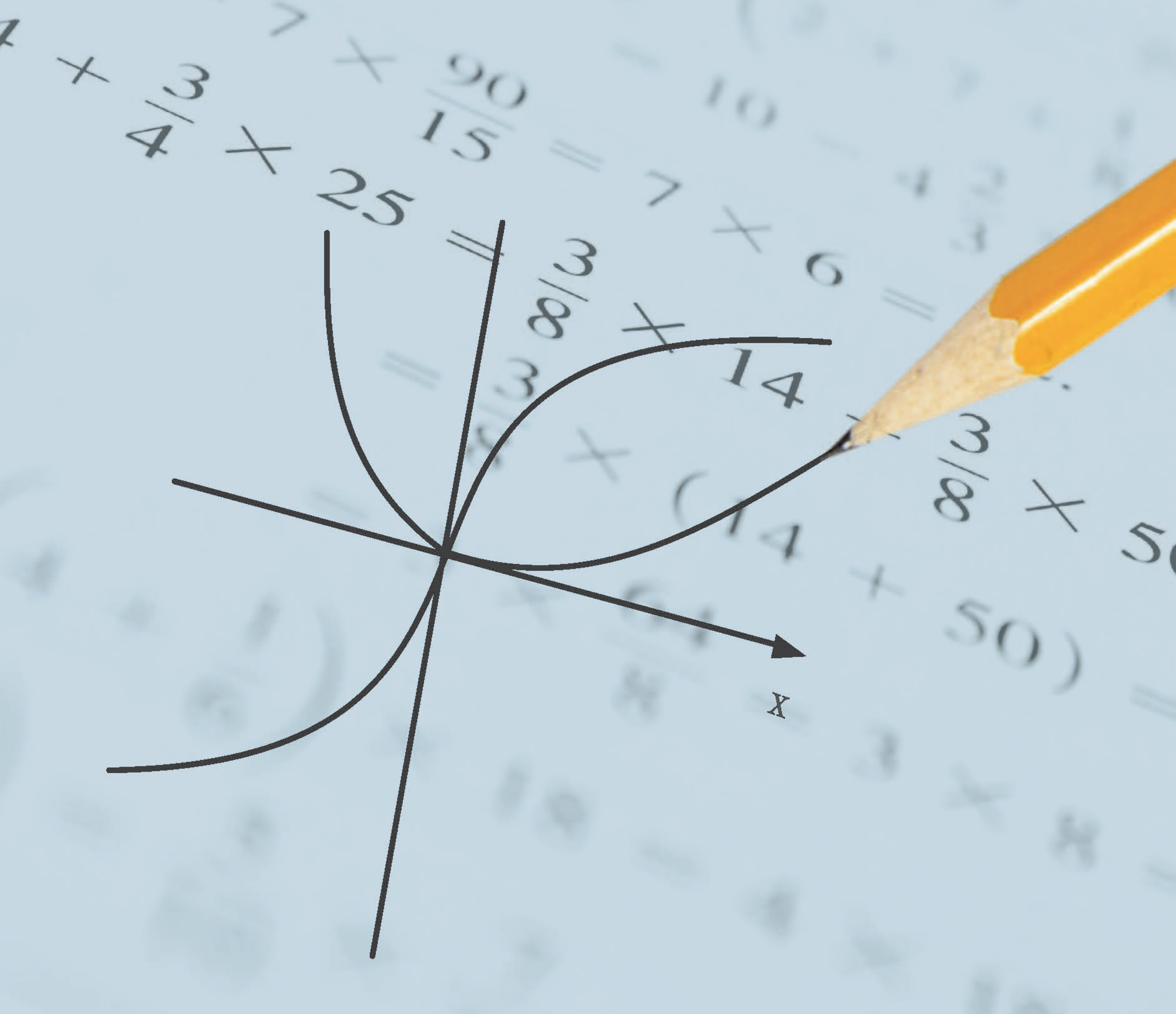
UN
UNIVERSIDAD DEL NORTE
Editorial

Ismael Gutiérrez García
Jorge Robinson Evilla

Álgebra lineal



Álgebra lineal

Álgebra lineal

Ismael Gutiérrez García
Jorge Robinson Evilla

Barranquilla
Colombia, 2012

UNIVERSIDAD DEL NORTE
Editorial

Gutiérrez García, Ismael.
Álgebra lineal / Ismael Gutiérrez García, Jorge Robinson Evilla. -- Barranquilla : Editorial Universidad del Norte, 2012.

vii, 205 p. : il. ; 24 cm.
Incluye referencias bibliográficas (p. 199) e índice.
ISBN 978-958-741-214-7

1. Álgebras lineales. I. Robinson Evilla, Jorge. III. Tít.

