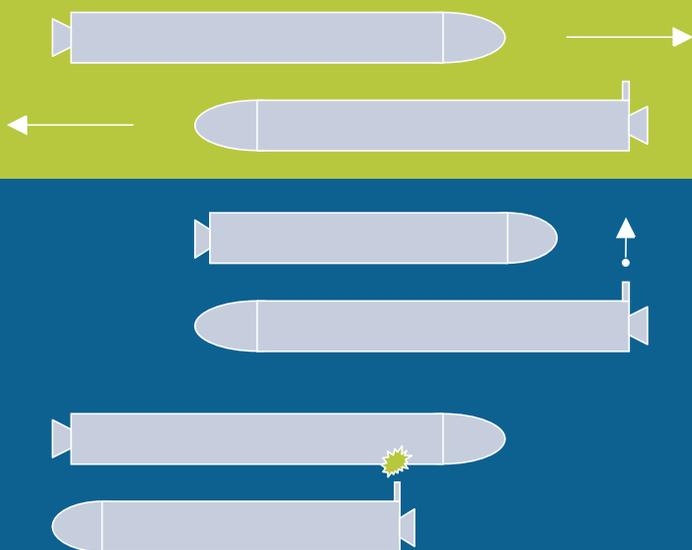


Jürgen Freund

Spezielle Relativitätstheorie für Studienanfänger



Dr. Jürgen Freund, Ph.D.

geboren 1955 in Ulm; Studium der Physik, Geographie und Meteorologie in München, Karlsruhe, Edmonton und Seattle; Promotion in Klimatologie (Universität Karlsruhe, 1983); Promotion in Festkörperphysik (University of Washington, Seattle, 1990); Lehrtätigkeit an Schulen und Hochschulen – derzeit am Schubart-Gymnasium und der Fachhochschule in Aalen

Kontakt: freund@relativitaet.info

Jürgen Freund
Spezielle
Relativitätstheorie
für Studienanfänger

v/dlf

vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-7281-3694-7

DOI 10.3218/3694-7

© 2007, vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Internet: www.vdf.ethz.ch

E-Mail: verlag@vdf.ethz.ch

Zum Geleit

Wie eine viel zitierte Anekdote berichtet, wurde Sir Arthur Eddington von einem seiner Assistenten dafür bewundert, dass er einer von drei Männern auf der ganzen Welt sei, der die Relativitätstheorie von Albert Einstein wirklich versteht.

Im Jahre 1987, als die Spezielle Relativitätstheorie schon über achtzig Jahre alt war, hat sein ehemaliger Kollege und Biograph, Abraham Pais, in einer Rede zur Feier des 900. Jahrestages der Universität Bologna diese Zahl aktualisiert: „Es ist eine optimistische Schätzung, dass nur einer von hunderttausend heute lebenden Menschen versteht, worum es bei Einsteins Relativitätstheorie wirklich geht.“

In der Speziellen Relativitätstheorie, von der hier allein die Rede sein soll, werden die Erfahrungen von Beobachtern verglichen, die sich relativ zueinander geradlinig-gleichförmig bewegen. Sie beruht auf zwei Prinzipien:

Das erste, das so genannte Relativitätsprinzip, fordert, dass für zwei Beobachter in gleichförmiger Relativbewegung *alle* Gesetze der Physik die gleiche Form haben müssen. Bildlich gesprochen: In einem geradlinig-gleichförmig dahinfahrenden Eisenbahnwagen, dessen Fenster verdunkelt sind, damit man die vorüberziehende Umgebung nicht sehen kann, soll *kein* physikalisches Experiment, sei es die Schwingung eines Pendels, das Sieden von Wasser oder das Ticken eines Geigerzählers, die Bestimmung der Geschwindigkeit des Wagens relativ zum Bahndamm gestatten.

