RESEARCH

Thomas Bardy

# Zur Herstellung von Geltung mathematischen Wissens im Mathematikunterricht

Springer Spektrum

# Zur Herstellung von Geltung mathematischen Wissens im Mathematikunterricht

Thomas Bardy

# Zur Herstellung von Geltung mathematischen Wissens im Mathematik-unterricht

Mit einem Geleitwort von
Prof. Dr. Angelika Bikner-Ahsbahs
und Prof. Dr. Gerald Wittmann

Springer Spektrum

Thomas Bardy
Weil am Rhein, Deutschland

Dissertation Universität Bremen, 2015

ISBN 978-3-658-10258-6 ISBN 978-3-658-10259-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-10259-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum


Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Fachmedien Wiesbaden ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

# Geleitwort

Wie wird Geltung mathematischen Wissens im alltäglichen Mathematikunterricht hergestellt? Das ist die zentrale Frage der vorliegenden Arbeit von Thomas Bardy. Diese Frage ist von großer Bedeutung, weil Lernende im Verlauf von Erarbeitungs- wie Übungsphasen erkennen sollten, welches Wissen nun Geltung für den weiteren Unterricht hat und warum dieses Wissen gelten soll. Nur dann können sie beispielsweise mathematische Konventionen übernehmen oder sich mathematische Kommunikations- und Argumentationsformate aneignen.

Um die Frage nach der Herstellung von Geltung im alltäglichen Mathematikunterricht zu beantworten, klärt Thomas Bardy zunächst die relevanten Begriffe. Hilfreich dabei erweist sich ein Blick in andere Bereiche, unter anderem Rechtsphilosophie oder Sport, und wie dort Geltung und Gültigkeit unterschieden werden. So fallen beim Fußball Tore, die aufgrund einer Schiedsrichterentscheidung gelten, sich später aber als nicht gültig herausstellen, weil der Ball nicht wirklich im Tor gelandet war. Und es gibt Tore, die eigentlich gültig sind, aber dennoch nicht gelten, weil der Schiedsrichter sie in einer Fehlentscheidung verweigert hat. Geltung verlangt also stets einen sozialen Akt der Übereinkunft, während Gültigkeit dann vorliegt, wenn es Normen oder Regeln gibt, die diese Übereinkunft belegen oder begründen können.

Diese Begriffsklärung erlaubt es Thomas Bardy, seine Forschungsfrage auch empirisch anzugehen: Er untersucht, auf welche Weise Lehrkräfte bestimmten Wissenselementen Geltung verleihen. Dazu nutzt er Videodaten zur Einführung des Ableitungsbegriffs von zehnten Gymnasialklassen und ergänzt diese durch Videodaten zum Beweis des Satzes des Pythagoras in Realschulklassen. Durch Nachinterviews mit Lehrkräften können darüber hinaus auch Begründungen für deren Handeln explizit erhoben oder rekonstruiert werden. Über die Analyse dieser Daten gewinnt Thomas Bardy Formen der Herstellung von Geltung, die er zu den Kategorien *konventionell*, *konsensuell* und *argumentativ* zusammenfassen kann. In welcher Häufigkeit diese Formen im Alltagsunterricht auftreten, wird mit einem standardisierten Beobachtungsbogen in insgesamt 162 zufällig herausgegriffenen Schulstunden erfasst. So stellt die Arbeit nicht zuletzt ein gelungenes Beispiel der Verknüpfung qualitativer und quantitativer Methoden dar.

Die Herstellung von Geltung ist so alltäglich, dass man sie bislang wissenschaftlich übersehen hat. Sie nimmt etwa die Hälfte der Unterrichtszeit ein. Dabei herrschen konventionelle Formen der Herstellung von Geltung wie z.B. der Verweis auf

Autoritäten oder das Lehrbuch vor, während argumentative Formen selbst beim Beweisen kaum auftreten. Dieses Ergebnis ist schon sehr verblüffend. Mit den drei schulisch relevanten Wissensformen (Gebrauchswissen, Erfahrungswissen, Begründungswissen) versteht man wiederum, wie das geschehen kann. So werden selbst der Satz des Pythagoras und sein Beweis als Gebrauchswissen und nicht als Begründungswissen vermittelt. Mit anderen Worten: Das Handeln von Lehrkräften zielt in vielen Fällen nicht darauf, den Satz des Pythagoras wirklich zu beweisen, sondern vielmehr darauf, ihn beim Lösen entsprechender Aufgabenstellungen einsetzen zu können. Dies ist insofern problematisch, als Lehrkräften dieser Aspekt häufig nicht bewusst ist und sie demzufolge auch ihre Absicht den Lernenden gegenüber nicht immer transparent machen. Damit zeichnet auch die vorliegende Arbeit ein sehr ernüchterndes Bild davon, wie gemeinsam geltendes Wissen im Unterrichtsalltag konstruiert wird.

Thomas Bardy gelingt es – gleichermaßen theoretisch wie empirisch fundiert – darzustellen, welche Bedeutung die Herstellung von Geltung im Mathematikunterricht besitzt, welche unterschiedlichen Formen der Herstellung von Geltung dort vorkommen und in welcher Häufigkeit sie auftreten. Er gestattet damit einen aufschlussreichen Blick hinter die Fassade des alltäglichen Mathematikunterrichts und liefert einen wichtigen Beitrag, dessen Praxis zu beschreiben und zu verstehen. Es bleibt deshalb zu hoffen, dass die vorliegende Arbeit intensiv rezipiert wird und der mathematikdidaktischen Diskussion entsprechende Impulse geben kann!

Bremen und Freiburg, im März 2015

Angelika Bikner-Ahsbahs und Gerald Wittmann

# Dank

Nachdem mir im Spätsommer 2008 am Fachbereich 3 der Universität Bremen im Bereich Didaktik der Mathematik bei Frau Prof. Dr. Angelika Bikner-Ahsbahs die Möglichkeit eröffnet wurde, ein Promotionsprojekt zu starten, nutzte ich die Gelegenheit und begann, – neben meiner Lehrertätigkeit – im Rahmen einer Abordnung auf eine halbe Stelle als wissenschaftlicher Mitarbeiter zum Thema „Herstellung von Geltung mathematischen Wissens im Mathematikunterricht“ zu forschen.

