DIE GROSSEN FRAGEN

Mathematik

Tony Crilly

Spektrum AKADEMISCHER VERLAG
Sachbuch

Reihenherausgeber Simon Blackburn

Die großen Fragen
Mathematik

Tony Crilly ist emeritierter Professor (Reader) für Mathematik an der Middlesex University in England, nachdem er zuvor an der University of Michigan, der City University Hong Kong und der Open University gelehrt hatte. Sein hauptsächliches Interesse in der Forschung gilt der Geschichte der Mathematik; außerdem hat er viele Arbeiten über Fraktale, Chaostheorie und wissenschaftliches Rechnen verfasst oder herausgegeben. Er ist der Autor einer gefeierten Biografie über den englischen Mathematiker Arthur Cayley und des internationalen Bestsellers *50 Schlüsselideen Mathematik*.

Die großen Fragen behandeln grundlegende Probleme und Konzepte in Wissenschaft und Philosophie, die Forscher und Denker seit jeher umtreiben. Anspruch der ambitionierten Reihe ist es, die Antworten auf diese Fragen darzustellen und damit die wichtigsten Gedanken der Menschheit in einzigartigen Übersichten zu bündeln.

Der Reihenherausgeber **Simon Blackburn** ist Professor für Philosophie an der Universität Cambridge, an der Universität von North Carolina und einer der angesehensten Philosophen unserer Zeit.

In der Reihe *Die großen Fragen:*

Philosophie

Physik

Universum

Mathematik

Tony Crilly

Die großen Fragen Mathematik

Reihenherausgeber Simon Blackburn

Aus dem Englischen übersetzt von Roland Girgensohn

Spektrum
AKADEMISCHER VERLAG

Inhalt

Einführung

Mathematik ist etwas, über das wir alle Bescheid wissen sollten. Der Lehrplan in der Schule deckt nur einen geringen Teil von ihr ab (und erweckt auch nicht jedermanns Interesse), während das Gebiet selbst noch wesentlich mehr zu bieten hat. Es ist nicht nur ein stiller Partner bei vielen Anwendungen in der Wissenschaft, sondern weist auch fundamentale Verbindungen zu den „schönen Künsten" auf. Mathematik ist ein Teil des Erbes der Menschheit; gleichzeitig ist sie immer noch sehr lebendig und erweitert ständig ihre Grenzen – wobei sie auch von den „großen Fragen" gespeist wird.

Diese großen Fragen der Mathematik sind von ganz unterschiedlicher Art. Einige werden durch die erdrutschartigen Veränderungen in der modernen Technologie angestoßen, während andere schon im Altertum formuliert wurden und bis heute noch nachschwingen. Zu einigen wurden bereits endgültige Antworten gefunden, nur um durch einen neuen Stoß von Fragen ersetzt zu werden, während andere unverändert fortbestehen, ohne sogar nach Jahrhunderten an der vordersten Front der Forschung zur Ruhe gekommen zu sein. Manche Fragen grenzen an die Philosophie und werden vielleicht niemals auf die eine oder andere Weise beantwortet werden, doch faszinierend bleiben sie allemal.

Dies liegt in der Natur der Mathematik begründet. Für manche mag es überraschend sein, dass sie sich nur langsam weiterentwickelt. Denn während in der Schule Gewicht auf Schnelligkeit beim Kopfrechnen und beim Lösen von verzwickten kleinen Aufgaben gelegt wird, bedeutet diese Fähigkeit bei der professionellen Beschäftigung mit Mathematik wiederum überhaupt keinen Vorteil. Es ist zwar unbestreitbar, dass die Mathematik Fortschritte macht, doch ähneln diese eher der langsamen Unvermeidlichkeit eines Lavaflusses als dem plötzlichen „Heureka" eines großen Genies.

Die Mathematik hat einen unverwechselbaren Charakter, der sie von den Naturwissenschaften unterscheidet. Wenn in den Naturwissenschaften eine Theorie an Glaubwürdigkeit verliert (wie zum Beispiel die einst beliebte Vorstellung vom „Phlogiston", mit dem erklärt werden sollte, warum manche Dinge brennen können, oder die vom Äther, der der Ausbreitung von Licht zugrunde liegen sollte), dann wird sie aufgegeben. Solche Theorien haben sozusagen ihr Haltbarkeitsdatum überschritten und landen in den Geschichtsbüchern der Wissenschaft, wo sie nur noch von antiquarischem Interesse sind. In der Mathematik liegen die Dinge anders. Ein einmal bewiesenes Resultat kann sich nicht hinterher als falsch herausstellen, und deshalb hat ein Theo-

T. Crilly, *Die großen Fragen Mathematik*, DOI 10.1007/978-3-8274-2918-6_1,

rem (ein bewiesener mathematischer Lehrsatz) eine unendliche Lebensdauer. Der Satz von Pythagoras über rechtwinklige Dreiecke ist für alle Zeiten gültig.

Sicherlich befassen sich die heutigen Mathematiker in ihren wissenschaftlichen Veröffentlichungen nicht mehr mit Sätzen der Art, wie Euklid sie vor 2300 Jahren niederschrieb. Und doch kann man sich von diesen grundlegenden Werken inspirieren lassen und darin immer noch neue Denkansätze entdecken. Wir können die Arbeiten des griechischen Mathematikers Diophantos zur Theorie der Gleichungen lesen und auch heute noch daraus lernen, denn einige Arten von Gleichungen, die aus dem antiken Griechenland stammen, sind bis heute ungelöst.