Das zweite Prinzip besagt, dass jeder Beobachter die gleiche Lichtgeschwindigkeit c misst, egal ob das Licht von einem ruhenden oder einem gleichförmig bewegten Körper emittiert wird. Während das Relativitätsprinzip „nur“ eine Verallgemeinerung des Relativitätsprinzips der Galilei-Newtonschen Mechanik auf die ganze Physik ist, steckt in dem Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit die eigentliche Zumutung an unser Denken. Entspricht es doch unserer Alltagserfahrung, dass ein Reisender, der in einem Zug, welcher mit 130 km/h an uns vorüberfährt, mit der Geschwindigkeit 5 km/h nach vorn läuft, mit 135 km/h vorankommt, so soll dies für Licht nicht gelten! Zündet der Reisende das Licht einer Lampe an, breitet es sich – so das auf experimentelle Erfahrung gegründete Prinzip – sowohl relativ zum Zug als auch relativ zum Bahndamm mit der Geschwindigkeit c aus.

Indem das Relativitätsprinzip eine kinematische Forderung an alle Naturgesetze stellt, ist die Spezielle Relativitätstheorie keine Theorie, die neben Mechanik, Elektrodynamik usw. tritt, sondern alle physikalischen Disziplinen müssen daraufhin untersucht werden, ob sie den beiden Grundprinzipien der Speziellen Relativitätstheorie genügen. Für die Maxwell'schen Gesetze der Elektrodynamik ist dies der Fall, für die klassische Mechanik nicht. Deren

Anpassung an die Prinzipien der Relativitätstheorie führt zu vielen Konsequenzen, von denen die berühmte Gleichung $E = mc^2$ nur die bekannteste ist. Auch das Paulische Ausschließungsprinzip – um nur eines von vielen Beispielen aus der Quantenphysik zu nennen –, welches den Schalenbau der Atomhülle und damit eigentlich die gesamte Chemie begründet, ist tief in der Speziellen Relativitätstheorie verankert.

Die von Minkowski gegebene Formulierung der Relativitätstheorie im Rahmen einer vierdimensionalen Raum-Zeit-Geometrie ist nicht nur deren mathematische Vollendung. Sie bringt auch eine beträchtliche Vereinfachung unseres Weltbildes mit sich, indem sie uns die Augen für die vierdimensionale Einheit nicht nur von Raum und Zeit, sondern auch von Impuls und Energie, Kraft und Leistung, elektrischer Strom- und Ladungsdichte usw. öffnet. Schließlich gestattet sie eine besonders anschauliche Darstellung raum-zeitlicher Abhängigkeitsgebiete in Gestalt des Lichtkegels.

Heute geht es längst nicht mehr vorrangig darum, die Spezielle Relativitätstheorie experimentell zu bestätigen. Schon in ihren frühen Jahren war ihre „innere Vollkommenheit“ für Einstein ein so starkes Argument, dass er bei vermeintlichen Widersprüchen zwischen seiner Theorie und dem Experiment eher an der Richtigkeit des Experiments als an der Theorie zweifelte. Alle „äußeren Bewährungen“ hat die Theorie bestanden, und sie besteht sie noch heute in Experimenten mit wachsender Präzision. Beim Beschleunigerbau und bei der routinemäßigen Berücksichtigung der relativistischen Uhrensynchronisation im Global Positioning System – es seien nur diese beiden Beispiele genannt – ist die Spezielle Relativitätstheorie eine Ingenieurwissenschaft. In diesem Sinne ist diese Theorie, die am Anfang jener Entwicklung stand, die wir „moderne Physik“ zu nennen pflegen, selbst klassisch geworden.

Zu keiner Zeit wurde die Spezielle Relativitätstheorie als Wissenschaft von Paradoxien geplagt, als Lehrgegenstand schon. Paradoxien wie das Zwillingsparadoxon bringen zum Ausdruck, dass Verstehen und Lehrbarkeit einer Theorie Zeit brauchen und dies um so mehr, wenn am Verständnis so vertrauter Begriffe wie Raum und Zeit gerüttelt wird. Aus didaktischen Gründen sind uns diese Paradoxien auch dann noch (oder wieder) willkommen, wenn sie eigentlich längst keine mehr sind, weil sie den Lernenden darin schulen, tiefgründig über die Theorie nachzudenken. Damit ist auch die Hauptschwierigkeit benannt, der der Lernende begegnet, nämlich die Überwindung seiner Denkgewohnheiten. Jeder Lehrende weiß zudem aus eigener Erfahrung, welche Sorgfalt im Umgang mit der Sprache vonnöten ist, um Erklärungen ohne vorzeitigen Rückgriff auf den Formalismus der Theorie geben zu können. Wenigstens im Fall der Speziellen Relativitätstheorie ist die Mathematik einmal nicht das Hauptproblem des Lernenden. Nach Sexl reicht sogar „eine rudimentäre Kenntnis des Quadratwurzelziehens ... bereits aus, um den Herleitungen mathematisch folgen zu können.“