Neben der wissenschaftlichen Tätigkeit an der Universität hatte ich auf diese Weise auch noch (fast) täglichen Kontakt zur Klientel, die im Mittelpunkt meiner Forschung stand: zu Lehrpersonen sowie zu Schülerinnen und Schülern.

Ich bedanke mich sehr herzlich bei meiner Betreuerin, Frau Prof. Dr. Angelika Bikner-Ahsbahs, für die Motivation, das Promotionsprojekt zu starten, die zahlreichen Hinweise und Ratschläge, das Durcharbeiten erster Manuskripte und die wertvolle Unterstützung in den zurückliegenden Jahren. Hierbei sollen auch die Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Forschungskolloquium im Bereich Didaktik der Mathematik der Universität Bremen mit ihren wichtigen Hinweisen und konstruktiv kritischen Bemerkungen nicht vergessen werden.

Nach einer Fortbildungswoche an der Summer School der Universität Hannover im Sommer 2009 zum Thema „Methodenqualifizierungsprogramm für Doktoranden, qualitative und quantitative Sozialforschung“ begann ich, meine Lebensplanung zu ändern. Dort lernte ich meine jetzige Ehefrau Katrin Bölsterli Bardy kennen.

Nach meinem Umzug im Januar 2011 nach Basel und der Versetzung an das Georg-Büchner-Gymnasium im südbadischen Rheinfelden musste ich meine Mitarbeiterstelle an der Universität Bremen aufgeben und führte von nun an parallel zu einer vollen Deputatsverpflichtung an dieser Schule mein Promotionsprojekt fort. Dabei hat mich neben meiner Betreuerin auch Herr Prof. Dr. Gerald Wittmann von der PH Freiburg im Breisgau unterstützt. Bei den Treffen in Freiburg erhielt ich immer wertvolle Impulse und Perspektiven für mein Projekt. Dafür danke ich Gerald Wittmann sehr herzlich.

Neben dem genannten fachlichen Ansporn motivierte mich auch die tägliche Schreibtischarbeit mit meiner Frau Katrin im gemeinsamen Arbeitszimmer in Basel. Ihr danke ich ganz besonders für ihre Unterstützung (z.B. bei der Literaturbeschaffung) und die wertvollen Hinweise zur Gestaltung meiner Studie sowie zum Layout.

Außerdem danke ich Frau Dr. Helga Jungwirth (München) für ihre Impulse und Ratschläge zum Vorgehen in der interpretativen Unterrichtsforschung zu Beginn meiner Untersuchungen, die ich im Rahmen ihres Seminars an der Universität Bremen (im Sommersemester 2009), aber auch im gemeinsamen Büro an der Universität

Bremen erfahren durfte, sowie Frau Prof. Dr. Christine Pauli (Universität Fribourg), Herrn Prof. Dr. Kurt Reusser (Universität Zürich) und Herrn Prof. Dr. Eckhard Klieme (DIPF Frankfurt a.M.) für die Bereitstellung von Videoaufnahmen und Transkripten zu Unterrichtsreihen zum „Satz des Pythagoras“ aus der schweizerisch-deutschen Videostudie „Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis“.

# Inhaltsverzeichnis

# Abbildungsverzeichnis

# Tabellenverzeichnis

Schulisches Lernen erfordert die subjektive Akzeptanz der Geltung des Gelernten, d.h. die Anerkennung von Gründen. (R. HOFER, 2010, 510)

# 0 Überblick über die Studie

Im Mathematikunterricht geht es u.a. darum, dass Schülerinnen und Schülern durch eine Lehrperson mathematische Inhalte vermittelt werden, die verbindlich sind und im Rahmen von Lernkontrollen abgeprüft werden können. Ziel der „Herstellung von Geltung“ mathematischer Inhalte im Mathematikunterricht ist ein „verbindliches Wissen“ in der Klasse, auf das sich alle Beteiligten immer wieder beziehen und berufen können. Das „gemeinsam geteilte, geltende“ Wissen, welches sowohl verbindlich ist als auch von den Lernenden akzeptiert wird, ist durch das mathematische Wissen der Lehrperson bestimmt sowie durch das Alltagswissen und das mathematische (Vor-) Wissen der Lernenden beeinflusst (siehe Abbildung 1). Andererseits verändert und erweitert das „gemeinsam geteilte, geltende Wissen“ das mathematische Wissen der Lernenden.

Zu beachten ist weiter, dass ein mathematischer Inhalt in einer Klasse „Geltung“ haben kann, ohne dass alle Lernenden ihn verstanden haben. Denn die interpretative Unterrichtsforschung geht von der theoretischen Grundannahme aus, dass die „Bedeutung eines Unterrichtsgegenstandes, einer mathematischen Aufgabe, einer Lehrerfrage usw. [...] nicht einfach objektiv vor[liegt, T. B.], sie wird nicht passiv erfahren, sondern sie wird vom Subjekt innerhalb eines Kontextes konstruiert“ (MAIER & VOIGT, 1991, 9). Dies geschieht, „indem es [das Subjekt, T. B.] deutet, wie andere Subjekte damit umgehen“ (a.a.O., 9).

Durch diesen Vergleich, wie andere Subjekte damit umgehen, kann eine „subjektive Akzeptanz“ (siehe das Zitat von R. HOFER auf dieser Seite) der „Geltung“ des Gelernten durch jeden einzelnen Lernenden entstehen, dies eventuell auch notgedrungen, um z.B. bei Lernkontrollen gut abschneiden zu können.

In dieser Studie[1] wird nicht untersucht, ob „Geltung“ längerfristig oder gar dauerhaft entstanden ist. Hier geht es um den kurzfristigen Akt der „Herstellung von Geltung“ mathematischen Wissens im Unterricht.

Nun stellt sich aber die Frage, welche Möglichkeiten einer Lehrperson konkret zur Verfügung stehen, diese „Geltung“ mathematischen Wissens im Unterricht herzustellen. Aus der Perspektive der Lernenden ergibt sich die Frage, welche Inhalte im

[1] Wenn hier und im Folgenden von „dieser Studie“ oder „der vorliegenden Studie“ gesprochen wird, ist immer die gesamte Arbeit gemeint, nicht nur ihr empirischer Teil.

Mathematikunterricht „geltend“ sind, d.h. welche Inhalte in einer Prüfung abrufbar sein müssen.

