, \quad (1.26)$$

was im einachsigen Spannungszustand bei monotoner Belastungssteigerung zu einem bilinearen Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung führt. Der Zusammenhang zwischen Spannung und plastischem Dehnungsanteil ist dann linear (Abb. 1.7), weshalb man von linearer kinematischer Verfestigung spricht. Für $C=0$ erhält man linear elastisch – ideal plastisches Verhalten. Dabei fehlt jede Verfestigung, so dass f_y nicht überschritten werden kann.

Das in Gl. 1.21 aufscheinende, aber zunächst noch unbekannte plastische Vergleichsdehnungsincrement $d\varepsilon_v^{\text{pl}}$ lässt sich nun wegen der infolge der Verfestigung eindeutigen Beziehung zwischen Spannungsincrement und plastischem Dehnungsincrement durch die sog. Konsistenzbedingung identifizieren. Danach darf der Spannungsbildpunkt bei weiterer Belastungssteigerung von einem plastischen Zustand aus den Rand der sich verändernden Fließfläche nicht verlassen. Demnach muss bei einer Mises-Fließfläche nach Gl. 1.22 gelten

$$dg(\sigma'_i - \xi_i) = \frac{\partial g(\sigma'_i - \xi_i)}{\partial \sigma'_i} d\sigma'_i + \frac{\partial g(\sigma'_i - \xi_i)}{\partial \xi_i} d\xi_i = 0, \quad (1.27)$$

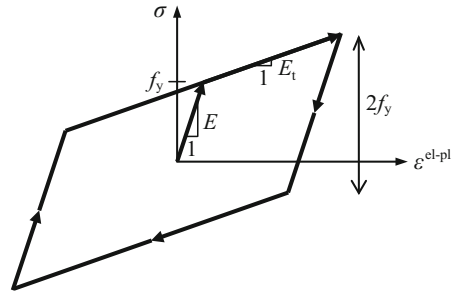
was nach Ausführung der partiellen Ableitungen und Einarbeitung von Gln. 1.21 und 1.24 letztlich auf

$$d\varepsilon_v^{\text{pl}} = \frac{3}{2} \frac{1}{C f_y} (\sigma'_i - \xi_i) d\sigma'_i \quad (1.28)$$

führt.

Bei einer Entlastung verlässt der Spannungsbildpunkt die Fließfläche und bewegt sich in deren Inneres, womit definitionsgemäß nur elastische Beanspruchungsänderungen verbunden sind. Die Fließfläche behält daher ihre Position unverändert bei. Bei einachsigen Spannungszustand kommt es erst dann wieder zu erneutem Plastizieren, und zwar in

Abb. 1.8 Lineare kinematische Verfestigung (bilineares Spannungs-Dehnungs-Diagramm) für einachsigen Spannungszustand bei zyklischer Belastung



entgegengesetzte Richtung wie zuvor, wenn der Spannungsbildpunkt den kompletten Durchmesser der Fließfläche durchwandert hat, also bei einer Spannungsänderung um $2f_y$, Abb. 1.8.

Dass sich der neuerliche Fließbeginn nun aufgrund des vorangegangenen Plastizierens auf einem niedrigeren Spannungsniveau befindet, ist ein experimentell gut bestätigtes Phänomen, das als Bauschinger-Effekt bezeichnet wird.

Bei abermaliger Belastungsumkehr wird die Spannungs-Dehnungs-Kurve der ersten Belastung wieder erreicht, Abb. 1.8. Weitere Belastungszyklen durchlaufen dann immer wieder dieselbe Spannungs-Dehnungs-Hysterese, die also nach dem ersten Zyklus bereits stabilisiert ist. Ein solches Verhalten steht jedoch nicht in gutem Einklang mit experimentellen Befunden.

