BestMasters

Carsten Kleppel

Von der Dirac-Gleichung zur Quantenelektrodynamik

Eine verständliche Einführung für Studierende der theoretischen Physik

Springer Spektrum

BestMasters

Mit „BestMasters“ zeichnet Springer die besten Masterarbeiten aus, die an renommierten Hochschulen in Deutschland, Österreich und der Schweiz entstanden sind. Die mit Höchstnote ausgezeichneten Arbeiten wurden durch Gutachter zur Veröffentlichung empfohlen und behandeln aktuelle Themen aus unterschiedlichen Fachgebieten der Naturwissenschaften, Psychologie, Technik und Wirtschaftswissenschaften.
Die Reihe wendet sich an Praktiker und Wissenschaftler gleichermaßen und soll insbesondere auch Nachwuchswissenschaftlern Orientierung geben.

Carsten Kleppel

Von der Dirac-Gleichung zur Quantenelektrodynamik

Eine verständliche Einführung für Studierende der theoretischen Physik

Springer Spektrum

Carsten Kleppel
Mainz, Deutschland

BestMasters
ISBN 978-3-658-09482-9 ISBN 978-3-658-09483-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-09483-6

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Fachmedien Wiesbaden ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

Theories of the known, which are described by different physical ideas may be equivalent in all their predictions and are hence scientifically indistinguishable. However, they are not psychologically identical when trying to move from that base into the unknown. For different views suggest different kinds of modifications which might be made and hence are not equivalent in the hypotheses one generates from them in ones attempt to understand what is not yet understood.

- Richard P. Feynman 1966 in seiner Nobelpreisrede

Danksagung

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Stefan Scherer, denn ich verdanke ihm nicht nur eine interessante Themenstellung. Vielmehr hat er diese Arbeit mit seiner außerordentlichen Geduld und seiner großartigen Betreuung erst ermöglicht hat.

Außerdem danke ich meiner Freundin Stephanie dafür, dass sie mich mit unerschöpflicher Ausdauer und erstaunlichem Gleichmut über die gesamte Zeit hinweg unterstützt, aufgefangen, motiviert, ge- und ertragen hat.

Zu guter Letzt danke ich meinen Eltern, die mich bei jedem Schritt auf meinem bisherigen Weg unterstützt und gefördert haben und ohne deren Hilfe mein Studium nicht möglich gewesen wäre.

Carsten Kleppel

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit soll es sein, eine verständliche und leicht nachvollziehbare Diskussion der Dirac-Gleichung zu liefern, die zugleich einen Zugang zur Quantenelektrodynamik bietet. Der zeitlich begrenzte Rahmen, der diesem Vorhaben gesteckt ist, und die gleichzeitige Fülle verschiedener Themen, die dabei mit eingebunden werden könnten, nötigen zu gewissen Einschränkungen:

Diese Arbeit kann nur einen kleinen Einblick in die Materie geben und bewegt sich dabei in einem Spannungsfeld zwischen Breite und Tiefe der Darstellung. Wo eine ausführlichere Beschreibung verwehrt bleibt, wird allerdings auf die zahlreich vorhandene Literatur verwiesen.

Obwohl ein modernes Verständnis der Theorie im Fokus steht, soll die spannende Entwicklungsgeschichte der Quantenelektrodynamik nicht ganz außer Acht gelassen werden. Aus diesem Grund wird versucht, an sinnvoll erscheinenden Stellen durch Rekurs auf Originalquellen die Auseinandersetzung mit denselben anzuregen und eine Brücke zwischen der historischen Genese und einem moderneren Verständnis zu schlagen, ohne dabei in einer historistischen Sichtweise zu verharren.

Eine andere Besonderheit dieser Arbeit ist der bewusste Verzicht auf natürliche Einheiten. Die dadurch – wenn überhaupt – nur geringfügig unübersichtlicheren Formeln werden, nach Meinung des Autors, durch die leichtere Zugänglichkeit für weniger erfahrene Studierende gerechtfertigt. Dies steht im Zusammenhang mit dem grundsätzlichen Ziel, die Inhalte kompakt und gleichzeitig so leicht verständlich darzulegen, dass diese Arbeit beispielsweise als einführende Handreichung für Studierende geeignet wäre und zudem durch Randnotizen und Verweise eine Gelegenheit zur intensiveren Beschäftigung mit dem Thema böte.