Empirische Daten zur Beantwortung dieser beiden Fragestellungen aus Lehrpersonen- bzw. Lernenden-Sicht fehlen bislang. Aus diesem Grund wird in der vorliegenden Studie dieses Desideratum für den Mathematikunterricht geschmälert. Daraus ergibt sich folgende zentrale Fragestellung dieser Studie: Wie erlangt mathematisches Wissen im Unterrichtsgeschehen „Geltung“ bei Schülerinnen und Schülern?

Die Studie behandelt somit das Thema „Herstellung von Geltung mathematischen Wissens im Mathematikunterricht“ und versucht, in seine einzelnen Facetten einzudringen.

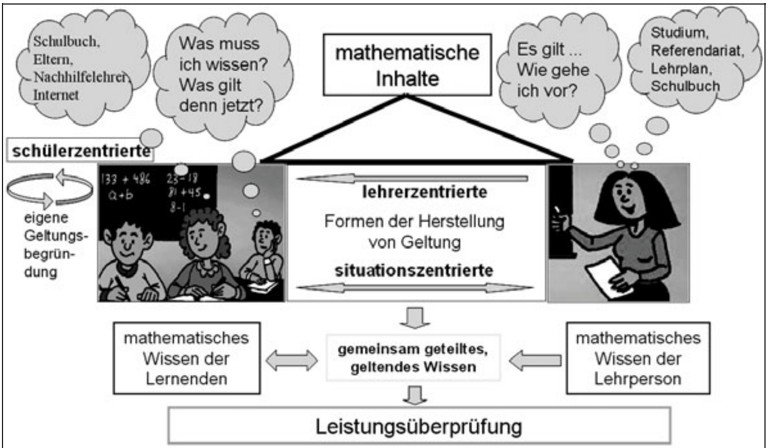


Abbildung 1: Annäherung an die Thematik[2]

Abbildung 1 beinhaltet in ersten Überlegungen, dass es als Antwort auf diese zentrale Fragestellung drei theoretische Möglichkeiten gibt, wie „Modi“ von „Formen“ der Herstellung von Geltung im Mathematikunterricht in grober Differenzierung benannt werden können:

- *Lehrerzentrierte Formen*: die Lehrperson versucht, bei ihren Schülerinnen und Schülern Geltung mathematischer Inhalte zu erzeugen (die Lehrperson nimmt hierbei eine sehr aktive Rolle ein).
- *Situationszentrierte Formen*: die Lehrperson und die Lernenden versuchen gemeinsam, in Interaktionen[3] Geltung mathematischer Inhalte innerhalb der Klassenge-

[2] Die zwei Comic-Bilder sind Ausschnitte eines Bildes; siehe BUNDESZENTRALE FÜR GESUNDHEITLICHE AUFKLÄRUNG (2013).

[3] Unter Interaktion versteht man ein „wechselseitiges, aufeinander bezogenes Verhalten von Personen und Gruppen unter Verwendung gemeinsamer Symbole, wobei eine Ausrichtung an den Erwartungen der Handlungspartner aneinander erfolgt“ (LAMNEK, 2005, 724).

meinschaft herzustellen (die Lehrperson und die Lernenden haben beide eine aktive Rolle). Es kommt somit zu einem „gemeinsamen“ (STREECK, 1979, 249) oder als „geteilt geltenden (mathematischen) Wissen“ (BAUERSFELD, 1982, 2, 32; KRUMMHEUER, 1983, 10; VOIGT, 1984, 212), das dann auch akzeptiert wird, verbindlich ist und damit im Unterricht Geltung hat. So können z.B. Schreibweisen oder Vorgehensweisen bei der Lösungsfindung in einer Klassendiskussion festgelegt werden.

- *Schülerzentrierte Formen*: die Lernenden stellen im Rahmen von Einzel-/Partner- oder Gruppenarbeit ohne aktives Auftreten der Lehrperson Geltung mathematischer Inhalte her (die Lernenden haben hier eine sehr aktive Rolle, wobei die Lehrperson die Organisation der Arbeitsaufträge übernimmt). Im Rahmen dieser Studie werden die schülerzentrierten Formen nicht näher untersucht.

In der vorliegenden Studie wird in *Abschnitt 1.1* der zugrunde gelegte Wissensbegriff herausgearbeitet. Aus einer Vielzahl möglicher Facetten des Wissensbegriffs wird auf den „pädagogischen“ Wissensbegriff nach R. HOFER (2012) näher eingegangen, der als Grundlage dieser Arbeit dient. Insbesondere geht es um einen Wissensbegriff, der im Rahmen von Interaktionen tragfähig ist, da in der Studie die Interaktionen zwischen Lehrperson und Lernenden zentral sind. Als Wissensformen werden Begründungs-, Gebrauchs- und Erfahrungswissen verwendet.
In *Abschnitt 1.2* folgt eine Klärung der Unterscheidung der zentralen Begriffe „Geltung“ und „Gültigkeit“. Aus den Blickwinkeln der Philosophie und der Rechtstheorie werden die Begriffe näher beleuchtet und voneinander abgegrenzt. Auf dieser Grundlage entstehen Definitionen der beiden Begriffe im Hinblick auf ihre mögliche Benutzung in der Mathematik-Didaktik. Damit werden die Bedeutungen der Begriffe „Geltung“ und „Gültigkeit“ sowie der „Herstellung von Geltung“ für die Studie festgelegt.

In *Kapitel 2* geht es um eine Annäherung an den Forschungsgegenstand. Zur Verortung der Studie wird zunächst (*Abschnitt 2.1*) auf die (aktuelle) mathematikdidaktische Forschung und Theoriebildung zu sozialen Interaktionen bzw. Aushandlungsprozessen im Unterricht eingegangen, die die vorliegende Studie tangieren. VOIGT (1984) und andere Akteure der interpretativen Unterrichtsforschung der 1980er und 1990er Jahre verwenden die Konstrukte „gemeinsames Aushandeln von Bedeutungen“ und „gemeinsames Wissen“ oder auch „geteilt geltendes Wissen“. Ihre Studien sind mikro-soziologisch ausgerichtet und untersuchen diese Aushandlungsprozesse und deren interaktionale Muster, etwa Routinen. Sie zeigen damit auf, dass der Mathematikunterricht häufig oberflächlich verläuft. Vor allem VOIGT (1984) analysiert Situationen, in denen kaum inhaltlich tiefgehende Kommunikation[4] stattfindet, sondern viel aneinander vorbeigeredet wird und die Lehrperson Schüleräußerungen „umbiegt", weil sie auf ein Ziel zusteuern will.