Der Abb. 1.8 liegt spannungsgesteuerte Wechselbelastung zugrunde, d. h. die Spannungen haben bei ihren beiden Extremwerten im Zug- und im Druckbereich dieselben Beträge. Bei der Prager-Ziegler-Verfestigung verschwindet dann nicht nur die mittlere Spannung, sondern auch die mittlere Dehnung.

1.2.7 Besseling-Modell

Das Besseling-Modell ist eng verwandt mit dem Prager-Ziegler Modell, bietet jedoch die Erweiterungsmöglichkeit zur Beschreibung multilinear kinematischer Verfestigung, indem das Werkstoffvolumen als aus mehreren Schichten (Layern) bestehend betrachtet und daher Overlay-Modell genannt wird. Jeder Schicht wird ein eigenes nichtlineares Werkstoffgesetz zugewiesen, beispielsweise ein linear elastisch – ideal plastisches Werkstoffgesetz mit unterschiedlichen E -Moduli und Querdehnungszahlen in unterschiedlichen Layern. Für ein bilineares Spannungs-Dehnungs-Diagramm werden demnach zwei solcher Layer benötigt. Hierfür ist das Besseling-Modell identisch mit dem Prager-Ziegler Modell.

In Kap. 6 wird das Besseling-Modell ausführlich zur Beschreibung multilinearen Spannungs-Dehnungs-Verhaltens behandelt.

1.2.8 Chaboche-Modell

Wie bereits erwähnt, zeigen Werkstoffversuche unter zyklischer spannungsgesteuerter Belastung, dass nicht unbedingt in jedem Belastungszyklus dieselbe Spannungs-Dehnungs-Kurve durchfahren wird. Dann ist die Spannungs-Dehnungs-Hysterese also nicht geschlossen, und es gibt einen Netto-Zuwachs der mittleren Dehnung von Zyklus zu Zyklus. Dieses Phänomen wird „Ratcheting“ genannt oder „progressive Deformation“. Sie kann unterschiedliche Ursachen haben, wie in [8] erläutert. Insbesondere wird dort zwischen zwei Formen unterschieden:

- Material-Ratcheting, das im reinen Werkstoffversuch, also bei homogenen, ein- oder mehrachsigen Spannungszuständen, zu beobachten ist,
- Struktur-Ratcheting, das auch bei Werkstoffen ohne Material-Ratcheting auftritt und auf inhomogene Spannungsverteilungen in Tragwerken und somit auf die Wirkung der Feldgleichungen an Stelle der konstitutiven Gleichungen zurück zu führen ist.

Um das fehlende Vermögen der Prager-Ziegler Verfestigung (oder verallgemeinert des Besseling-Modells) zur Beschreibung von Material-Ratcheting zu korrigieren, lassen sich im Verfestigungsgesetz sog. Erholungsterme berücksichtigen, die die Verfestigung in Abhängigkeit vom zuvor erreichten Verfestigungsgrad reduzieren. Hierdurch wird die Verfestigung nichtlinear. Als Grundform für ein Verfestigungsgesetz mit einem Erholungsterm gilt an Stelle von Gl. 1.24 das Armstrong-Frederik-Modell für isotherme Bedingungen:

$$d\xi_i = \frac{2}{3} C d\varepsilon_i^{\text{pl}} - \gamma \xi_i dp, \quad (1.29)$$

wobei p aufgrund der Definition

$$p = \int dp \quad (1.30)$$

mit

$$dp = |d\varepsilon_i^{\text{pl}}| = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_1^{\text{pl}} - d\varepsilon_2^{\text{pl}})^2 + (d\varepsilon_2^{\text{pl}} - d\varepsilon_3^{\text{pl}})^2 + (d\varepsilon_1^{\text{pl}} - d\varepsilon_3^{\text{pl}})^2} \quad (1.31)$$