(512.5 G984 23 ed.) (CO-BrUNB)

UNIVERSIDAD DEL NORTE
www.uninorte.edu.co
Km 5, vía a Puerto Colombia, A.A. 1569
Barranquilla (Colombia)

Coordinación editorial
Zoila Sotomayor O.

Editor
Humberto Llinás Solano

Corrección de textos
Henry Stein

Diseño de portada
Angélica Albarracín

Procesos técnicos
Munir Kharfan de los Reyes

Hecho en Colombia
Made in Colombia

Autores

ISMAEL GUTIÉRREZ GARCÍA

Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad del Atlántico. Magíster en Matemáticas, convenio Universidad del Valle-Universidad del Norte. Doctor en Matemáticas (Dr. rer. nat) de la Universidad de Johannes Gutenberg de Mainz (Alemania) y miembro de la Sociedad Colombiana de Matemáticas. Desde 1993 es profesor de tiempo completo de la Universidad del Norte y actualmente es director del grupo de investigaciones en Álgebra de esta institución.

JORGE ROBINSON EVILLA

Licenciado en Ciencias de la Educación, énfasis en Matemáticas y Física, de la Universidad del Atlántico. Especialista en Matemáticas de la Universidad del Norte. Desde 1995 es profesor catedrático de la Universidad del Norte.

Índice general

Prólogo **VII**

1. Preliminares **1**
1.1. Cuerpos 1
1.2. Ecuaciones lineales 8
1.3. Ejercicios. 15

2. Espacios vectoriales **17**
2.1. Primeras definiciones 17
2.2. Subespacios 20
2.3. Dependencia e independencia lineal 28
2.4. Base y dimensión 36
2.5. El espacio cociente 46
2.6. Ejercicios 50

3. Homomorfismos **55**
3.1. Definiciones básicas 55
3.2. Teoremas de isomorfía 63
3.3. La K-álgebra $\mathrm{End}_K(V)$ 67
3.4. El grupo lineal general $\mathrm{GL}(V)$ 74
3.5. El rango de un homomorfismo 77
3.6. Ejercicios 80

4. Matrices y ecuaciones lineales **85**
4.1. La K-álgebra $\mathrm{Mat}(n, K)$ 85
4.2. El grupo lineal general $\mathrm{GL}(n, K)$ 94
4.3. Rango de una matriz 105
4.4. Sumas directas y proyecciones 113
4.5. Ecuaciones lineales 121

4.6. La factorización LU de una matriz 127
4.7. Ejercicios 131

5. El determinante 139
5.1. Grupo simétrico y el signo 139
5.2. La función determinante 146
5.3. Polinomio característico y auto-valores 164
5.4. Ejercicios 170

6. Espacios normados y espacios euclidianos 173
6.1. Normas y algunos conceptos topológicos 173
6.2. Espacios euclidianos 183
6.3. Ejercicios 194

Bibliografía y referencias 199

Prólogo

Esta propuesta editorial inicia su proceso de redacción con tres objetivos claros. El primero es lograr un texto de Álgebra lineal que contenga las definiciones y los teoremas necesarios para comprender los más importantes y fundamentales espacios vectoriales que se utilizan para la construcción y el desarrollo de diferentes ramas de la matemática moderna.

El segundo objetivo es incluir la demostración de cada uno de los lemas y teoremas presentados, a excepción de las que resultan repetitivas, o de aquellas que por su condición de ejercicio formativo se han propuesto como tareas para el lector.

El tercer objetivo es mostrar un gran número de ejemplos que ayuden a los estudiantes en la comprensión y aplicación de definiciones, lemas y teoremas.