Im Rahmen seiner (soziologischen) Theorie pädagogischer Kodes wurden von BERNSTEIN (1996) die so genannten „recognition rules" (Erkennens-Regeln) thematisiert. Bezüglich der Herstellung von Geltung kann die auf das Erkennen von Verbindlichkeit bezogene Erkennens-Regel den Lernenden dazu dienen, geltendes Wissen von nicht geltendem zu unterscheiden und auf diese Weise Leistungsanforderungen zu erkennen.

In *Abschnitt 2.1* werden weitere Ergebnisse aktueller Forschung zu „Unterrichtsgesprächen" im Klassenzimmer mit Bezug auf die vorliegende Studie zusammengetragen sowie Studien zum „Argumentieren", „Begründen" und „Beweisen" bezüglich der Herstellung von Geltung diskutiert.

In *Abschnitt 2.2* wird erörtert, inwieweit das Phänomen der „Herstellung von Geltung" mit den theoretischen Konzepten der „Enkulturation", „Akkulturation" und „Institutionalisierung" abgedeckt werden kann. Dabei erweist sich die „Institutionalisierung" als eine spezielle Art der Herstellung von Geltung.

Bei Betrachtung des Forschungsstands in der Mathematik-Didaktik (vor allem vor dem Hintergrund der Theorie didaktischer Situationen von BROUSSEAU) lassen sich in *Abschnitt 2.3* Desiderata aufzeigen, die mit der vorliegenden Studie geschmälert werden sollen. Das Hauptdesideratum ist die Unkenntnis darüber, wie Lehrpersonen versuchen, Geltung mathematischer Inhalte herzustellen. Dies bezieht sich insbesondere auf die Frage, wie in den Interaktionen des Mathematikunterrichts zwischen Lehrperson und Lernenden konkret deutlich gemacht wird, was die Lernenden wissen sollen.

Die Ziele der Studie und die bearbeiteten Forschungsfragen werden in *Abschnitt 2.4* formuliert. Das *Hauptziel* dieser Studie besteht darin, „Formen" der „Herstellung von Geltung" mathematischer Inhalte empirisch zu identifizieren und aus ihrem Auftreten Schlussfolgerungen für Theorie und Unterrichtspraxis zu ziehen.

In *Abschnitt 2.5* wird die Hintergrundtheorie der Studie – der Sozial-Konstruktivismus – vorgestellt. Dies, weil sich die hier vorgelegten Untersuchungen zur Herstellung von Geltung mathematischen Wissens ausschließlich auf (beobachtbare) Interaktionen und Kommunikationen zwischen Lehrperson und Lernenden im Unterricht beziehen und nicht auf individuelles bzw. selbstständig erworbenes Wissen der

[4] Kommunikation (von lat. communicatio: Mitteilung, Verständigung) ist eine (in der Regel sprachliche) Sozialhandlung, an der mehrere Menschen beteiligt sind. „Unter kommunikativer Kompetenz versteht Habermas [...] die Fähigkeit eines Sprechers/Hörers, die sozialen Rahmenregeln menschlicher Rede zu beherrschen bzw. zu verstehen [...]." (GETHMANN, 2004, 421)

Schülerinnen und Schüler. Die Studie bedarf somit eines theoretischen Ansatzes, der die soziale Interaktion bei der Wissenskonstruktion nicht nur berücksichtigt, sondern in den Mittelpunkt stellt. Genau dies leistet der Sozial-Konstruktivismus.
Die beobachteten und analysierten Unterrichtssequenzen basieren auf einer Unterrichtskultur (hier der jeweiligen Klasse) mit ihren Normen, Werten, Einstellungen, Praktiken, Medien usw. In *Abschnitt 2.6* wird deshalb aufgezeigt, dass die Normen (sowohl „allgemeine Sozialnormen“ als auch „soziomathematische Normen“) und Werte in einer Klassengemeinschaft die individuelle Grundlage für Entscheidungen für oder gegen etwas und somit bedeutsam für die Herstellung von Geltung sind. Sie hängen auch von den Rahmenbedingungen der Schule und des Unterrichts ab.

Wie oben bereits erwähnt, geht es in der vorliegenden Studie vor allem um das Aufdecken von „Formen“ der Herstellung von Geltung im Mathematikunterricht, in gewisser Hinsicht aber auch um eine Weiterentwicklung der Unterrichtsqualität, da durch das Explizitmachen von verschiedenen Möglichkeiten der Herstellung von Geltung einer Lehrperson Alternativen im Hinblick auf ihren Unterricht aufgezeigt werden können. Grundlage ist die interpretative empirische Forschung, die die datenbasierte Konstruktion von Theorien zum Ziel hat. In *Abschnitt 3.1* wird deshalb der Begriff „Theorie“ in Bezug auf die Studie geklärt.
Sowohl die in dieser Studie ansatzweise entwickelten Theoriebausteine zur Herstellung von Geltung mathematischen Wissens als auch die vorgelegten Beiträge für eine Theorie zu Typen von Mathematikstunden im Hinblick auf die Herstellung von Geltung können als Elemente einer sog. „beschreibenden Theorie“ eingestuft werden.
Da in der mathematik-didaktischen Forschung bisher noch kein Ansatz zu einer Theorie der „Herstellung von Geltung mathematischen Wissens“ vorhanden ist, wird mit dieser Studie versucht, dazu beizutragen, eine sog. „Vordergrundtheorie“ zur Herstellung von Geltung mathematischen Wissens zu entwickeln.
In den nächsten Abschnitten des *Kapitels 3* werden methodische Vorgehensweisen bei (hauptsächlich qualitativ orientierten) Forschungsprojekten und ihre methodologischen Grundlagen beschrieben. Die der Studie zugrunde liegende Methodologie der „Grounded Theory“ wird in *Abschnitt 3.2* kurz dargestellt. Der ständige Abgleich der (theoretischen) Annahmen mit den zuvor erhobenen empirischen Daten, die Organisation des Forschungsprozesses (nach dem theoretischen Sampling) sowie das Datensammeln und die Datenanalyse als parallel verlaufender, iterativer Prozess werden aufgezeigt.
Konkret wurden in der Studie Transkripte interpretiert und die Ergebnisse mithilfe von Kodes, die erst aus der Datenanalyse entwickelt wurden, einzelnen Formen der Her-