C. Kleppel, *Von der Dirac-Gleichung zur Quantenelektrodynamik,* BestMasters,
DOI 10.1007/978-3-658-09483-6_1, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2015

1.1 Historischer Überblick

Einige bahnbrechende Theorien und experimentelle Befunde in der Physik der 1920er und 1930er Jahre haben eine Entwicklung angestoßen, die das heutige physikalische Weltbild nachhaltig geprägt hat. Im Laufe der Jahrzehnte hat sich daraus mit der Quantenelektrodynamik eines der am genauesten experimentell reproduzierten Theoriegebäude entwickelt. Um die Erwartungen des Lesers nicht zu enttäuschen, sei diesem Abschnitt daher vorweggeschickt, dass es hier nicht primär um die wissenschaftsgeschichtlich akkurate Aufschlüsselung und detailgetreue Aufarbeitung der bahnbrechenden Gedankengänge gehen soll. Einerseits würde ein solches Vorhaben den Umfang dieser Arbeit sprengen, andererseits sind die Wege des wissenschaftlichen Fortschritts zuweilen sehr verschlungen. Deshalb schlösse eine historistische Darstellung manche Umwege und Altlasten mit ein. Um die Übersichtlichkeit zu wahren, werden stattdessen eine gebräuchlichere Notation benutzt und an einigen Stellen Gedankengänge verkürzt.

Die nun folgenden Ausführungen zielen darauf ab, einige wichtige Stationen auf dem Weg zur Entwicklung der Quantenelektrodynamik zu benennen und dabei anhand einzelner Beispiele die Dynamik der damaligen Diskussion aufzuzeigen. Bei der Auswahl dieser Stationen wird größeres Gewicht auf diejenigen Punkte gelegt, die primär mit der Dirac-Gleichung zusammenhängen.

Der Startpunkt dieses historischen Überblicks könnte variabel gesetzt werden, etwa bei der Quantenhypothese des Lichts, durch die Planck [vgl. 1901, S. 561] das Spektrum des Schwarzkörperstrahlers zu erklären versuchte und auf die Einstein [1905] in seiner Deutung des äußeren photoelektrischen Effekts und anderer experimenteller Befunde aufbauend argumentierte, wieso Licht gequantelt aufzutreten scheint. Einen nicht minder geeigneten Ausgangspunkt könnte jedoch auch die Entdeckung des Elektrons als Elementarteilchen darstellen, die sich seit der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts langsam aus den Hypothesen und Experimenten vieler Physiker bis hin zu Thomson [1897] herauskristallisierte. Im Detail wird dies etwa bei Arabatzis [2006, Kap. 4] dargestellt. Die von de Broglie [1925] begründete Theorie der Materiewellen und der experimentelle Nachweis der Wellennatur des Elektrons durch Davisson u. Germer [1927] führten mit dem Welle-Teilchen-Dualismus zu einer bedeutenden und fruchtbaren naturphilosophischen Diskussion. Man könnte aber auch atomistische Denkgeschichten ab den Vorsokratikern umreißen, wie dies bei Zeh [2014] in knapper Form geschieht.

Diese Wegmarken sind in ihrer Bedeutung für die Physik kaum zu unterschätzen, können in diesem Rahmen aber nicht weiter im Detail beleuchtet werden. Stattdessen soll es zunächst um Erwin Schrödinger gehen, der de Broglie folgend die Wellennatur als grundlegend annahm und in einer Reihe wegweisender Publikationen[1)] unter anderem die nach ihm benannte nichtrelativistische Wellengleichung veröffentlichte [vgl. Schrödinger, 1926a, S. 362]. In ihrer freien Form lautet sie

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi. \;^{2)} \tag{1.1}$$

Dirac [vgl. 1971, S. 37f.] zufolge hat er diese allerdings erst als nichtrelativistischen Grenzfall einer anderen, relativistischen Gleichung erhalten, die er zunächst nicht publizieren wollte, weil sie nicht die korrekte Feinstrukturaufspaltung des Wasserstoffspektrums lieferte. Erst in der vierten Publikation aus der oben genannten Reihe schlug Schrödinger [vgl. 1926d, S. 133] auch seine relativistische Wellengleichung vor, die zu diesem Zeitpunkt jedoch bereits unabhängig von Klein [vgl. 1926, S. 409], Gordon [vgl. 1926, S. 119] und anderen veröffentlicht worden war. Sie lautet als freie Gleichung

$$\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Psi = 0 \;^{3)} \tag{1.2}$$

und ist wegen Schrödingers Zögern unter dem Namen Klein-Gordon-Gleichung in die Physikgeschichte eingegangen. Diese Gleichung und ih-

1) Siehe Schrödinger [1926a,b,c,d].