Damit soll nicht gesagt sein, dass die Zeit keinen Einfluss auf mathematische Theorien und Sätze habe. Diese werden oft modifiziert, verfeinert und für einen modernen Zusammenhang neu zugeschnitten. In der Mathematik tendieren Resultate dazu, von Verallgemeinerungen verschluckt zu werden, so dass sie letztlich nicht im Papierkorb, sondern als Fußnote zu einer allgemeinen Theorie enden.

Heutzutage leben wir in einer für die Mathematik spannenden Zeit. Neue Fragen tauchen auf, die unser jetziges Computerzeitalter berücksichtigen müssen. Denn heutzutage können die Computer nicht nur Zahlenreihen schnell verarbeiten, sondern sie stellen sogar unser Verständnis für den Begriff des mathematischen Beweises und für das eigentliche Wesen der Mathematik auf den Prüfstand. Sie führen algebraische Rechnungen durch und zeigen uns geometrische Formen und Oberflächen von ihrer schönsten Seite.

Die großen Fragen, die wir hier betrachten werden, konzentrieren sich auf die wichtigen Themen und gehen auf die grundlegenden Fragestellungen ein, die von Interesse sind. Sie werden uns zeigen, woher die Mathematik gekommen ist, welche Wege sie genommen hat und wohin sie uns noch führen könnte. Es werden sich stets Antworten ergeben, doch diese Antworten passen keineswegs immer in eine fertige Schablone. Unsere Fragen sprechen die Probleme an, die auch für Mathematiker spannend sind, und sie werden uns zeigen, was die Mathematik über die reale Welt, in der wir leben, auszusagen hat. Und vor allem werden sie uns die Mathematik als ein lebendiges, sich entwickelndes Fachgebiet nahe bringen.

Wofür ist Mathematik gut?

Eine Einführung in Themen und Ziele

Die Mathematik des 21. Jahrhunderts ist ein weites und facettenreiches Gebiet. Sie enthält ein solch reiches Spektrum an verschiedenen Betätigungen, dass es als fast unmöglich erscheint, all ihre Ausprägungen in einem einzigen Fachgebiet zusammenzufassen. An einem Ende des Spektrums ermöglicht sie es dem täglichen Leben, seinen Gang zu gehen, indem sie sich mit den Mechanismen des Zählens, etwa von Zeit oder Geld, befasst. Am anderen Ende scheint sie eine in sich abgeschlossene Welt zu bilden, in der weltfremde Gelehrte Rätsel von überwältigender Komplexität ersinnen – um dann Jahre mit dem Versuch zu verbringen, sie zu lösen. Gleichzeitig fordern unsere Politiker ständig noch *mehr* Mathematiker. Wofür also ist all diese Mathematik gut, und wie passt sie in unsere Welt?

Die Mathematik, mit der wir heute leben, hatte ihren Ursprung im frühen Umgang mit Zahlen, der sich bis rund dreitausend Jahre vor Christus zurückverfolgen lässt. Es ist nicht überraschend, dass die Anfänge sich an praktischen Anwendungen orientierten. Probleme des Handels, das Zahlen von Abgaben, die Landvermessung, Beobachtungen des Laufs von Sternen und Planeten, die Entwicklung eines Kalenders – dies alles waren Anwendungen, für die man Zahlen, Berechnungen und ein wenig Geometrie benötigte. Doch etwa tausend Jahre später begannen bei den Ägyptern die ersten Untersuchungen des Zahlensystems an sich, unabhängig von möglichen Anwendungen. Aus Neugier und um des intellektuellen Vergnügens willen fing man auch an, sich mathematische Rätsel auszudenken – gerade so, wie wir heutzutage Gefallen an der Sudoku-Seite in der Zeitung finden. Damit hatte die Mathematik begonnen, sich selbst zu betrachten. Der Beruf des Mathematikers war geboren.

Große Fortschritte wurden im antiken Griechenland um etwa 500 v. Chr. gemacht, als dort eine Kultur des mathematischen Denkens erblühte. Die dabei entstandenen Werke blieben in allen nachfolgenden Zeitaltern einflussreich und werden auch heute noch studiert. Mathematik wurde damals als eines der höchsten Güter betrachtet und war unentbehrlicher Bestandteil der klassi-

T. Crilly, *Die großen Fragen Mathematik*, DOI 10.1007/978-3-8274-2918-6_2,

schen Erziehung. Pythagoras, Platon, Archimedes, Euklid sind nur einige der griechischen Philosophen, die die Mathematik vertraten und deren Einfluss sich über Hunderte, sogar Tausende von Jahren erstreckte.

Während der ersten Jahrhunderte des Christentums schwang das Pendel allerdings wieder in die andere Richtung, so dass sich diejenigen, die sich der Mathematik zuwandten, als Ausgestoßene am Rand der damaligen Kultur wiederfinden konnten. Um das Jahr 400 n. Chr. wetterte der heilige Augustinus von Hippo: „Der gute Christ soll sich hüten vor den Mathematikern und all denen, die leere Voraussagen zu machen pflegen" und verdammte die Mathematiker dafür, dass sie „mit dem Teufel im Bunde den Geist trüben und in die Bande der Hölle verstricken." In jenen Tagen wurde die Mathematik in Verbindung mit den obskuren Praktiken der Astrologen gebracht, und der Verdacht schändlicher oder ketzerischer Absichten sollte noch lange über der Mathematik schweben.