stellung von Geltung zugeordnet (sog. *offenes Kodieren*). Das offene Kodieren diente dabei der Gewinnung erster grober Formen/Phänomene der Herstellung von Geltung, indem die Daten in möglichst viele Untereinheiten/Episoden zerlegt wurden. Später wurde versucht, Beziehungen oder Unterschiede zwischen den einzelnen Formen der Herstellung von Geltung zu beschreiben, die Formen speziellen Kategorien der Herstellung von Geltung unterzuordnen und bedeutsame Kategorien herauszuarbeiten (sog. *axiales Kodieren*). Im letzten Kodierschritt (dem sog. *selektiven Kodieren*) wurden „Kernkategorien“ (die „konventionellen“, „konsensuellen“ und „argumentativen Arten“ der Herstellung von Geltung) identifiziert, die für die Beantwortung der Forschungsfragen relevanter und ertragreicher sind als die beim axialen Kodieren gewonnenen Kategorien.
Außerdem werden in *Abschnitt 3.2* Gütekriterien für an Grounded Theory orientierte Forschung diskutiert.
*Abschnitt 3.3* klärt allgemein den Ablauf eines Forschungsprozesses bzw. die Untersuchungsschritte, die auch bei der vorliegenden Studie durchgeführt wurden. U.a. werden dabei fünf Phasen (Themensuche, Untersuchungsplanung, Datenerhebung, Datenauswertung, Berichterstattung) eines Forschungsprozesses vorgestellt. Gemäß dem gewählten Design wird die Beschreibung von Forschungsdesigns auf „gemischte Forschungsdesigns“ mit sequenzieller Vorgehensweise fokussiert, wobei die vorliegende Studie zwei qualitative Hauptstudien verbindet.

In *Kapitel 4* wird zunächst ein Gesamtüberblick über das methodische Vorgehen in dieser Studie (*Abschnitt 4.1*) mit Videostudien, Beobachtungsbögen, Lehrerinterviews, Suchen und Entdecken von Prototypen von Unterrichtsstunden im Hinblick auf die Herstellung von Geltung sowie Idealtypenbildung gegeben. Dabei wird auch auf den in Abschnitt 3.3 allgemein dargestellten Forschungsprozess – nun konkret bezogen auf die vorliegende Studie – ausführlich eingegangen. Wichtig ist, dass im Anschluss an die Hauptstudien die qualitativ erhobenen Daten quantitativ ausgewertet und durch zwei Ergänzungsstudien abgesichert wurden. Am Ende des Forschungsprozesses dieser Studie steht eine Idealtypenbildung von Unterrichtsstunden bezüglich der Herstellung von Geltung mathematischen Wissens.
Insgesamt wurden die Daten der Hauptstudien I und II qualitativ (interpretativ, auf Basis der Grounded Theory) und quantitativ (mit Mitteln der beschreibenden Statistik) ausgewertet. Somit liegen in dieser Studie sowohl eine Daten- als auch eine Methodentriangulation vor.
Die Methoden der Datenerhebung und Datenaufbereitung in dieser Studie werden anschließend in *Abschnitt 4.2* ausführlich erläutert. Dabei werden die verschiedenen Videoaufnahmen (zur „Einführung in die Differenzialrechnung“ in Klasse 10 (Gym-

nasium) und zum „Satz des Pythagoras“ in Klasse 9 (Realschule)), die Unterrichtsbeobachtungen mithilfe eines entwickelten Beobachtungsbogens und die Lehrerinterviews im Anschluss an die Videoaufnahmen zur „Einführung in die Differenzialrechnung“ kommentiert.
Die den Videomitschnitten zugrunde liegenden Sachanalysen und fachdidaktischen Analysen zu den videografierten Unterrichtsstunden mit den mathematischen Fachinhalten „Einführung in die Differenzialrechnung“ und „Satz des Pythagoras“ finden sich im *Anhang*. Dabei spielen die in Unterabschnitt 1.1.3 herausgearbeiteten Wissensformen (siehe R. HOFER, 2012) eine wichtige Rolle.
Ebenfalls wird in *Kapitel 4* ausführlich auf die Datenanalyse eingegangen. Dabei werden die Vorgehensweise gemäß der Grounded Theory (*Unterabschnitt 4.3.1*), einzelne spezielle Datenanalysen (*Unterabschnitt 4.3.2*) und die Idealtypenbildung (*Unterabschnitt 4.3.3*) thematisiert.

Die Ergebnisse der Datenanalyse sind Gegenstand von *Kapitel 5*. Hier werden ausführlich die entwickelten „Formen“, „Kategorien“ und „Modi“ der Herstellung von Geltung mathematischen Wissens beschrieben, und es werden die zeitlichen Verteilungen der Formen (bei 28 Unterrichtsstunden), der Kategorien (bei allen 162 Stunden) und der Modi (bei Zusammenfassungen von Stunden) der Herstellung von Geltung dargestellt. Auch wird u.a. der zeitliche Anteil der Herstellung von Geltung für jede der 162 Unterrichtsstunden ermittelt.

*Kapitel 6* beschreibt die Entwicklung von idealtypischen Mathematikstunden im Hinblick auf die Herstellung von Geltung. So wird zunächst die Typenbildung durch Komparation (*Abschnitt 6.1*) dargestellt. Hierzu wurden die aus den Formen der Herstellung von Geltung entwickelten Kategorien der „konventionellen“, „konsensuellen“ oder „argumentativen“ Art der Herstellung von Geltung zugeordnet. Somit lassen sich die analysierten Unterrichtsstunden mit ihren zeitlichen Verteilungen im Hinblick auf die Herstellung von Geltung vergleichen und verschiedene Prototypen herausarbeiten (*Abschnitt 6.2*). Die aus den Prototypen entwickelten Idealtypen von Mathematikstunden werden in *Abschnitt 6.3* vorgestellt. In *Abschnitt 6.4* werden Beziehungen der videografierten 28 Stunden zu den Idealtypen von Mathematikstunden im Hinblick auf die Herstellung von Geltung aufgezeigt, wobei der Unterricht der sechs beobachteten Lehrpersonen in Bezug auf die Idealtypen im Vordergrund steht.

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse der Studie und einen Ausblick auf noch offene Fragen bzw. auf den theoretischen und praktischen Nutzen der Studie findet man in *Kapitel 7*.