häufig als „akkumulierte Vergleichsdehnung“ bezeichnet wird und selbst bei alternierendem Plastizieren monoton steigt. Die Bezeichnung „akkumulierte Vergleichsdehnung“ mag als etwas missverständlich empfunden werden, da es sich dabei nicht etwa um die Vergleichsdehnung $\varepsilon_v^{\text{pl}}$ der zyklisch akkumulierten plastischen Dehnungskomponenten

$$\varepsilon_v^{\text{pl}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1^{\text{pl}} - \varepsilon_2^{\text{pl}})^2 + (\varepsilon_2^{\text{pl}} - \varepsilon_3^{\text{pl}})^2 + (\varepsilon_1^{\text{pl}} - \varepsilon_3^{\text{pl}})^2} \quad (1.32)$$

mit

$$\varepsilon_i^{\text{pl}} = \int d\varepsilon_i^{\text{pl}} \quad (1.33)$$

handelt. Diese würde sich nämlich nicht unbedingt monoton entwickeln.

Bei einachsigem Spannungszustand und monotoner Zugbeanspruchung reduziert sich Gl. 1.29 zu

$$d\xi = (C - \gamma\xi) d\varepsilon^{\text{pl}}, \quad (1.34)$$

was sich integrieren lässt zum exponentiellen Verfestigungsgesetz

$$\xi = \frac{C}{\gamma} + c_0 \exp(-\gamma\varepsilon^{\text{pl}}). \quad (1.35)$$

Der Ansatz von Armstrong-Frederik stellte sich jedoch immer noch als unzureichend heraus. Chaboche führte daher eine Erweiterung durch Addition mehrerer Armstrong-Frederik-Terme (meist $k=2$ bis 5) ein (im letzten Term von Gl. 1.36 wird nicht über j addiert):

$$(d\xi_i)_j = \frac{2}{3} C_j d\varepsilon_i^{\text{pl}} - \gamma_j (\xi_i)_j dp, \quad (1.36)$$

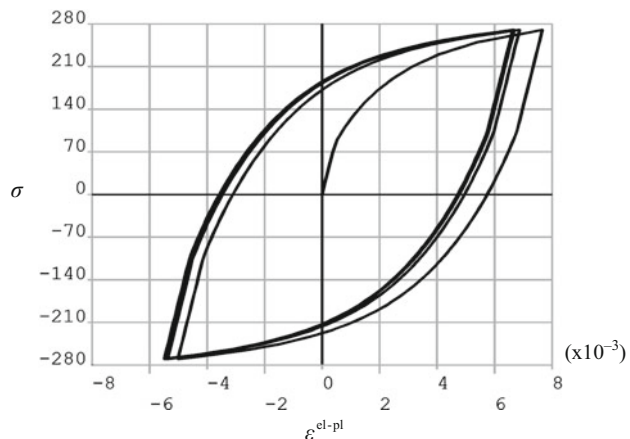
$$\xi_i = \sum_{j=1}^k (\xi_i)_j \quad \text{mit } k = 2 \dots 5. \quad (1.37)$$

Das zyklische Spannungs-Dehnungs-Verhalten ist in Abb. 1.9 beispielhaft für die ersten fünf Zyklen einer spannungsgesteuerten Wechselbeanspruchung ($\sigma = \pm 270 \text{ N/mm}^2$) für den Materialdatensatz aus [9] bei 200°C mit $k=5$ Armstrong-Frederik-Termen dargestellt.

Man erkennt in Abb. 1.9 einen ausgeprägten Bauschinger-Effekt. Nach dem 1. Zyklus liegt noch keine geschlossene Spannungs-Dehnungs-Kurve vor. Nach fünf Zyklen ist diese jedoch nahezu stabilisiert und mit einer positiven Mitteldehnung $\neq 0$ verbunden.