Iniciamos el texto con un estudio preciso y completo sobre las nociones de cuerpos y sistemas de ecuaciones lineales reales.

En el capítulo segundo definimos los espacios vectoriales y presentamos los resultados básicos sobre base y dimensión de un espacio vectorial.

En el tercer capítulo tratamos los homomorfismos entre espacios vectoriales, haciendo énfasis en los teoremas de isomorfía y en la contrucción de bases para espacios vectoriales de homomorfismos.

En el cuarto capítulo se estudiamos las matrices aprovechando su relación directa con los homomorfismos para agilizar algunas demostraciones.

En el capítulo quinto nos referimos a funciones de volumen y en particular la función determinante. Esta última la analizamos a partir del grupo simétrico de grado n.

Terminamos el texto con el sexto capítulo, en el cual presentamos las primeras definiciones y teoremas sobre espacios normados y euclidianos.

Capítulo 1

Preliminares

Contenido

1.1. Cuerpos **1**
1.2. Ecuaciones lineales **8**
1.3. Ejercicios. **15**

Este capítulo corresponde a las definiciones y los teoremas básicos sobre cuerpos. Comenzamos con la definición de grupo y algunas propiedades importantes de ellos, además de algunos ejemplos de grupos de uso frecuente tales como el grupo simétrico de grado n, con $n \in \mathbb{N}$ y el grupo de las clases residuales módulo un número primo p.

1.1. Cuerpos

Iniciamos esta sección presentando la definición de grupo.

1.1.1 Definición. Sea G un conjunto no vacío tal que a cada par $(x, y) \in G \times G$ está asociado un único $x \cdot y \in G$, esto es, sobre G está definida una operación binaria "$\cdot$". (En lo sucesivo escribimos simplemente xy en lugar de $x \cdot y$). El par $(G, \cdot)$ se denomina un **grupo** si se verifican:

(G1) Para todo $x, y, z \in G$ se cumple $x(yz) = (xy)z$.

(G2) Existe un elemento $e \in G$ tal que $xe = ex = x$, para todo $x \in G$.

(G3) Para cada $x \in G$ existe un $y \in G$ tal que $xy = yx = e$.

Si para cada $x, y \in G$ se cumple, además, que $xy = yx$, entonces decimos que G es un grupo **abeliano** o **conmutativo**. Es usual escribir los grupos abelianos de forma aditiva, es decir, escribimos $x+y$ en lugar de xy. Si solo se verifica el axioma (G1), entonces llamamos a G un **semigrupo**. Si G es un conjunto finito, entonces al número de elementos de G lo denominamos **orden** de G y lo notamos con $|G|$.

1.1.2 Ejemplos. Algunos ejemplos de grupos:

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son grupos abelianos con respecto a la suma usual.

2. Si K es $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, entonces $K^\times := \{x \in K \mid x \neq 0\}$ es un grupo abeliano con respecto a la multiplicación usual.

3. Sea Ω un conjunto no vacío. El conjunto de todas las biyecciones de Ω en sí mismo, notado con $\mathrm{Sym}(\Omega)$, es un grupo con respecto de la composición de funciones usualmente denominado **grupo de permutaciones** de Ω. Un caso especial se tiene cuando $\Omega = \{1, \ldots, n\}$. En este caso escribimos $\mathrm{Sym}(n)$ en lugar de $\mathrm{Sym}(\Omega)$ y hablamos del **grupo simétrico de grado** n. Se verifica que $|\mathrm{Sym}(n)| = n!$.

4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para $x, y \in \mathbb{Z}$ definimos

   $$x \equiv y \mod n \Leftrightarrow n \mid (x-y),$$

   la relación de congruencia módulo n. Esta define sobre $\mathbb{Z}$ una relación de equivalencia. La clase de equivalencia de $x \in \mathbb{Z}$ está dada por

   $$[x] = \{nk + x \mid k \in \mathbb{Z}\} = x + n\mathbb{Z}.$$

   Sabemos que

   $$\begin{aligned} [x] = [y] &\Leftrightarrow x \equiv y \mod n \\ &\Leftrightarrow x = nk + y, \text{ con } k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

   es decir, las clases de equivalencias distintas son $[0], [1], \cdots, [n-1]$. Si consideramos ahora el conjunto