# 1 Begriffsklärungen

In *Kapitel 1* werden die zentralen Begriffe der Studie geklärt: in *Abschnitt 1.1* der Wissensbegriff und in *Abschnitt 1.2* der Begriff „Geltung“.

## 1.1 Zum Wissensbegriff

Nach dem Überblick über die Studie wird nun derjenige (pädagogische) Wissensbegriff erläutert, der im Rahmen der Herstellung von Geltung in dieser Studie zugrunde gelegt wird.
Der Wissensbegriff (bzw. die Natur von Wissen) hat zahlreiche Facetten (bzw. Aspekte), u.a.:

- die Geschichte des Wissensbegriffs (siehe z.B. BAUMANN, 1908; VAN DOREN, 1996);
- unterschiedliche Definitionen von „Wissen“ in einzelnen Wissenschaften, z.B. in
  - der Erkenntnistheorie/Philosophie (siehe die auch heutzutage noch andauernde Debatte um den Wissensbegriff in der Erkenntnistheorie; BECKERMANN, 2002; ERNST, 2013),
  - der Psychologie (dort gibt es den eigenständigen Bereich Wissens*psychologie*; BECKENKAMP, 1995; REUSSER, 1998),
  - der Soziologie (eigenständiger Bereich Wissens*soziologie*; GOLDMAN, 1999; KNOBLAUCH, 2010),
  - der Erziehungswissenschaft/Pädagogik/Didaktik (PETERS, 1965; SCHEFFLER, 1971; R. HOFER, 2012),
  - den Neurowissenschaften (REINMANN-ROTHMEIER & MANDL, 2001a),
  - der Künstlichen Intelligenz (OSWALD & GADENNE, 1984);
- Wissensmanagement/Wissenslogistik (SCHMITZ & ZUCKER, 2003 bzw. HARTLIEB, 2002);
- Theorien des Wissens (LEHRER, 2000; ERNST, 2013);
- Unterscheidung zwischen angeborenem und erworbenem Wissen (CHOMSKY, 1965);
- Unterscheidung zwischen apriorischem Wissen und Wissen a posteriori (KANT, 1781);
- Unterscheidung zwischen explizitem und implizitem Wissen (POLANYI, 1966; zum impliziten Wissen NEUWEG, 2004);
- Unterscheidung zwischen informellem und formellem Wissen (MACK, 1990; RESNICK, 1992);

T. Bardy, *Zur Herstellung von Geltung mathematischen Wissens im Mathematikunterricht*,
DOI 10.1007/978-3-658-10259-3_1, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2015

- Unterscheidung zwischen propositionalem[5] und dispositionalem Wissen (WIELAND, 1999);
- Unterscheidung zwischen Begründungs-, Gebrauchs- und Erfahrungswissen (R. HOFER, 2012);
- träges Wissen (RENKL, 1996; GRUBER & RENKL, 2000);
- das Verhältnis von Wissen und Können (R. HOFER, 2012);
- das Verhältnis von Wissen und Expertise (ROTHE & SCHINDLER, 1996; WALDMANN, RENKL & GRUBER, 2003);
- Wissen im Rahmen der Lernzieltaxonomie von BLOOM (1956);
- Wissen als Komponente von Kompetenz (R. HOFER, 2012);
- Wissenserwerb/-vermittlung (STEINDORF, 1985; REUSSER, 1998);
- Wissensrepräsentation (MINSKY, 1975; STRUBE & SCHLIEDER, 1996; OPWIS & LÜER, 1996);
- Wissensgesellschaft / gesellschaftliche Rolle von Wissen (MIEGEL, 2001; UNESCO, 2005);
- Grenzen des Wissens (WILLIAMSON, 2000; SCHLAGETER, 2013);
- Typen mathematischen Wissens (konzeptuelles vs. prozedurales Wissen; HIEBERT, 1986; HAAPASOLO & KADIJEVICH, 2000)

[5] Da der Begriff „propositionales Wissen“ (*Wissen, dass*) auch im Folgenden benutzt wird, erfolgt dazu hier eine nähere Erläuterung. Unter Bezugnahme auf WIELAND (1999) stellt R. HOFER (2012, 202) vier Merkmale bezüglich der formalen Struktur propositionalen Wissens heraus:

1) Die propositionale Struktur von Wissen bezieht sich auf den Oberbegriff der *propositionalen Einstellung*. Somit sind zugehörige erkenntnistheoretische Analysen darauf fokussiert, „die Qualifikationsmerkmale herauszuarbeiten, die es erlauben, Wissen von den anderen propositionalen Einstellungen wie meinen, glauben, vermuten, erwarten usw. sowie vom Irrtum abzugrenzen. Dem blossen Aussageninhalt ‚dass p‘ sieht man ja noch nicht an, ob er ein Wissen darstellt, denn dieser kann auch eine blosse Meinung, Vermutung, Erwartung usw. ausdrücken oder er kann falsch sein, denn die Irrtumsmöglichkeit ist immer gegeben, wenn ein Anspruch auf Wissen erhoben wird.“
2) Propositionales Wissen ist charakterisiert durch seine *Objektivierbarkeit*. Diese erstreckt sich auf „die Beziehung, in welcher der Träger des Wissens zum Wissen steht“. Propositionales Wissen „ist aufgrund der propositionalen (sprachlichen) Form objektivierbar, das heisst, vom Träger des Wissens ablösbar. In der Regel lässt sich bei der Analyse propositionalen Wissens vom Wissenden (Subjekt) abstrahieren, weil propositionales Wissen keine Identifikation des Wissenden mit ihm erfordert. Jedermann kann es analysieren und kontrollieren. Darauf beruhen dessen Mitteilbarkeit und Übertragbarkeit auf andere Personen.“
3) Beim propositionalistischen Modell geht es darum, „etwas über etwas zu wissen“ (WIELAND, 1999, 224). „Propositionales Wissen zielt daher [...] auf einen *Gegenstand*, wobei zwischen Referenz und Bedeutung zu unterscheiden ist: Wissen hat einerseits einen von ihm unterschiedenen Gegenstand (Referenz) und andererseits wird über diesen Gegenstand etwas Bestimmtes gesagt (propositionaler Gehalt).“ (HOFER, 2012, 202, Hervorhebung im Original. Dieser Hinweis entfällt bei allen folgenden Zitaten. Nur wenn bei Zitaten Hervorhebungen durch den Autor dieser Studie vorgenommen werden, sind diese (als solche) kenntlich gemacht.)
4) „Propositionales Wissen steht [...] immer unter der Bedingung der *Wahrheitsdifferenz* (Bivalenz) und hat die Gestalt einer Alternative: Weiss man ‚dass p‘, so ist damit die Negation ‚nicht-p‘ ausgeschlossen. Propositionales Wissen ist ein Wissen, das irrtumsfähig und durch seine Möglichkeit stets gefährdet ist.“ (a.a.O., 202)

- „negatives" Wissen (OSER, HASCHER & SPYCHIGER, 1999; PREDIGER & G. WITTMANN, 2009).