An den Hochschulen ist die Spezielle Relativitätstheorie selbstverständlich Bestandteil der Ausbildung. Jeder Student des Diplomstudienganges Physik lernt in seiner Mechanik- oder Elektrodynamik-Vorlesung die Grundzüge der Theorie kennen. Das reicht jedoch oft nicht, um ein „physikalisches Gefühl“ dafür zu entwickeln, warum Effekte wie Zeitdilatation oder Längenkontraktion eigentlich auftreten. Wer mehr wissen will, kann Spezialvorlesungen besuchen.

Auch in die Lehrpläne der Schulen hat die Spezielle Relativitätstheorie längst Eingang gefunden, meist jedoch in einem Zeitumfang, der weder der Bedeutung der Theorie noch dem übergroßen Interesse der Schüler an ihr gerecht wird. Dass das so ist, können wir verstehen, ohne dafür Verständnis haben zu dürfen. Noch heute kann nämlich ein Lehramtsstudent Physiklehrer werden, ohne an der Hochschule die Relativitätstheorie oder gar ihre Didaktik so kennen zu lernen, dass er sie unterrichten kann. Älteren Kollegen ging es nicht anders. Einzelne Lehrplanverantwortliche meinen auch noch immer, das berühmte Stoff-Zeit-Problem dadurch lösen zu können, dass sie auf die Relativitätstheorie mit dem Argument ganz verzichten, sie sei mit ihren Gedankenexperimenten und Minkowski-Diagrammen ja eigentlich keine Physik. Solche „Argumente“ lassen sich schnell entkräften. Gedankenexperimente und die Verbindung von Physik und Geometrie sind typische methodische Elemente nicht nur, aber vor allem der Physik des 20. Jahrhunderts, die sich exemplarisch an der Speziellen Relativitätstheorie sogar in der Schule genügend tiefgründig demonstrieren lassen. Und im Übrigen lenkt gerade diese Theorie mit ihren operationalen Vorschriften, wie etwa der Uhrensynchronisation, die Aufmerksamkeit stark auf das, was messbar ist und worin der Unterschied zwischen Messen und Beobachten besteht.

Aus dieser Zustandsbeschreibung, soweit sie die Situation der Relativitätstheorie an der Schule betrifft, wird ersichtlich, dass die Ausbildung der Lehramtsstudenten an der Hochschule verbessert werden muss und dass es einen akuten Fortbildungsbedarf bereits praktizierender Lehrer gibt. Dabei kommt es neben der Aufnahme didaktischer Innovationen wie stets in einer guten Didaktik darauf an, zwischen verschiedenen Anspruchsniveaus und Sprachebenen zu vermitteln.

Der Autor des vorliegenden Lehrbuches der „Speziellen Relativitätstheorie für Studienanfänger“ hat sich diesen Anforderungen gestellt. Er hat vor allem Physikstudenten der ersten beiden Semester als Adressaten im Blick, die sich noch vor ihrer Ausbildung in Theoretischer Physik mit der Speziellen Relativitätstheorie beschäftigen wollen. Für Lehramtsstudenten enthält dieses Buch alles, was sie an zu vermittelndem Wissen und an Hintergrundwissen für sich selbst benötigen. Die Kapitel 1 bis 4, 7 bis 9, 15, 20, 23, 24, 26 und 27 sowie z.T. die Kapitel 6, 14 und 29 bieten eine gute Grundlage für erfahrene Lehrer,

die im Umfang von wenigstens 15 Stunden einen Leistungskurs oder eine Arbeitsgemeinschaft konzipieren wollen. Schließlich ist das Buch ausführlich genug geschrieben, damit es interessierte Schüler der Oberstufe gewinnbringend zur Hand nehmen können. Mit Ausnahme des Teils IV können sie sogar den mathematischen Herleitungen, die nicht zu schwierig, aber manchmal etwas umfangreicher sind, als es ihren Gewohnheiten entspricht, Zeile für Zeile folgen.