   $$\mathbb{Z}_n := \{[x] \mid 0 \leq x < n\},$$

podemos definir sobre este dos operaciones binarias, suma y multiplicación de la siguiente manera:

$$[x] + [y] := [x + y]. \tag{1.1}$$

$$[x] \cdot [y] := [xy]. \tag{1.2}$$

Demostremos que estas operaciones están bien definidas: supongamos que $[a] = [a']$ y $[b] = [b']$. Entonces $a = a' + nk$ y $b = b' + nt$, con $k, t \in \mathbb{Z}$. Entonces $a + b = (a' + b') + n(k + t)$, lo cual demuestra que $[a + b] = [b + b']$. Es decir, $[a] + [b] = [a'] + [b']$. No es difícil verificar que $(\mathbb{Z}_n, +)$ es un grupo abeliano, con módulo $[0]$ y $-[x] = [n - x]$.

Por otro lado, $ab = a'b' + n(b'k + a't + nkt)$. Esto significa que $[ab] = [a'b']$. Es decir, $[a] \cdot [b] = [a'] \cdot [b']$.

Es importante anotar que en general, $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ no es un grupo.

Algunas consecuencias de la definición de grupo se presentan a continuación.

1.1.3 Lema. Sea G un grupo. Entonces:

1. Existe un único $e \in G$ que satisface (G2).
2. Para cada $x \in G$ existe un único $y \in G$ tal que $yx = e$. Usamos la notación x^{-1} para denotar el inverso de $x \in G$.
3. $(x^{-1})^{-1} = x$, para todo $x \in G$.
4. $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, para todo $x, y \in G$.

Demostración.

1. Sea $e' \in G$ tal que $e'x = xe' = x$, para todo $x \in G$. Entonces, $e = ee' = e'$.
2. Sea $x \in G$ y supongamos que existen $y, z \in G$ tales que $yx = xy = e = xz = zx$. Entonces $y = ey = (zx)y = z(xy) = ze = z$.
3. De la definición de x^{-1} se sigue que $x^{-1}x = xx^{-1} = e$, esto es, x es el inverso de x^{-1}. En consecuencia $x = (x^{-1})^{-1}$.

4. De la definición de grupo se sigue:

$$(y^{-1}x^{-1})(xy) = y^{-1}(x^{-1}x)y = y^{-1}(ey) = y^{-1}y = e,$$

Entonces $(y^{-1}x^{-1}) = (xy)^{-1}$, lo cual completa la prueba. $\square$

En el siguiente lema se demuestra que en un grupo se cumplen las **leyes de cancelación** a izquierda y a derecha.

1.1.4 Lema. Sean G un grupo y $a, x, y \in G$.

1. Si $ax = ay$, entonces $x = y$.

2. Si $xa = ya$, entonces $x = y$.

Demostración. Del lema 1.1.3 se sigue:

$$x = ex = (a^{-1}a)x = a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay) = (a^{-1}a)y = ey = y.$$

Similarmente se demuestra la otra afirmación. $\square$

1.1.5 Definición. Sea K un conjunto no vacío sobre el cual están definidas dos operaciones binarias, suma y multiplicación. La terna $(K, +, \cdot)$ se denomina un **cuerpo** (un **campo**) si se verifican las siguientes propiedades

(C1) $(K, +)$ es un grupo abeliano, con módulo 0.

(C2) $(K^{\times}, \cdot)$ es un grupo abeliano, con módulo 1, diferente de 0.

(C3) Para todo $x, y, z \in K$ se cumplen $x(y+z) = xy + xz$ y $(x+y)z = xz + yz$.

1.1.6 Definición. Sea K un cuerpo y U un subconjunto no vacío de K. Diremos que U es un subcuerpo de K, si al restringir las operaciones definidas sobre K a U, se verifica que U es un cuerpo.

1.1.7 Observaciones. Sea K un cuerpo. Entonces:

1. Del lema 1.1.3 se sigue 0 y 1 están determinados de manera única.

2. Si $a \in K$ y $b \in K^{\times}$, entonces $-a$ y b^{-1} también están determinados de manera única.

3. Si se cumplen (C1), (C3) y $K^{\times}$ es un semigrupo, entonces K se llama un **anillo**.

4. Si R es un anillo y existe $1 \in R$, entonces R se llama un anillo con **elemento identidad**. Si R es un anillo y $xy = yx$, para todo $x, y \in R$, entonces R se llama **conmutativo**.