Diese Fülle der Facetten des Wissensbegriffs und der Aspekte der Natur von Wissen soll nicht Gegenstand der vorliegenden Studie sein. Es geht hier vielmehr um schulische Wissensbildung in didaktischer Perspektive (auf der Stufe des Gymnasiums oder vergleichbarer Schulformen) in Verbindung mit der Thematik dieser Studie (Herstellung von Geltung mathematischen Wissens) sowie in diesem Zusammenhang um einen tragfähigen Wissensbegriff und um (insbesondere im Hinblick auf den Mathematikunterricht brauchbare) unterscheidbare Wissensformen.

Dazu ist eine Klärung des Wissensbegriffs notwendig, die terminologisch und inhaltlich die Thematisierung der Herstellung von Geltung mathematischen Wissens ermöglicht. Die im Bereich des Langzeitwissens in der Psychologie übliche Unterscheidung von deklarativem[6] und prozeduralem[7] Wissen kann durchaus ein Schlüssel zum Verständnis von Lernprozessen und -schwierigkeiten sein (siehe z.B. MOORMANN, 2009). Für das Verstehen, die Planung, Gestaltung und Evaluation der Prozesse der Herstellung von Geltung mathematischen Wissens im Mathematikunterricht ist sie jedoch kaum geeignet. Denn Herstellung von Geltung mathematischen Wissens besitzt eine gewisse „pädagogische Art", die durch R. HOFERS analytische Trennung in „pädagogische" Wissensformen (*Begründungswissen*, *Gebrauchswissen* und *Erfahrungswissen*) besser als mit den in der Psychologie benutzten Wissensformen erfasst wird. Die beobachtbaren Formen der Herstellung von Geltung stehen in Beziehung zu mathematischen Inhalten, bei denen die Lernenden eine Aussage begründen, ein Verfahren anwenden oder einen ihnen schon bekannten Inhalt aus ihrer Erfahrung heraus nutzen. Die teleologische Unterscheidung schulischen Wissens durch R. HOFER ist mit Formen der Vermittlung und somit auch mit Formen der Herstellung von Geltung verknüpft. Deshalb ist diese Unterscheidung für die Zwecke der vorliegenden Studie gut geeignet.

In Unterabschnitt 1.1.1 werden der „schwache" und der „starke Wissensbegriff" nach R. HOFER (2012) thematisiert, Unterabschnitt 1.1.2 beschäftigt sich mit mathematischem (Schul-)Wissen. In Unterabschnitt 1.1.3 werden die drei Wissensformen „Begründungswissen", „Gebrauchswissen" und „Erfahrungswissen" beschrieben.

[6] bezieht sich auf das Wissen über Sachverhalte, wie z.B. Fakten und Begriffe; zum Problem der Abgrenzung des konzeptuellen Wissens vom deklarativen Wissen siehe MOORMANN (2009, 31ff.)
[7] Wissen über Handlungsabläufe

### 1.1.1 Der schwache und der starke Wissensbegriff nach R. HOFER

> Die logisch-erkenntnistheoretische Standardanalyse erklärt Wissen nicht anhand einer Beschreibung von Beispielen (Fällen), sondern über eine reduktive Definition, das heisst dadurch, dass ein komplexer Begriff durch die Angabe einfacherer, fundamentalerer Begriffe erklärt wird. Konkret sucht man die notwendigen und gemeinsam hinreichenden Bedingungen zwecks Abgrenzung des Begriffs von anderen. Der Anspruch ‚logisch' meint hier, dass wir *alle denkbaren Fälle*, nicht nur die faktischen (wirklichen) erfassen wollen. Wir analysieren ja den Inhalt eines Begriffs, dabei ist nicht das Faktische massgebend, sondern das Denkbare, weil die Begriffe und Gedanken über den Bereich des Wirklichen hinausgehen. (R. HOFER, 2012, 103)

R. HOFER (a.a.O., 348ff.) unterscheidet zwei Niveaus des Wissensbegriffs:

- Niveau I (den *schwachen* Wissensbegriff); Wissen wird als „wahre Überzeugung" definiert (siehe a.a.O., 92):
  Die Person X weiß, dass p[8], genau dann, wenn
  (1) X die Überzeugung hat, dass p, und
  (2) p wahr ist.
- Niveau II (den *starken* Wissensbegriff); Wissen wird als „gerechtfertigte wahre Überzeugung" definiert (nach der logisch-erkenntnistheoretischen Standardanalyse, siehe a.a.O., 93):
  Die Person X weiß, dass p, genau dann, wenn
  (1) X die Überzeugung hat, dass p,
  (2) p wahr ist und
  (3) X berechtigte Gründe hat, die Überzeugung zu haben, dass p.
  (Die mit dieser letzten Definition verbundenen erkenntnistheoretischen Probleme können hier nicht diskutiert werden. Es sei lediglich auf Wittgensteins Erörterung von Moores Paradox[9] und das sog. Gettier-Problem[10] hingewiesen.)

Beim schwachen Wissensbegriff geht es um das *Verstehen* fachlichen Wissens und nicht um dessen exaktes Begründen. Bei diesem Begriff wird darauf verzichtet, „dass

[8] p steht dabei für eine Aussage bzw. (genauer) für die Intension (den Inhalt) einer Aussage. „Wissen ist [...] erstens immer *personengebunden*, weil es jemanden braucht, der dieses Wissen hat." (R. HOFER, 2012, 102) „Zweitens hat Wissen einen *Inhalt*, das heisst, Wissen ist immer Wissen, *dass* etwas sich so verhält. Es besteht in einer *Proposition*. Die Erkenntnistheorie beschäftigt sich ausschliesslich mit dieser propositionalen Gestalt des Wissens, wobei sie in der Regel von der konkreten Person abstrahiert (objektivistischer Standpunkt), so dass die Standardform von Wissen lautet: S weiss, dass p." (a.a.O., 102)

[9] Moore versucht eine psychologische Erklärung für die Widersprüchlichkeit des folgenden Satzes: Es regnet, aber ich glaube es nicht. WITTGENSTEIN (1984) sieht in diesem Satz ein logisches Problem.