2) Eine Herleitung von Gleichung (1.1) findet sich im Anhang auf Seite 129.

3) Eine Herleitung von Gleichung (1.2) ist im Anhang auf Seite 130 einzusehen. $\Box = \partial_\mu\partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta := \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ wird als d'Alembertoperator bezeichnet und Δ ist der Laplaceoperator. $(\partial^\mu) := \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ ist der kontravariante Vierergradient. Auf Kosten der Uniformität werden im Folgenden jeweils diejenigen Ausdrücke verwendet, die einem Nachvollzug der Rechnungen und zugleich deren Übersichtlichkeit am ehesten zuträglich erscheinen.

re Makel bildeten den Anlass für Dirac nach einer alternativen Gleichung zu suchen. Seine Arbeiten stießen die Entwicklung der Quantenelektrodynamik an, prophezeiten die Existenz von Antiteilchen und bildeten auch sonst den Ausgangspunkt der meisten bedeutenden Entwicklungen der Quantenfeldtheorie der 1930er und 40er Jahre [vgl. Schweber, 1994, S. 12]. Speziell Diracs Löchertheorie, mit der dieser negative Energien von Elektronen zu erklären versuchte, stieß dabei auf Gegenwehr. Statt der Löchertheorie setzte sich auf lange Sicht die Überzeugung Pascual Jordans durch, dass Teilchen als Resultat quantisierter Materiewellen anzusehen seien. Jordan u. Wigner [1928] schlugen ein Quantisierungsverfahren von Materiewellen vor, deren Quanten anschließend der Fermi-Dirac-Statistik gehorchten [vgl. Schweber, 1994, S. 34-38]. Diese und einige von Jordans eigenen Arbeiten bilden zusammen mit Heisenberg u. Pauli [1929, 1930] die Grundlage der Quantenfeldtheorie, welche den Dirac-See schließlich überflüssig machte [vgl. Schweber, 1994, S. 34-37, 76f.]. Der konzeptuelle Unterschied zwischen Diracs und Jordans Ansichten über die Natur der Elektronen wird zu Beginn von Kapitel 4 erneut aufgegriffen.

In ihrem weiteren Verlauf war die Quantenelektrodynamik vor eine Reihe von Problemen gestellt, die aus Korrekturtermen höherer Ordnung resultierten. Diese Probleme konnten letzten Endes erst durch die Arbeiten der Nobelpreisträger Tomonaga [1943][4)], Schwinger [1948a,b, 1949] und Feynman [1949a,b] gelöst werden. Tomonaga und Schwinger formulierten unabhängig voneinander die bisherige Quantenfeldtheorie in einer Art um, die es erlaubt, die Divergenzen als unbeobachtbare Zusatzbeiträge der Masse und Ladung zu identifizieren und sie im Zuge einer Renormierung außer Acht zu lassen. Feynman hingegen löste diese Probleme, indem er eine kurzzeitige Variation der Gesetze der Quantenelektrodynamik erlaubte [vgl. Schweber, 1994, S. 434f.]. Schließlich konnte Dyson [1949] die Äquivalenz der Ansätze beweisen.

1.2 Aufbau dieser Arbeit

Die historische Einführung dient nicht nur der Verortung des Themas in der Wissenschaftsgeschichte, sondern sie soll auch eine inhaltliche Basis

4) Für die englische Übersetzung des japanischen Originals siehe Tomonaga [1946].

darstellen, die im Folgenden vertieft und konkretisiert wird. Das Vorgehen orientiert sich dabei allerdings weniger an der Chronologie als an den inhaltlichen Zusammenhängen. Das ausdrückliche Ziel ist dabei eine ausführliche und verständliche Diskussion der Dirac-Gleichung, die anschließend als Ausgangspunkt für ein Verständnis der Quantenelektrodynamik genutzt wird.

In Kapitel 2 wird daher die Dirac-Gleichung zunächst motiviert und ihre Eigenschaften hergeleitet, bevor ihre Lösungen gefunden und interpretiert werden. Der historischen Motivation folgend, beschränkt sich diese Arbeit dabei vor allem auf Elektronen und deren Antiteilchen, obwohl die Dirac-Gleichung als relativistische Wellengleichung für Fermionen selbstverständlich viele weitere Teilchen beschreibt, wie etwa Neutrinos. Deren, zumindest nach dem Standardmodell, verschwindende Masse[5)] würde an manchen Stellen jedoch eine besondere Betrachtungsweise erfordern, auf die in dieser Arbeit verzichtet werden soll.