So ist dem Buch eine weite Verbreitung an Hochschulen und Schulen und dementsprechend dem Autor die erhoffte große Leserschaft zu wünschen.

Karl-Heinz Lotze

(Professor für Didaktik der Physik und Astronomie)

Jena, im April 2004

Vorwort

Die Spezielle Relativitätstheorie ist seit ihrer Entstehung vor einhundert Jahren zu einem Fundament der modernen Physik geworden. Sie wurde mittlerweile in einer Vielzahl von Versuchen überprüft und mit großer Genauigkeit bestätigt. An der Richtigkeit dieser Theorie kann kein vernünftiger Zweifel mehr bestehen.

Direkt nach ihrer Entdeckung durch Albert Einstein im Jahre 1905 wurde die Spezielle Relativitätstheorie nur sehr langsam akzeptiert, weil sie zahlreiche Vorhersagen macht, die dem von Einstein so sehr gegeißelten gesunden Menschenverstand widersprechen und sich darüber hinaus lange der experimentellen Überprüfung entzogen. Erst mit der Entstehung der Teilchen- oder Hochenergiephysik konnte Materie bis zu sehr hohen Geschwindigkeiten, nämlich nahe der Lichtgeschwindigkeit, beschleunigt werden, womit die Spezielle Relativitätstheorie nicht nur bestätigt, sondern sogar zu einer technischen Voraussetzung für den Apparatebau wurde. Die in den letzten zehn bis zwanzig Jahren zu beobachtende Ausweitung der physikalischen Forschungsfront in Richtung Astronomie und Kosmologie bringt der Speziellen und vor allem der darauf aufbauenden Allgemeinen Relativitätstheorie einen beachtlichen Bedeutungszuwachs. Da aber Astrophysik mittlerweile auf ein ganz ausgeprägtes Interesse breiter Kreise wissenschaftlich interessierter Leser stößt, gelangen mit ihr auch die beiden Relativitätstheorien zu ungeahnter Öffentlichkeit. Die Faszination, die Astronomie bei Kindern und Jugendlichen auslöst, sei hier nur am Rande erwähnt, gehört aber zu den beeindruckendsten Erscheinungen in der heutigen Schule.

Dennoch spielt die Spezielle Relativitätstheorie in der schulischen und universitären Bildung eine eher marginale Rolle – von der Allgemeinen Relativitätstheorie ganz zu schweigen. Beide haben den Nimbus, schwer verständlich und daher den besonders begabten Spezialisten in der Physik vorbehalten zu sein. Die Verklärung der Person Einsteins zum größten Genie der Wissenschaftsgeschichte trägt auch nicht gerade dazu bei, mentale Hürden vor seinem Werk abzubauen. Eine Popularisierung der Speziellen Relativitätstheorie für mathematisch und physikalisch Vorgebildete unter voller Beibehaltung ihrer Substanz tut daher Not.

Dieses Lehrbuch für Studienanfänger möchte versuchen, einen einfachen Zugang zur Speziellen Relativitätstheorie zu verschaffen. Es wendet sich an alle, die das erste Jahr ihres Physikstudiums mit Erfolg (und Spaß) absolviert haben. Auch Abiturienten, die mit Engagement und Erfolg in ihren Mathematik- und Physikkursen mitgemacht haben, können dieses Buch studieren, wenn sie sich nicht davor scheuen, den einen oder anderen ihnen noch nicht bekannten mathematischen Formalismus in einem Begleitbuch nachzuarbeiten.