[10] GETTIER (1963) hat Situationen konstruiert, in denen gerechtfertigte wahre Überzeugungen vorliegen, allerdings kein Wissen.

die Lernenden beispielsweise Begründungen geben können, aber die korrekte Beherrschung der Begriffe des entsprechenden fachlichen Wissens ist unabdingbar“ (a.a.O., 348).

> Gefragt ist die *Fähigkeit* der Lernenden, Überzeugungen sprachlich-begrifflich korrekt auszudrücken. [...] Die basale *methodische* Leistung der Lernenden besteht auf diesem Anspruchsniveau darin, die begrifflichen Gebrauchsweisen der fachlichen Praktiken zu *verstehen und zu rekonstruieren*. Mit der methodischen Aktivität des Verstehens habe ich eine minimale, notwendige Form der methodisch-personalen Komponente im Blick, die in jeder Form der Wissensbildung erforderlich ist. [...] Im traditionellen schulischen Unterricht macht diese Form der Wissensbildung wohl den grössten Anteil aus. (a.a.O., 348f.)

Die Ergebnisse der Datenanalyse in Kapitel 5 lassen vermuten, dass im Mathematikunterricht nicht selten eine Beschränkung auf Wissen im Sinne des schwachen Wissensbegriffs erfolgt.

„Beim starken Wissensbegriff [...] handelt es sich um eine anspruchsvollere Form der Wissensbildung, die logisch gesehen *keine* notwendige Bedingung der schulischen Wissensvermittlung darstellt, also auf eine entsprechende *pädagogische Zielsetzung* verweist.“ (a.a.O., 349) R. HOFER bezeichnet diese pädagogische Zielsetzung als „Prinzip der Haftbarkeit“. Damit will er ausdrücken,

> dass die Lernenden unter einer gewissen Ausweisverpflichtung stehen: Sie sollen sich zum Gelernten in ein Verhältnis setzen, indem sie dessen Anspruch als Wissen für sich und andere ausweisen lernen, damit sie das Gelernte nicht nur glauben, sondern auch im anspruchsvollen Sinne wissen. Das Ziel ist auf diesem zweiten Anspruchsniveau eine den Fähigkeiten und Möglichkeiten der Lernenden angepasste *Kultur der Rechenschaftslegung*, welche auf eine Sensibilisierung für die Verantwortlichkeit gegenüber dem, was man *als Wissen* annimmt, hinarbeitet. Damit kann das Lehren und Lernen fachlichen Wissens im schulischen Kontext zugleich eine Hinführung zur entsprechenden Fachkultur und deren normativem Selbstverständnis leisten. Indem sich die Lernenden in ein Verhältnis zum Gelernten setzen, reflektieren sie ihr eigenes Tun, machen es sich bewusst und damit ein Stück weit auch veränderbar. Damit ist zugleich eine Form der *Selbständigkeit* involviert, wobei ich insbesondere die Weise meine, wie sich Lernende dem Wissen gegenüber positionieren, wie sie ihm gegenüber *selber stehen* lernen. Sofern es in der Schule um die Vermittlung *fachlichen* Wissens geht, scheint mir diese pädagogische Zielsetzung grundlegend zu sein. (a.a.O., 349)

Dieser Auffassung von R. HOFER stimme ich voll zu, da aus den Ergebnissen der Datenanalyse (siehe auch oben) geschlossen werden kann, dass Wissen im Sinne des starken Wissensbegriffs im Mathematikunterricht eher gering gefördert und abgerufen wird. Die Etablierung eines größeren Umfangs starken Wissens als bisher schätze ich als eine Entwicklungsaufgabe für den Mathematikunterricht an Gymnasien (oder vergleichbaren Schulformen) ein.

> Eine wahre Überzeugung ist nur dann als Wissen im anspruchsvollen Sinne anerkannt, wenn sie durch *Gründe* gestützt wird. Es gibt bessere und schlechtere Gründe, was Standards und Kriterien erfordert, die in der entsprechenden fachlichen Domäne angeben, was als guter Grund zählt. (a.a.O., 399)

In der beweisenden Disziplin Mathematik ist ein „guter Grund" ein Beweis.

Beurteilen und Begründen konstruieren *Begründungswissen* (von R. HOFER auch „rationales Wissen" genannt). „Wenn die methodischen Aktivitäten an pragmatischen Bedingungen ausgerichtet werden, dient die Wissensbildung einem anderen Zweck, nicht der Begründung, sondern der Nutzung fremder Überzeugungen, die man weder selbst entwickeln noch selber prüfen kann." (a.a.O., 399) Da die „Nutzung fremder Überzeugungen" sich gut oder schlecht gestalten kann, sollte nach R. HOFER eine von anderen übernommene wahre Überzeugung lediglich dann als *Gebrauchswissen* (oder als „pragmatisches Wissen") anerkannt werden, „wenn bestimmte praktische Bedingungen[11] erfüllt sind" (a.a.O., 399). *Erfahrungswissen* (oder „authentisches Wissen") erfährt seinen Aufbau durch „die eigenständige, intensive und wiederholte Untersuchung von Fragen, welche wiederum aufgrund von Bedingungen und Kriterien in ihrer Qualität beurteilt werden kann" (a.a.O., 399).

Die Begriffe Begründungs-, Gebrauchs- und Erfahrungswissen sind im Hinblick auf eine Mathematikerin / einen Mathematiker nicht so zu verwenden wie bei Lernenden im Unterricht. So dürfte Gebrauchswissen in der Community der Mathematikerinnen und Mathematiker häufig ebenso Begründungswissen sein. Auch kann Erfahrungswissen gleichzeitig Begründungswissen sein. Hier sind diese Begriffe somit nicht so klar zu trennen wie im Schulunterricht, auf den sich R. HOFERs Analysen beziehen.

Die von R. HOFER vorgeschlagene Differenzierung von Wissen nach Begründungswissen, Gebrauchswissen und Erfahrungswissen ist z.B. im Hinblick auf das Planen

[11] Diese sind nach R. HOFER (2012, 400) Zugänglichkeit, Erkennbarkeit, Zweckdienlichkeit und Verständlichkeit.