Die Quantenelektrodynamik beschreibt die Wechselwirkung elektrisch geladener Teilchen miteinander und mit Licht, sodass die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes in Kapitel 3 einen wichtigen Zwischenschritt bildet, bevor in Kapitel 4 das Feld der Dirac-Gleichung kanonisch quantisiert wird.

Die Ankopplung des elektromagnetischen Feldes erfolgt in Kapitel 5, womit die Grundlagen der Quantenelektrodynamik gelegt sind. Kapitel 5 ist außerdem der Streutheorie gewidmet und bietet einen Einblick in die QED nach Feynman und in die nach ihm benannten Diagramme. Seine herausragenden Regeln, wie man mit Hilfe dieser Diagramme die Übergangsamplituden bei Streuprozessen beschreiben kann, werden mit Hilfe der Dyson-Entwicklung und des Wick-Theorems am Beispiel der Compton-Streuung erschlossen und bilden den Abschluss dieser Arbeit.

[5)] Ob Neutrinos tatsächlich masselos sind oder nur eine extrem kleine Masse haben, ist Teil aktueller Forschung. Die Beobachtung von Neutrinooszillationen ist ein Indiz dagegen [vgl. King u. a., 2014, S. 3f.], zumal eine endliche Neutrinomasse keine fundamentale Symmetrie des Standardmodells brechen würde, sondern lediglich eine, die eher „zufällig“ zu sein scheint [vgl. Xing u. Zhou, 2011, S. 61f.].

2 Die Dirac-Gleichung

Um Diracs Verdienst und die Bedeutung der nach ihm benannten Gleichung verstehen zu können, ist es zunächst notwendig, die Ausgangssituation und die zugehörigen Problemstellungen näher zu beleuchten. Aus diesem Grund widmet sich der erste Abschnitt der Klein-Gordon-Gleichung, deren Probleme bei der Beschreibung des Elektrons Dirac überhaupt erst veranlasst haben, nach einer eigenen Theorie zu suchen.

Im zweiten Abschnitt werden die wichtigsten Eigenschaften der freien Dirac-Gleichung diskutiert. Dabei bilden Diracs Anforderungen an eine neue Theorie den Ausgangspunkt für die Herleitung der nach ihm benannten Gleichung in ihrer Schrödinger'schen Form. Als zweites, mindestens ebenso wichtiges Gesicht der Dirac-Gleichung wird ihre kovariante Form aufgestellt und die in beiden Schreibweisen auftretenden Matrizen werden in der Standard- beziehungsweise Dirac-Darstellung explizit ausgeschrieben. Im Anschluss werden mit der Lorentz-Kovarianz, ihrer mit der nichtrelativistischen Quantenmechanik konsistenten Wahrscheinlichkeitsinterpretation und der Beschreibung von Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ drei ihrer wichtigsten Eigenschaften nachgewiesen beziehungsweise näher erläutert.

Der dritte Abschnitt widmet sich schließlich der Lösung der freien Dirac-Gleichung mit dem Ansatz ebener Wellen. Ihre Lösungen werden dabei nach dem Vorzeichen der Energie, ihrem Impuls und ihrem Spin charakterisiert, bevor ihre Orthonormalität und Vollständigkeit nachgewiesen wird.

Im vierten Abschnitt wird der nichtrelativistische Grenzfall der Dirac-Gleichung behandelt. Zu diesem Zweck findet über die sogenannte minimale Substitution zunächst der Übergang von einer feldfreien Theorie hin zur Dirac-Gleichung für ein Teilchen in einem elektromagnetischen Feld statt.

Weil sich, wie in diesem Kapitel noch gezeigt wird, die Lösungen mit negativer Energie nicht wegdiskutieren lassen, bedürfen sie einer Interpretation. Derer werden im fünften Abschnitt zwei präsentiert: Zum

C. Kleppel, *Von der Dirac-Gleichung zur Quantenelektrodynamik,* BestMasters,
DOI 10.1007/978-3-658-09483-6_2, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2015

einen Diracs geniale, aber mittlerweile überholte Löchertheorie, welche die Existenz von fermionischen Antiteilchen vorhersagte, bevor diese experimentell gezeigt wurde. Zum anderen die Interpretation von Stückelberg und Feynman, die das Problem negativer Energien dadurch umgeht, dass sie Antiteilchen als rückwärts durch die Zeit reisende Teilchen identifiziert. Zunächst wird jedoch mit der Ladungskonjugation eine mathematische Operation vorgestellt, die den Übergang zwischen Lösungen positiver und negativer Energie liefert.