Für den Leser wird es dann eine Entdeckung sein, dass es nicht die Mathematik ist, die die sprichwörtliche Schwierigkeit der Speziellen Relativitätstheorie ausmacht. Ungewohnt ist vielmehr die große Schärfe, mit der bisweilen nachgedacht werden muss, bevor eine ausgesprochen einfache Formelzeile zu Papier gebracht oder interpretiert werden kann. Die Probleme der Relativitätstheorie lassen sich nämlich viel weniger mechanisch lösen als die Probleme der vorrelativistischen Physik. Ein Lehrbuch der Relativitätstheorie für Anfänger muss also gerade da, wo unsere Vorstellung nicht mehr mitspielt, wo wir im Gestrüpp von Bezugssystemen, Kontraktionen und Dilatationen den Überblick verlieren, mit vielen gut überlegten Worten nachhelfen, damit der rote Faden nicht verloren geht.

Es ist nicht unter dem Niveau eines Lehrbuches für Anfänger, alle Rechnungen so ausführlich darzulegen, dass von Zeile zu Zeile mitgedacht werden kann. Sprunghafte Rechnungen werden von den Studienanfängern, die alles bis ins letzte Detail verstehen wollen, also von den besten, oft als Affront betrachtet. Sie möchten gerne einen neuen und in diesem Falle sehr ungewohnten Stoff wenigstens mit ein paar Beispielrechnungen detailliert vorgeführt bekommen. Das Lernen von Physik ist nämlich im weitesten Sinne mit dem Erlernen einer Fremdsprache zu vergleichen. Kein Sprachbuch erschöpft sich aber in der Darlegung der Grammatik und des Wortschatzes und überlässt die Bildung der ersten Sätze den Lernenden selbst. Der Leser wird also nachdrücklich aufgefordert, Zeile für Zeile nachzuvollziehen, ggf. mit Bleistift und Papier, falls auch diese Darstellung noch immer nicht ausführlich genug ist.

Ein flüchtiger Blick durch dieses Buch sollte also niemanden davor abschrecken, sich mit dem hierin ausgebreiteten Stoff auseinander zu setzen, weil in manchen Kapiteln die Zahl der Formelzeilen die Zahl der Textzeilen zu übertreffen scheint. Je mehr Formelzeilen in einem wissenschaftlichen Buch auftreten, umso leichter ist es zu verstehen! Nichts ist für den Anfänger schlimmer als mathematische Entwicklungen, die durch Textpassagen abgekürzt werden. Damit wird Wissenschaft zur Geheimsache für Eingeweihte gemacht. Formeln aber sind im Sinne des Wortes demokratisch und darüber hinaus auch wahrhaft international! Nur für die populärwissenschaftliche Literatur, die für einen ganz anderen Leserkreis geschrieben wird, gilt das berühmte Bonmot, dass sich mit jeder zusätzlichen Formel die Zahl der verkauften Exemplare halbiert. Bei den schätzungsweise 1000 Formeln in dieser Schrift müsste der potenzielle Leserkreis tatsächlich astronomisch groß sein, damit nach einer Reduktion um den Faktor 2^{1000} wenigstens noch ein Leser übrig bleibt. Vielleicht gibt es aber auch ein gegenläufiges Gesetz, dass sich die Zahl der verkauften Exemplare mit jeder Abbildung verdoppelt. Dann wären die ca. 100 Abbildungen in dieser Schrift nicht nur didaktisch geboten, sondern sogar verkaufsfördernd.

Um den Leser, der gänzlich ohne Vorkenntnisse der Relativitätstheorie kommt, an die Hand zu nehmen, sind alle Kapitel, die beim ersten Lesen übersprungen werden dürfen, weil sie nichts wesentlich Neues, sondern nur Vertiefung bieten, mit einem Stern gekennzeichnet. Dadurch reduziert sich der Text auf die Hälfte. Für einen Studenten, der sich auf ein Examen vorbereiten will, aber auch für einen Wissenschaftler, der schnell eine Formelsammlung zur Relativitätstheorie braucht, sind die grau unterlegten Felder wertvolle Hilfen, um sich zurechtzufinden.