Noch im 13. Jahrhundert beklagte der Philosoph Roger Bacon, dass das Verständnis für „den exzellenten Nutzen der reinen Mathematik" nicht gut genug entwickelt sei. Aber spätestens Ende des 16. Jahrhunderts kündigten sich dann bessere Zeiten an, als Galileo Galilei die Professur für Mathematik an der Universität von Padua antrat. Allerdings zeigte sein Konflikt mit der katholischen Kirche, die einige seiner Ergebnisse ablehnte, dass die Toleranz für die Mathematik und ihre Implikationen für Physik und Astronomie noch enge Grenzen hatte. Doch mit Isaac Newton und seinen Zeitgenossen gab dann das späte 17. Jahrhundert den Startschuss für eine mathematische und wissenschaftliche Revolution, die das Gleichgewicht der kulturellen Kräfte für immer verändern sollte. Die Romantiker des späten 18. und frühen 19. Jahrhunderts mochten diese neue Weltanschauung noch ablehnen, und William Blake konnte Newton noch satirisch darstellen, aber die Zukunft der Mathematik als Sprache der Wissenschaft war gesichert. Im 19. Jahrhundert erlebte sie ihre Etablierung an allen Universitäten und damit auch eine Fülle an neuen und anspruchsvollen Aufgaben. Die Mathematik hatte endgültig Fuß gefasst.

Die angewandte und die reine Mathematik

Eine beliebte Debatte dreht sich um die Frage, ob die Notwendigkeit die Mutter der mathematischen Ideen ist oder ob innovative Mathematik ihre eigenen Anwendungsmöglichkeiten erschafft. Zu Beginn ihrer Geschichte wurde die Mathematik von praktischen Überlegungen vorangetrieben, doch nachdem sich ihr Innenleben einmal eröffnet hatte, war damit auch die Möglichkeit entstanden, neue Anwendungen durch „reines" mathematisches Denken zu erschließen. Gute Mathematik ist von potenziellen Anwendungen selten weit entfernt, wenn auch niemand vorhersagen kann, wann deren Moment gekommen ist. Eine scharfsinnige Einsicht könnte nächste Woche aufgegriffen werden oder aber für 50 oder 500 Jahre im Verborgenen schlummern.

Die Geschichte wimmelt von Beispielen für Theorien der reinen Mathematik, die einen praktischen Partner finden. Die alten Griechen arbeiteten eine Theorie der Kegelschnitte aus, und genau diese wurde im 17. Jahrhundert benötigt, als Johannes Kepler die Planetenbahnen als Ellipsen beschrieb. Die *Matrix-Algebra*, die Theorie mehrdimensionaler Zahlen, wurde in den 1850er Jahren zur Behandlung rein mathematischer Probleme entwickelt; doch 70 Jahre später wurde genau sie für die *Matrix-Mechanik* der sich schnell entwickelnden Quantentheorie benötigt. Und als sich George Boole um die Mitte des 19. Jahrhunderts ein System ausdachte, mit dem man Logik in Algebra umwandeln konnte, ahnte er nicht, dass er damit eine Sprache schuf, die hundert Jahre später die Grundlage des Programmierens von Computern sein sollte.

Erst vor 50 Jahren schrieb der einflussreiche englische Mathematiker G. H. Hardy, dass er Mathematik betreibe, ohne sich auch nur vom kleinsten Gedanken an „praktische Relevanz“ einengen zu lassen. Er empfand es sogar als beruhigend, dass seine Zahlentheorie weit entfernt von allen praktischen Anwendungen war. Heutzutage könnte er sich über diese Abgeschiedenheit allerdings nicht mehr freuen, nicht in einer Welt, in der seine Art von reiner Mathematik von größter Wichtigkeit für die Sicherheit von Computern ist (▶ *Können wir einen Code entwerfen, der nicht zu knacken ist?* und *Gibt es noch ungelöste Probleme?*). Als Benoît Mandelbrot in den 1970er Jahren die allgemeine Aufmerksamkeit auf *Fraktale* lenkte, hätten nur wenige an deren Anwendbarkeit geglaubt (▶ *Warum sind drei Dimensionen nicht genug?*). Dennoch gibt es heutzutage sogar verschiedene Theorien der Dimensionen.

Doch Mathematiker reagieren auch auf entsprechenden Bedarf. Als James Watt im 18. Jahrhundert zur Zeit der industriellen Revolution vor dem Problem stand, die lineare Bewegung eines Kolbens in seiner Dampfmaschine in eine Drehbewegung umzuwandeln, wurde die Geometrie um die Theorie der *Geradführungen* erweitert. Als während des Zweiten Weltkriegs Codeknacker gebraucht wurden (▶ *Können wir einen Code entwerfen, der nicht zu knacken ist?*), warb man aufgrund ihrer speziellen Fähigkeiten Mathematiker von den Universitäten ab – mit dem Ergebnis, dass der erste elektronische Computer der Welt entstand.