2.1 Die Klein-Gordon-Gleichung

Auf der Suche nach der relativistischen Bewegungsgleichung des freien Elektrons glaubten sich die meisten Physiker Mitte der 1920er Jahre mit der sogenannten Klein-Gordon-Gleichung bereits am Ziel. Schweber [vgl. 1994, S. 58] schildert eindrucksvoll eine Begegnung zwischen Dirac und Bohr, bei der letzterer sein Unverständnis äußert, wieso Dirac sich eines bereits gelösten Problems annehmen wolle. Die „Lösung“ für das Problem einer relativistischen Quantentheorie des Elektrons bestand für Bohr in der Klein-Gordon-Gleichung:

$$\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Psi = 0. \tag{2.1a}$$

Die komplex konjugierte Klein-Gordon-Gleichung lautet

$$\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Psi^* = 0. \tag{2.1b}$$

An dieser Stelle geht es nun um die ‚Unstimmigkeiten‘, welche die Klein-Gordon-Gleichung bei dem Versuch offenbart, sie auf das Elektron anzuwenden. Diese veranlassten Dirac schließlich dazu, die später nach ihm benannte Gleichung aufzustellen und sie bieten daher auch den Schlüssel, die Form der Dirac-Gleichung zu verstehen. Zunächst aber zur Lösung der Klein-Gordon-Gleichung.[1)]

[1)] Der Autor orientiert sich an der Vorgehensweise in der Vorlesung von Fiedler u. Scherer [vgl. 2013, Kap. D.4.2].

Da es sich um eine homogene partielle Differenzialgleichung handelt, bietet sich die Separation der Variablen mit Produktansatz an. Die Lösungen haben demnach die Form

$$\Psi(t, \vec{x}) = \phi(t)\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3), \tag{2.2}$$

mit noch zu bestimmenden Faktoren $\phi(t)$ und $\psi_j(x_j)$, die jeweils nicht von den Argumenten der anderen Faktoren abhängen. Setzt man den Ansatz (2.2) in Gleichung (2.1a) ein und teilt anschließend durch Ψ, dann erhält man

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\phi}}{\phi}(t) - \frac{\psi_1''}{\psi_1}(x_1) - \frac{\psi_2''}{\psi_2}(x_2) - \frac{\psi_3''}{\psi_3}(x_3) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\phi}}{\phi}(t) = +\frac{\psi_1''}{\psi_1}(x_1) + \frac{\psi_2''}{\psi_2}(x_2) + \frac{\psi_3''}{\psi_3}(x_3) - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Weil der Quotient $\frac{\ddot{\phi}}{\phi}(t)$ allerdings höchstens von t und nicht von $\vec{x}$ abhängt, die rechte Seite der Gleichung aber unabhängig von t ist, muss er konstant sein. Analoges gilt auch für die übrigen Quotienten. Genauer gesagt müssen sogar alle Konstanten negativ sein, damit die gesuchte Lösung Ψ im Unendlichen nicht divergiert. Man kann also reelle $k_0, ..., k_3$ definieren, sodass

$$\frac{\ddot{\phi}}{\phi} =: -c^2k_0^2, \qquad \frac{\psi_1''}{\psi_1} =: -k_1^2, \qquad \frac{\psi_2''}{\psi_2} =: -k_2^2, \qquad \frac{\psi_3''}{\psi_3} =: -k_3^2. \tag{2.4}$$

Einsetzen von (2.4) in (2.3) und die anschließenden Identifikationen

$$k := \left(\frac{\omega(\vec{k})}{c}, \vec{k}\right) \qquad \text{und} \qquad E = \hbar\omega(\vec{k})$$

ergeben die Dispersionsrelation, die zugleich die relativistische Energie-Impulsbeziehung eines Teilchens der Masse m wiedergibt:

$$\begin{aligned} &k_0^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ &E = \hbar\omega(\vec{k}) = \pm\sqrt{(c\hbar\vec{k})^2 + m^2c^4}. \end{aligned} \tag{2.5}$$