1.1.8 Teorema. Sea R un anillo. Entonces:

1. $x0 = 0x = 0$, para todo $x \in R$.

2. $x(-y) = (-x)y = -(xy)$, para todo $x, y \in R$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Note inicialmente que $x0+x0 = x(0+0) = x0 = x0+0$. Aplicando la propiedad cancelativa, se sigue que
$$x0 = 0.$$
Similarmente se demuestra que $0x = 0$.

2. Usando 1. tenemos
$$xy + x(-y) = x(y + (-y)) = x0 = 0.$$
Es decir, $x(-y) = -(xy)$. Similarmente se demuestra que $(-x)y = -(xy)$. $\square$

1.1.9 Ejemplos. Algunos ejemplos de cuerpos y anillos.

1. $\mathbb{Z}$ con las operaciones usuales es un anillo conmutativo con elemento identidad.

2. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales son cuerpos.

3. Sea $n \in \mathbb{N}$. En el ejemplo 1.1.2 se demostró que $\mathbb{Z}_n$ con la suma mód n es un grupo abeliano. La asociatividad y la conmutatividad de la multiplicación se obtienen como consecuencia de la asociatividad y la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$. Similar sucede con la distributividad. Esto nos permite asegurar que $\mathbb{Z}_n$ es un anillo conmutativo. Nótese, además, que $[1][x] = [x][1] = [x]$, para todo $[x] \in \mathbb{Z}_n$. Por lo tanto, $\mathbb{Z}_n$ es también una anillo con elemento identidad.

4. Si p es un número primo, entonces $\mathbb{Z}_p$ es un cuerpo. En efecto, de lo anterior es suficiente demostrar que todo elemento no nulo de $\mathbb{Z}_n$ tiene un inverso multiplicativo. Sea $[0] \neq [x] \in \mathbb{Z}_p$. Entonces $\operatorname{mcd}(x, p) = 1$ y se verifica que existen $t, s \in \mathbb{Z}$ tales que $tx+sp = 1$. Por lo tanto,
$$[t][x] + [s][p] = [1].$$
Pero $[p] = [0]$, en consecuencia $[t] = [x]^{-1}$.

1.1.10 Teorema. Sea K un cuerpo y $x, y \in K$. En tal caso

1. Si $xy = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$
2. Si $a \in K^\times$ y $ax = ay$, entonces $x = y$

DEMOSTRACIÓN.

1. Supongamos que $xy = 0$ y $x \neq 0$. Entonces,
$$y = 1y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}0 = 0.$$
2. $x = 1x = (a^{-1}a)x = a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay) = (a^{-1}a)y = 1y = y.$ □

1.1.11 Definición. Sean K un cuerpo, $a \in K$ y $n \in \mathbb{Z}$. Definimos inductivamente el elemento de K, notado con na, de la siguiente manera
$$na := \begin{cases} 0, & \text{si } \ n = 0 \\ (n-1)a + a, & \text{si } \ n \geq 1 \\ -(|n|a), & \text{si } \ n < 0. \end{cases}$$
Si $n1 \neq 0$, para todo número natural n, entonces diremos que K tiene **característica** cero. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n1 = 0$, entonces el menor número con tal propiedad se llamará la característica de K. Usualmente se nota con $\operatorname{Char}(K)$.

1.1.12 Teorema. Si K es un cuerpo, entonces, $\operatorname{Char}(K)$ es cero o un número primo.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\operatorname{Char}(K) \neq 0$ y, además que $\operatorname{Char}(K) = mn$, con $m, n \in \mathbb{N}$ y $m, n > 1$. Entonces se verifica que
$$0 = (mn)1 = (m1)(n1).$$
Dado que K es un cuerpo, se verifica que $m1 = 0$ o $n1 = 0$, lo cual contradice la minimalidad de la característica. □

1.1.13 Ejemplos. Algunos ejemplos de características.

1. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son cuerpos de característica cero.