Man kann also sicherlich von einer symbiotischen Beziehung zwischen reiner und angewandter Mathematik sprechen, und niemals war diese enger als während des jetzigen Computerzeitalters. Ohne Mathematik wären Computer nutzlos, digitale Fotos unmöglich und Mobiltelefone stumm. Aber auch die

„reine" Forschung professioneller Mathematiker wird heutzutage von den Rechenfähigkeiten der Computer wesentlich unterstützt: Das „Reine" profitiert seinerseits vom „Angewandten".

Auch die Mathematik hat ihre selbstbezügliche, ihre philosophisch-nachdenkliche Seite. Deren Geschichte zeigt eine Abkehr von dem Standpunkt der antiken Griechen, dass die von den Mathematikern zutage geförderten Wahrheiten schon vor ihrer Entdeckung existiert hatten. Stattdessen entstanden wesentlich differenziertere Vorstellungen von der Rolle des Mathematikers, die auch Kreativität und Fantasie einschließen (▶ *Ist die Mathematik wahr?*).

In der modernen Mathematik basiert die Vorgehensweise auf Axiomen und logischen Schlussfolgerungen. Während die Griechen im Altertum noch die Wahrheit ihrer Axiome voraussetzten, genügt den heutigen Mathematikern schon deren Konsistenz. In den dreißiger Jahren des 20. Jahrhunderts erschütterte Kurt Gödel die Mathematik, als er seine *Unvollständigkeitssätze* bewies, nach denen es in jedem formalen axiomatischen System mathematische Aussagen gibt, die unter alleiniger Verwendung der Axiome weder bewiesen noch widerlegt werden können. Das bedeutet, dass die Mathematik unbeweisbare Wahrheiten enthalten kann, die vielleicht für immer unbeweisbar bleiben müssen.

So vielfältig und ausgedehnt die moderne Mathematik auch sein mag, basiert sie doch auf den drei – uns schon aus der Schule bekannten – Teilgebieten Arithmetik, Algebra und Geometrie. Was sind deren Wurzeln, und was ist ihre Zukunft?

Zahlen und ihre Eigenschaften

Die zum Zählen verwendeten Zahlen bleiben der wichtigste Bestandteil im mathematischen Repertoire; alle Mathematik beginnt mit ihnen. Sie haben eine reichhaltige Entwicklungsgeschichte (▶ *Woher kommen die Zahlen?*), und es war sicherlich kein zwangsläufiger Prozess, der zu unserem heutigen Zahlensystem mit der Basis 10 und den Ziffern 0 bis 9 führte. Beispielsweise gab es anfangs noch keine Null.

Die Eigenschaften der Primzahlen (also der Zahlen, die nur bei Division durch sich selbst oder durch 1 wieder eine ganze Zahl ergeben) haben schon immer besondere Faszination erweckt. Überraschenderweise gibt es noch Vieles, das wir über sie nicht wissen. So ist zum Beispiel ihre Verteilung zwischen den anderen Zahlen immer noch nicht genau bekannt – auch wenn das möglicherweise schwer zu glauben ist, da die Primzahlen schon seit über 2000 Jahren untersucht werden (▶ *Warum sind Primzahlen die Atome der Mathema-*

tik? und *Gibt es noch ungelöste Probleme?*). Jedenfalls hat sich über das reine Zählen hinaus im Laufe der Jahrhunderte das Repertoire an Zahlen erweitert auf die negativen Zahlen, auf die Brüche und schließlich auf die sogenannten *irrationalen Zahlen*, deren Dezimalstellen sich unendlich weit ohne Regelmäßigkeit fortsetzen. Alle diese Zahlen zusammengenommen werden von den Mathematikern als *reelle Zahlen* bezeichnet (▶ *Welches sind die seltsamsten Zahlen?*).

Aber das war noch nicht alles. Die reellen Zahlen sind nur eindimensional. Man kann sie sich auf einer Zahlengeraden vorstellen, die sich von links (negative Zahlen) nach rechts (positive Zahlen) erstreckt. Ein großer Schritt nach vorn war für die Mathematiker der Übergang zu zwei Dimensionen, der mit den sogenannten *komplexen Zahlen* vollzogen wurde (▶ *Sind die imaginären Zahlen tatsächlich imaginär?*). Diese erhöhten die Leistungsfähigkeit beim Lösen von Gleichungen und führten zu neuen analytischen Theorien. Heutzutage sind komplexe Zahlen aus der Untersuchung von Naturerscheinungen wie Elektrizität und Magnetismus nicht wegzudenken.

Demnach gibt es viele Arten von Zahlen, doch wie weit reichen sie? Schon seit frühesten Zeiten mussten die Mathematiker sich mit dem Problem der Unendlichkeit herumschlagen. Von Aristoteles stammt der Begriff der *potenziellen Unendlichkeit* – einer einzigen Unendlichkeit, die niemals erreicht werden kann. Doch im 19. Jahrhundert führte Georg Cantor einen neuen Unendlichkeitsbegriff ein, der es ermöglichte, von *vielen* Unendlichkeiten zu sprechen (▶ *Wie groß ist die Unendlichkeit?*).