Auch von der Form des Chaboche-Modells in Gln. 1.36 und 1.37 existiert wieder eine ganze Reihe von Modifikationen (etwa mit Schranken für die kinematische Verfestigung, mit isotroper Verfestigung, mit Zeitabhängigkeit), die hier nicht besprochen werden

Abb. 1.9 Nichtlineare kinematische Verfestigung nach dem Chaboche-Modell für einachsigen Spannungszustand bei zyklischer spannungsgesteuerter Belastung



sollen. Hierzu gibt es umfangreiche Literatur. Erwähnt werden sollen lediglich die Übersichtsarbeiten von Dahlberg und Segle [10] sowie von Abdel-Karim [11] mit mehreren hundert Literaturhinweisen. Dort wird nicht nur das Chaboche-Modell, sondern es werden auch die anderen bisher erwähnten Modelle (Prager, Besseling) und auch weitere wie das Ohno-Wang Modell besprochen, und zwar jeweils unter dem Aspekt zyklischer Belastung. Außerdem wird ein Vergleich mit experimentellen Befunden angestellt.

Dabei zeigt sich, dass mit dem Chaboche-Modell Material-Ratcheting generell überschätzt wird, während es, wie oben erwähnt, mit dem Besseling-Modell unterschätzt wird. Ein Material-Modell, mit dem Material-Ratcheting zutreffend beschrieben werden kann, hat sich nach Kenntnis des Autors noch nicht durchgesetzt. Vielleicht besitzt die Ohno-Wang Modell-Familie das Potenzial hierzu, liegt die Vorhersage der zyklisch akkumulierten Dehnungen gewöhnlich zwischen dem Besseling- und dem Chaboche-Modell. Das Ohno-Wang Modell ist jedoch, anders als das Besseling- und das Chaboche-Modell, nicht allgemein verfügbar in kommerziellen Finite-Elemente-Programmen wie beispielsweise ANSYS [12] implementiert. In Anbetracht der beträchtlichen Streuung, die allein schon bei monotonem elastisch-plastischem Verhalten und erst recht bei Ratcheting-Experimenten zu beobachten ist, muss allerdings damit gerechnet werden, dass es ein Materialmodell zur genauen Beschreibung von Ratcheting vielleicht auch gar nicht geben kann.

Literatur

1. Hübel, H.: Plastische Dehnungserhöhungsfaktoren in Regelwerken und Vorschlag zur Etablierung angemessenerer Faktoren. Gesamthochschule Kassel, Institut für Mechanik, Mitteilung Nr. 4 (Dissertation) (1985)
2. Reckling, K.-A.: Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York (1967)
3. Lemaitre, J.M., Chaboche, J.-L.: Mechanics of Solid Materials. Cambridge University Press, Cambridge (1990)
4. Schreiber, L.: Einführung in die Plastizitätstheorie, Institut für Mechanik, Universität Kassel (1997). <http://www.ifm.maschinenbau.uni-kassel.de/~lsch/plt/plt.pdf>
5. Burth, K., Brocks, W.: Plastizität: Grundlagen und Anwendungen für Ingenieure. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden (1992)
6. Boller, C., Seeger, T., Vormwald, M.: Materials Database for Cyclic Loading, Fachgebiet Werkstoffmechanik, TU Darmstadt (2008). <http://www.wm.tu-darmstadt.de/mat-db-html/index.html>
7. Klee, S.: Das zyklische Spannungs-Dehnungs- und Bruchverhalten verschiedener Stähle. Technische Hochschule Darmstadt, Fachbereich 14 – Konstruktiver Ingenieurbau, Institut für Statik und Stahlbau, Dissertation D17 (1973)
8. Hübel, H.: Basic conditions for material and structural ratcheting. Nuclear Engineering and Design **162**, 55–65 (1996)
9. Gilbert, R.R.: Investigations aiming at the integration of the simplified yield zones theory (ZAR-KA's method) in staged elasto-plastic fatigue and shakedown concept for nuclear power plant components subjected to thermo-mechanical loadings. Master-Thesis TU Braunschweig, Institut für Wärme- und Brennstofftechnik (2013)