2. Si p es un número primo, entonces $\mathbb{Z}_p$ es un cuerpo de característica p. En efecto, $p[1] = [0]$ y si $m < p$, entonces $m[1] \neq [0]$.

1.1.14 Definición. Se define el **cuerpo primo** P de un cuerpo K como la intersección de todos sus subcuerpos. Esto es,

$$P = \bigcap \{U \mid U \text{ es subcuerpo de } K\}.$$

Evidentemente P está contenido en cualquier subcuerpo de K. Es decir, P es el subcuerpo más pequeño de K.

1.1.15 Teorema. Sea K un cuerpo con característica p. Entonces K tiene un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{Z}_p$, el cual denominamos **cuerpo primo** de K.

Demostración. Definimos la función $\varphi : \mathbb{Z}_p \longrightarrow K$ de la siguiente manera:

$$[m] \longmapsto m \cdot 1,$$

para todo $m \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Se verifica sin dificultades que φ es un homomorfismo de anillos, es decir, $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ y $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{Z}_p$.

Demostramos ahora que φ es inyectiva. En efecto, supongamos que $\varphi(x) = \varphi(y)$, con $x \neq y$. Entonces si definimos

$$z := x - y,$$

se verifica que $\varphi(z) = 0$. Por otro lado,

$$\varphi([1]) = \varphi(zz^{-1}) = \varphi(z)\varphi(z^{-1}) = 0.$$

En consecuencia, para todo $[m] \in \mathbb{Z}_p$ se verifica que

$$\varphi([m]) = \varphi([m][1]) = \varphi([m])\varphi([1]) = 0,$$

lo cual es contradictorio. Entonces φ define un isomorfismo entre $\mathbb{Z}_p$ y P.

Finalmente, todo subcuerpo de K tiene a 1 como elemento y, por lo tanto, también a $m \cdot 1$; es decir, todo subcuerpo de K contiene a $\mathrm{Im}(\varphi)$ y así, este debe ser su cuerpo primo. $\square$

1.2. Ecuaciones lineales

1.2.1 Definición. Una **ecuación lineal** en las n-variables $x_1, \ldots x_n$ sobre un cuerpo K es una igualdad de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1.3}$$

donde $a_j, b \in K$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Los escalares $a_1, \ldots, a_n$ se denominan **coeficientes** de la ecuación.

1.2.2 Ejemplos. Las siguientes ecuaciones son lineales, reales, en las variables x, y, z, w.

1. $\sqrt{3}x - 2y + z = 0$
2. $-\frac{1}{2}x - y = \pi$
3. $x + y - z - w = 9$
4. $(\ln 2)x + (\ln 3)y - (\ln 5)z = 1,$

mientras que

1. $\operatorname{sen} x + \cos y - x = 1$
2. $3\sqrt{x} + y + z = 0$
3. $e^x - e^y = 1$
4. $\ln x + \ln y - \ln z = 0$

no son ecuaciones lineales.

1.2.3 Definición. Sean K un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$K^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \in K\}.$$

Sobre este conjunto podemos definir dos operaciones binarias denominadas suma y multiplicación por un escalar de la siguiente manera:

Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $k \in K$

$$\begin{aligned} x + y &:= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ kx &:= (kx_1, \ldots, kx_n). \end{aligned}$$

Un elemento $(c_1, \ldots, c_n) \in K^n$ se denomina una **solución** de la ecuación lineal (1.3) si y solo si $a_1c_1 + \cdots + a_nc_n = b$. El conjunto de todas las soluciones de (1.3) se denomina **conjunto solución**.

1.2.4 Ejemplo. El elemento $(3,0,0) \in \mathbb{R}^3$ es una solución de la ecuación lineal
$$3x - 4y + 15z = 9,$$
mientras que la terna $(1,-1,2)$ no lo es.

Podemos obtener el conjunto solución S de la siguiente manera:
$$\begin{aligned} 3x - 4y + 15z = 9 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x = 4y - 15z + 9 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{3}(4y - 15z + 9). \end{aligned}$$
Entonces
$$\begin{aligned} S &= \big\{(x,y,z) \mid x = \tfrac{1}{3}(4y - 15z + 9),\ y, z \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \{(\tfrac{1}{3}(4y - 15z + 9), y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\tfrac{1}{3}(4t - 15s + 9), t, s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$
Podemos observar que $(3,0,0)$ se obtiene con los valores $t = 0$ y $s = 0$.