Geometrie, Algebra und mathematische Revolutionen

Jahrtausendelang stand die Geometrie im Bann der anscheinend unbestreitbaren Autorität der antiken Griechen, die viele der Regeln festlegten, welche bis zum heutigen Tag Schulkindern eingeflößt werden. So errichtete insbesondere Euklid ein Gebäude an geometrischem Wissen, das auf dem Boden seiner messerscharfen Logik erbaut war und zunächst wie die einzig mögliche Wahrheit daherkam. Doch im Laufe der Zeit begannen sich Risse in Euklids Geometrie zu zeigen, und schließlich wurde klar, dass es auch *andere* gültige Geometrien gibt (▶ *Wo treffen sich zwei parallele Geraden?*), die Phänomene in zwei, drei oder mehr Dimensionen beschreiben und schließlich zu dem Konzept der *Mannigfaltigkeit* führten – ein Gebilde mit unterschiedlicher lokaler und globaler Geometrie (▶ *Welche Gestalt hat das Universum?*). Diese Geometrien können sogar einen noch größeren Anspruch als die von Euklid erheben, die „Geometrie des Universums“ zu sein – ein für Physiker sehr spannendes Thema.

Während Physiker sich die Geometrie zu eigen machen, um den Geheimnissen der Materie und des Universums auf die Spur zu kommen, verwenden Biologen und Mediziner eine andere Art von Geometrie, nämlich die *Knotentheorie*, um die DNA zu entwirren und zu analysieren. Aus diesen Untersuchungen entstand die forensische Technik des genetischen Fingerabdrucks, und es ergaben sich bedeutende Konsequenzen für die Frage nach der Identität von Menschen und für die Aufklärung von Verbrechen. Insgesamt haben die Mathematiker die Naturwissenschaften mit verschiedenen Geometrien versorgt, von denen man wie aus einem Werkzeugkasten diejenige auswählen kann, die für die jeweilige Aufgabe am geeignetsten erscheint.

Früher oder später wird es oft sinnvoll, Geometrie in die Sprache der Algebra zu übersetzen, eine Möglichkeit, die auf René Descartes’ Arbeiten im 17. Jahrhundert zurückgeht. Im 20. Jahrhundert wurde die Geometrie der Symmetrien ebenfalls in die Algebra überführt. Symmetrie, diese schwer zu fassende Eigenschaft, die in der Mathematik wie auch in vielen anderen Gebieten oft den Begriff der „Schönheit“ zu definieren scheint (▶ *Ist Mathematik schön?*), konnte nun mathematisch mithilfe der *Gruppentheorie* eingefangen werden. Gruppen liegen im Zentrum der modernen Algebra und bilden das Instrumentarium, mit dem sich Symmetrie im Detail untersuchen lässt (▶ *Was ist Symmetrie?*). Im Jahr 1981 vollendeten die Mathematiker die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen, womit ein gewaltiges Forschungsprojekt, dessen Anfänge bis in das 19. Jahrhundert zurückreichen, seinen Abschluss fand. Der Klassifikationssatz, der als Resultat entstand, wird im Englischen auch als *enormous theorem* bezeichnet. Nach diesem Satz gehören die meisten dieser Gruppen zu wenigen genau bekannten Familien; darüber hinaus gibt es aber 26 sporadische Gruppen, deren größte ungefähr $8 \cdot 10^{53}$ Elemente enthält (diese Zahl besteht aus einer 8, gefolgt von 53 Nullen). Die Gruppentheorie ist heutzutage bedeutsam in der theoretischen Physik, in der Transformati-onen des Raums als Gruppen beschrieben werden, wie auch in Chemie und Kristallografie, in denen Symmetrien ebenfalls eine Rolle spielen.

„Ermittle den Wert von x“ ist uns schon aus den algebraischen Aufgaben der Schule wohlbekannt. Bei dieser Art von „inversem“ Problem ist die Leistung der Mathematik besonders beeindruckend und findet überall Anwendungen. Oft verlangen diese von uns, eine *Unbekannte* zu finden, für die wir zunächst nur eine Beziehung oder eine Gleichung aufstellen können. Wenn wir zum Beispiel wissen, dass die Verlängerung der Seiten eines quadratischen Feldes um jeweils 3 Meter ein Feld von 400 Quadratmetern ergibt, dann ist es ein „inverses Problem“, die unbekannte Seitenlänge x des ursprünglichen Feldes zu berechnen. Mittels Algebra und durch „Auspacken“ der Gleichung $(x + 3)^2 = 400$ finden wir $x = 17$ (oder, mathematisch exakt, aber physikalisch bedeutungslos, $x = -23$). In vielen Fällen hat uns die Arbeit früherer Generationen von Mathematikern für solche Aufgaben ein Arsenal an Formeln bereitgestellt, das wir zu willkommenen Abkürzungen des Lösungsweges nutzen können (▶ *Gibt es für alles eine Formel?*).

Zum Start einer Rakete in den Weltraum benötigt man unter anderem *Differenzialgleichungen* und damit auch die Verfahren der *Infinitesimalrechnung* bzw. der modernen *Analysis* (▶ *Was ist die Mathematik des Universums?*), einer Methode, die üblicherweise eingesetzt wird, wenn Größen wie Geschwindigkeit und Beschleunigung miteinander verknüpft werden. Es gibt spezielle Typen von Differenzialgleichungen, die von gut ausgearbeiteten Theorien getragen werden, aber auch viele „isolierte“ Gleichungen, die sich einer exakten Lösung verweigern. Für solche Differenzialgleichungen entwickelte Henri Poincaré eine „qualitative Theorie“, die sich auf die *Eigenschaften* der Lösung konzentriert, anstatt die Lösungen explizit finden zu wollen. Diese Untersuchungen führten zu der sogenannten *Chaostheorie* (▶ *Kann ein Schmetterling wirklich einen Hurrikan verursachen?*) und gaben auch dem damals noch neuen Gebiet der *Topologie* eine besondere Richtung, die einen radikalen Wandel in unserer Sicht auf geometrische Körper einleitete (▶ *Welche Gestalt hat das Universum?*).

Die neue und unbekannte Mathematik

Die meisten Nichtmathematiker werden das Wort „Topologie“ nicht besonders häufig in den Mund nehmen, doch zwei andere „relative Newcomer“ sind wesentlich geläufigere Begriffe: Wahrscheinlichkeit und Statistik.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung oder -theorie, eine der herausragenden Schöpfungen der modernen Mathematik, erlaubt es uns, mit Unsicherheiten quantitativ umzugehen (▶ *Kann die Mathematik Reichtümer garantieren?*). Sie hatte ihre Anfänge in der Unterhaltungsmathematik des 17. Jahrhunderts, in der es um die Untersuchung von Glücksspielen ging, wurde jedoch seitdem verfeinert und zu einer strikten Rechenmethode weiterentwickelt. Heutzutage ist sie das Rückgrat der Risikoanalyse. Ein verwandtes Gebiet ist die Statistik (▶ *Ist Statistik nur Lüge?*), die die Theorie für die korrekte Auswertung von Daten und das Durchführen von Experimenten bereitstellt. Die Statistik hat mehrere Wurzeln (so entstammt sie unter anderem dem Bereich der landwirtschaftlichen Versuche), doch heutzutage werden ihre Methoden so umfassend angewandt, dass es von Politik bis Medizin kaum ein menschliches Betätigungsfeld gibt, das völlig frei von Statistik ist.

Die Anwendung von Statistik und anderen mathematischen Methoden führt natürlich auch zu dem Wunsch, Vorhersagen über die Zukunft zu machen (▶ *Kann die Mathematik die Zukunft vorhersagen?*). So will der Demograf eine vernünftige Abschätzung der Bevölkerung in fünf Jahren geben können, und der Börsenmakler will aufgrund von statistischen Anhaltspunkten und eigenen Vermutungen den Aktienmarkt überlisten. Wie soll man da vorgehen? Dies sind ebenso schwierige Fragen wie das Problem der Wettervorhersage, welche auf mathematischen Gleichungen beruht, die zumindest im Moment noch nicht gelöst werden können (▶ *Gibt es noch ungelöste Probleme?*) und deren Schwierigkeit durch den *Schmetterlingseffekt* noch verschärft wird (▶ *Kann ein Schmetterling wirklich einen Hurrikan verursachen?*).

Es gibt also alte Mathematik, und es gibt neue Mathematik. Bevor wir uns zurücklehnen und meinen, dass es fast nichts mehr zu tun gibt, sollten wir uns daran erinnern, dass es auch noch ungelöste mathematische Probleme gibt, und davon nicht zu wenige (▶ *Gibt es noch ungelöste Probleme?*)! Und das ist auch gut so, denn sonst würde die Mathematik verdorren. Es gibt einige bedeutende offene Fragen, die den Mathematikern schon seit vielen Jahren Kopfzerbrechen bereiten, zum Beispiel die Goldbach'sche und die Riemann'sche Vermutung, die beide mit Primzahlen zu tun haben. Ebenso gibt es viele neue, Aufmerksamkeit auf sich ziehende Probleme. Selbstverständlich werden dabei auch Fortschritte gemacht, über die teilweise sogar die Zeitungen in großen Schlagzeilen berichten. Als im Jahr 1994 die Fermat'sche Vermutung bewiesen wurde, stand die Mathematik einmal ganz im Licht der Öffentlichkeit (▶ *Ist Mathematik schön?*). Schon zuvor hatten sich Mathematiker und Computerspezialisten zusammengetan, um die *Vierfarbenvermutung* zu beweisen (▶ *Gibt es für alles eine Formel?*), und erst kürzlich hat ein einsiedlerischer russischer Mathematiker die Welt überrascht, indem er die rund hundert Jahre alte Poincaré-Vermutung bewies – und dann noch nicht einmal das dafür ausgesetzte Preisgeld von einer Million Dollar einforderte.

Wofür ist Mathematik also gut? Im Grunde ist das eine seltsame Frage. Wir fragen ja auch nicht: „Wofür ist Musik gut?" oder: „Wofür ist Literatur gut?". Wir akzeptieren, dass es sich dabei einfach um Aktivitäten und Denkprozesse handelt, die der Ausübung der kreativen Fantasie dienen und denen sich die Menschen gerne hingeben – das haben sie schon immer getan und das werden sie immer tun, denn sie können nicht anders. Wenn man meint, dafür Anwendungen zu benötigen, dann sind sie überall um uns herum zu finden. Es ist fast unmöglich, all die Wege aufzuzählen, auf denen die Mathematik uns Wissen vermittelt über die Welt, das Universum, die Natur oder zwischenmenschliche Interaktionen. Die Mathematiker können mit ihrer Mathematik auf unzählige Arten unser Leben verändern – und haben das bereits getan. Doch in ihrem Kern wird die Mathematik hauptsächlich durch die eine grundlegende Eigenschaft der menschlichen Natur motiviert: unstillbare Neugier.