1.2.5 Definición. Un conjunto de m-ecuaciones lineales en las n-variables $x_1, \ldots x_n$ sobre un cuerpo K:
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1.4}$$
con $a_{ij}, b_j \in K$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y todo $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ se denomina un **sistema** de m ecuaciones lineales en las n variables $x_1, \ldots x_n$ sobre K. Si $b_1 = \cdots = b_m = 0$, entonces el sistema lineal se denomina **homogéneo**. Notemos que el vector $(0, 0, \ldots, 0) \in K^n$ siempre es solución de un sistema lineal homogéneo. Esta se denominará **solución trivial** o solución nula.

El sistema de ecuaciones anterior puede expresarse en la forma
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{1.5}$$

1.2.6 Definición. Si S_j es el conjunto solución del la j-esima ecuación del sistema (1.4), digamos
$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j m,$$
entonces $S := \bigcap_{j=1}^{m} S_j$ es el conjunto solución del sistema.

1.2.7 Definición. Dos sistemas de m ecuaciones lineales en n variables sobre un cuerpo K se denominan **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.

Dado un sistema de ecuaciones lineales, ¿como obtener otro sistema de ecuaciones que sea equivalente a este y que, además, su conjunto solución sea fácil de calcular? En el siguiente teorema presentamos una respuesta a ese interrogante.

1.2.8 Teorema. El sistema de dos ecuaciones lineales en n variables sobre un cuerpo K

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \end{aligned} \tag{1.6}$$

en el que $a_{11} \neq 0$ es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \end{aligned} \tag{1.7}$$

donde

$$\begin{aligned} a'_{2j} &= a_{21}a_{1j} - a_{11}a_{2j}, \ j = 2, \ldots, n \\ b'_2 &= a_{21}b_1 - a_{11}b_2. \end{aligned}$$

Demostración. Para $j = 1, 2$ definimos

$$L_j := a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n.$$

Entonces los sistemas de ecuaciones (1.6) y (1.7) se transforman, respectivamente, en

$$\begin{aligned} L_1 &= b_1 \\ L_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{1.8}$$

y

$$\begin{aligned} L_1 &= b_1 \\ a_{21}L_1 - a_{11}L_2 &= a_{21}b_1 - a_{11}b_2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Sea $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ una solución del sistema (1.6). Entonces

$$\begin{aligned} a_{21}L_1 &= a_{21}b_1 \\ -a_{11}L_2 &= -a_{11}b_2 \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$a_{21}L_1 - a_{11}L_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2.$$

Es decir, toda solución de (1.6) es una solución de (1.7).

Recíprocamente, supongamos que $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ una solución del sistema (1.7). Entonces

$$a_{21}L_1 = a_{21}b_1$$

y se sigue que

$$\begin{aligned} a_{21}L_1 - (a_{21}L_1 - a_{11}L_2) &= a_{21}b_1 - (a_{21}b_1 a_{11}b_2) \\ a_{11}L_2 &= a_{11}b_2 \\ a_{11}^{-1}(a_{11}L_2) &= a_{11}^{-1}(a_{11}b_2) \\ L_2 &= b_2, \end{aligned}$$

con lo cual se tiene el resultado. $\square$

1.2.9 Definición. Llamamos **transformaciones elementales** sobre las ecuaciones de un sistema lineal las siguientes:

(a) Multiplicar la i-ésima ecuación E_i por una constante no nula k.

$$kE_i \to E_i.$$

(b) Sumar la i-ésima ecuación a la j-ésima ecuación.

$$E_i + E_j \to E_j.$$

Demostramos más adelante que las siguientes operaciones se obtienen a partir de transformaciones elementales:

(c) Intercambiar la i-ésima ecuación con la j-ésima ecuación.

$$E_i \leftrightarrow E_j.$$

(d) Sumar k-veces la i-ésima ecuación a la j-ésima ecuación.

$$kE_i + E_j \to E_j.$$