Woher kommen die Zahlen?

Von Kerben in Knochen zu Hexadezimalzahlen

In unserem täglichen Leben sind wir umgeben von Zahlen. Wenn wir erwachen, erblicken wir mit verschlafenen Augen den Zahlenkreis auf dem Wecker (oder heutzutage eher das Glimmen der Digitalanzeige); vielleicht eilen wir zu unseren Vorlesungen mit dem Bus der Linie 134 oder zur Arbeit mit dem Zug um 8:32 Uhr; wir zählen das Kleingeld für unser Mittagessen, prüfen die Einträge in unseren Terminkalendern und drücken die Tasten auf unseren Mobiltelefonen; am Ende des Tages schalten wir uns geruhsam durch eine schwindelerregende Anzahl an nummerierten Fernsehsendern, bevor wir schließlich mit einem letzten Blick auf die Uhr zu Bett gehen. Die Zahlen sind so tief in unserem Leben verankert – und wir in der Welt der Zahlen –, dass wir gar nicht mehr auf den Gedanken kommen, in ihnen die erstaunlich vielseitigen Utensilien zu sehen, die sie tatsächlich sind. Woher kommen sie also?

Natürlich sind viele der Zahlen, denen wir begegnen, einfach nur Bezeichnungen, Etiketten. Theoretisch könnten Buslinien auch auf andere Weise unterschieden werden als durch Nummern. Das berühmte „57 Varieties“ auf jeder Ketchup-Flasche von Heinz oder der Whiskey Jack Daniel's „Old No. 7“ deuten verschmitzt an, dass es eine ganze Reihe von sorgfältig unterschiedenen Variationen des jeweiligen Produkts gibt – doch auch sie sind einfach nur bedeutungslose Markennamen. Die Wirkung solcher Marken basiert auf der Art und Weise, in der menschliche Gesellschaften Zahlensysteme entwickelt haben, um Dinge anordnen (erster, zweiter, …) und zählen zu können.

Heutzutage verwendet die Menschheit fast überall einheitlich dasselbe System aus nur zehn Symbolen, von 0 bis 9, für alle Zwecke des Zählens und des Ordnens. Die Kombinationen dieser Symbole sind vielseitig genug, um sowohl die riesigen Abstände der Galaxien als auch die winzigen Durchmesser der

T. Crilly, *Die großen Fragen Mathematik*, DOI 10.1007/978-3-8274-2918-6_3,

Atomkerne darstellen zu können, und das auch noch auf verschiedene Arten. Der Laie könnte zum Beispiel schreiben, dass die Erde 150.000.000 Kilometer oder 150 Millionen Kilometer weit von der Sonne entfernt ist, während Mathematiker oder Naturwissenschaftler wahrscheinlich die knappe Eleganz des Ausdrucks $1{,}5 \cdot 10^8$ Kilometer bevorzugen (also 1,5 multipliziert mit der achten Potenz von 10). Um ein Tausendstel eines Meters zu beschreiben, haben wir drei Möglichkeiten: 0,001 Meter, 1 Millimeter oder 10^{-3} Meter (also 10 hoch –3 Meter), während der winzige Durchmesser eines Atomkerns knapp und übersichtlich als 10^{-15} Meter ausgedrückt werden kann.

So elegant und vielseitig diese zehn Symbole auch sind – ihre Erfindung war doch niemals zwangsläufig, und sie standen weder am Anfang noch werden sie das Ende der menschlichen Erfindungen sein, was Zahlensysteme betrifft.

Die frühesten Zählmethoden

Forscher haben Hinweise darauf gefunden, dass Zahlen seit mindestens 30.000 Jahren aufgezeichnet werden – zunächst auf „Kerbhölzern", also Holzstäben mit eingeritzten Markierungen, die Mengenangaben bedeuten. So liefern in Afrika und Osteuropa gefundene eingekerbte Knochen, die numerischen Aufzeichnungen dienten, Belege für frühestes Zählen. Kerbhölzer wurden noch im England des 13. Jahrhunderts bei der Steuereinnahme verwendet, und überraschenderweise hielt sich dieses traditionelle System in manchen Gegenden bis in die 1820er Jahre, als es durch Aufzeichnungen auf Papier ersetzt wurde. Auch heute erfüllen Strichlisten bei der Buchführung über stetig wachsende Größen zuweilen noch ihren Zweck, zum Beispiel um den Spielstand im Sport oder Daten bei statistischen Untersuchungen festzuhalten. Die übliche Methode, die schon sehr frühen Ursprungs zu sein scheint, besteht darin, bis 5 zu zählen und dabei ein Muster zu bilden, das wie ein verriegeltes Tor aussieht.


Ein einfaches, heute noch verbreitetes Zählsystem

Zählsysteme finden sich in der gesamten Welt. So nutzt beispielsweise ein System aus Südamerika ebenfalls fünf Striche, die allerdings zu einer anderen Form zusammengesetzt werden.


Ein südamerikanisches Zählsystem

Unter den Aborigines in Australien waren einfache Zählsysteme in Gebrauch, die über die kleinen Zahlen hinaus abstrahierten. So wurde in Tasmanien ein Zählsystem verwendet, das sich als „eins", „zwei", „viele" übersetzen lässt, während es auf dem Festland, in Queensland, ein Beispiel für „eins“, „zwei“, „eins und zwei“, „zwei Zweier“ und „viele“ gab.

Babylonier und Ägypter

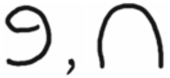
Ein echtes Zahlensystem entstand erstmals in der „Wiege unserer Kultur“, dem Mittleren Osten. Die babylonische Zivilisation hatte ihre Blüte in Mesopotamien, dem Teil des heutigen Irak, der sich zwischen den Flüssen Euphrat und Tigris befindet. Die Hauptstadt Babylon lag etwa 90 Kilometer südlich des heutigen Bagdad. Im dritten vorchristlichen Jahrtausend verwendeten die Babylonier ein Zahlensystem, das auf der Zahl 60 basierte. Überreste davon haben sich bis heute erhalten. Beispiele dafür finden sich in unserer Zeitmessung (60 Sekunden in einer Minute, 60 Minuten in einer Stunde) und, da die Babylonier ihre Mathematik auch in der Astronomie einsetzten, in dem Winkel, der einem Kreis oder einer vollen Umdrehung entspricht: 360 Grad. Ein System, das auf der Zahl 60 basiert, hat rechnerische Vorteile. Einer davon ist die Teilbarkeit der Zahl 60 durch nicht weniger als elf kleinere Zahlen, nämlich 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 und 30, was offensichtlichen Nutzen hat, wenn etwas aufgeteilt werden muss.

Die Zahlen von 1 bis 60 wurden in Babylonien mithilfe von nur zwei Symbolen notiert, die sich besonders gut in die dabei verwendeten Tontafeln einprägen ließen: eine einzelne senkrechte Linie (*Keil*) und ein Winkel (*Haken*). Der Keil stand für die Zahl 1, und die Zahlen 2 bis 59 wurden durch verschiedene Kombinationen der beiden Symbole dargestellt. Die Babylonier schrieben und lasen ihre Zahlen von links nach rechts, und der Wert eines Symbols war durch seine relative Position in der Reihe definiert – also ebenso wie bei unserem heutigen System. Wenn sie die 60 erreicht hatten, begannen sie wieder von vorn und verwendeten den gleichen Keil für die Zahl 60, den sie schon für die 1 verwendet hatten. Die einzige Möglichkeit, die Bedeutungen dieser beiden Zeichen zu unterscheiden, war durch den Zusammenhang gegeben, so dass zum Beispiel beim Messen von Winkeln 60 Grad wahrscheinlicher waren als 1 Grad. Etwas, das der Null entsprochen hätte, besaßen sie nicht.

Die beiden babylonischen Zahlzeichen

Die Zahl 23 in babylonischen Symbolen

Die alten Ägypter entwickelten ein anderes, ausgeklügeltes System, das sie bei ihren großartigen Pyramidenkonstruktionen ausgiebig einsetzten. (Für den Bau der Pyramiden benötigten sie außerdem Kenntnisse in räumlicher Geometrie sowie die Fähigkeit, genaue Messungen anzustellen.) Ihr System, das auf der Zahl 10 basierte, entstand ab etwa 2700 v. Chr. Für die Zahlen bis



Die altägyptischen Symbole für 10 und 100

Die Zahl 234 in altägyptischen Symbolen

zur 9 verwendeten sie vertikale Zählstriche sowie danach zwei verschiedene Symbole für die Zahlen 10 und 100. Anders als die Babylonier schrieben die Ägypter von rechts nach links. Die Symbole für die größeren Zahlen waren kunstvoll: So stand zum Beispiel ein Vogel für die Zahl 100.000.

Die Mathematik der alten Ägypter war hauptsächlich an praktische Dinge gebunden, aber sie kannten auch schon einige raffinierte mathematische Kniffe. Ihre Methode für die Multiplikation war genial. In unserem modernen System müssen wir zum Kopfrechnen die Multiplikationstabellen kennen, die wir als Kinder in der Schule auswendig lernten. Doch die Kinder im frühen Ägypten benötigten letztlich nur die Tabelle für die Verdoppelung, da sie an die Multiplikation mit einer Methode herangingen, die auf die Verwendung des Abakus zugeschnitten war.

Die vedischen Arier

Weiter östlich breitete sich im zweiten Jahrtausend vor Christus die Kultur der vedisch sprechenden Arier von Zentralasien in das Indus-Tal aus. Aufzeichnungen ihrer arithmetischen Methoden werden etwa auf das Jahr 1000 v. Chr. datiert. In den Dichtungen, literarischen Texten und Weisheiten, die in den *Veden* (archaischen Hindu-Schriften) enthalten sind, finden sich neunzehn ihrer mathematischen *Sutras*, also Wort-Formeln. Darin waren arithmetische Methoden codiert, die man als Abkürzung oder als Variante bei bestimmten Aufgaben anwenden konnte. Eines davon zum Beispiel war das Sutra „vertikal und kreuzweise", das bei der Multiplikation ganzer Zahlen half – in unserem modernen System eine eher langwierige Rechnung. Wenn sie beispielsweise die Zahlen 13 und 24 multiplizieren wollten (die wir der Einfachheit halber mit unseren vertrauten Symbolen darstellen), dann schrieben sie zunächst die 13 über die 24 in ein Gitter, wie hier gezeigt ist.

1	3
2	4

Ein Zahlengitter der vedischen Arier