Das vorliegende Lehrbuch der Speziellen Relativitätstheorie geht *medias in res*. Die wissenschaftsgeschichtliche Entwicklung des ausgehenden neunzehnten Jahrhunderts, die zur Speziellen Relativitätstheorie führte, ist zweifellos sehr interessant, ihre Kenntnis ist aber keineswegs eine notwendige Grundlage zum Verständnis der Theorie. Auch Einstein soll keine Notiz davon genommen haben. Leser, die diesen kulturhistorischen Ansatz aber für unverzichtbar halten, finden ausführliche Darstellungen in vielen Büchern. Stattdessen werden gleich Konzepte wie Zeitdilatation, Längenkontraktion, Lorentz-Transformation und Minkowski-Diagramme in großer Ausführlichkeit auf dem Niveau moderner Schulbücher eingeführt. Nach der Erläuterung der Gleichzeitigkeit und dem Additionstheorem für Geschwindigkeiten verlässt das Buch, von kleineren Ausnahmen abgesehen, den Rahmen der Schulbuchphysik und wendet sich dem Kanon der fortgeschrittenen Themen zu, bis hin zum Vierervektor-Formalismus und den Invarianzprinzipien. Dabei wird das Tempo etwas erhöht und den verbesserten mathematischen Fertigkeiten angepasst. Auf den Tensor-Formalismus wird jedoch verzichtet, da er eigentlich erst in der Allgemeinen Relativitätstheorie gebraucht wird. Ein zu frühes Einführen der Tensorrechnung wirkt in jedem Falle abschreckend und ist ganz bestimmt einer der Hauptgründe, warum die Relativitätstheorie unnötigerweise einen so elitären Beigeschmack hat.

Dem aufmerksamen Leser wird nicht entgehen, dass einige grundlegende Ergebnisse der Speziellen Relativitätstheorie gleich mehrfach, und zwar mit ganz unterschiedlichen Ansätzen, hergeleitet werden: die Lorentz-Transformation in einer Raumrichtung z.B. dreimal in den Kapiteln 6 und 15, die Dopplerformel sogar viermal (Kapitel 14, 15 und 31), die Lorentz-Transformation in zwei Raumrichtungen zweimal in Kapitel 18, ebenso die Vereinigung der elektrischen mit der magnetischen Kraft (Kapitel 5 und 33), die Geschwindigkeitsaddition (Kapitel 9 und 30) oder die Aberrationsformel (Kapitel 10 und 31). Man kann dies als Redundanz einstufen oder als Gewinn. Der Anfänger wird sich gewiss freuen, wenn er sieht, dass es, wie so oft in der Physik, viele Wege zum Ziel gibt. Für die Relativitätstheorie, die so lange um ihre Akzeptanz kämpfen musste, hat dies aber eine fundamentale Bedeutung – sie ist in sich abgeschlossen und widerspruchsfrei.

Bei der Lektüre dieses Buches werden hoffentlich viele Leser ihre Fähigkeiten in den mathematischen Methoden der Physik durch Übung verbessern. Darüber hinaus werden sie aber wahrscheinlich nicht viel lernen, was für eine Diplom- oder Doktorarbeit oder das spätere Berufsleben gebraucht werden könnte. Darum geht es auch nicht. Der Leser soll vielmehr in eine Welt entführt werden, die sehr fremdartig ist und, oberflächlich gesehen, paradox, ja geradezu absurd erscheint. Das vollständige geistige Durchdringen dieser vermeintlichen Absurditäten macht den Reiz der Relativitätstheorie aus, sie erweitert den Horizont, sie schafft Weltanschauung, sie bildet im klassischen Sinne des Wortes. In diesem Sinne wünsche ich viel Spaß!

Abschließend möchte ich Emil Wiedemann aus Fürth danken, der sich die Zeit genommen hat, mein Skript in allen Stadien seiner Entstehung gründlich und kritisch zu lesen. Seine Kommentare haben mir immer wieder gute Anregungen gegeben.

Jürgen Freund

Aalen bei Ulm, am 14. März 2004
(Einsteins 125. Geburtstag)

Inhalt

<i>Zum Geleit</i>	<i>iii</i>
<i>Vorwort</i>	<i>vii</i>

TEIL I: EINFÜHRUNG

1.	DIE POSTULATE DER SPEZIELLEN RELATIVITÄTSTHEORIE	1
2.	ZEITDILATATION	8
3.*	DAS HAFELE-KEATING-EXPERIMENT	14
4.	LÄNGENKONTRAKTION	17
5.*	DIE VEREINIGUNG DER ELEKTRISCHEN MIT DER MAGNETISCHEN KRAFT	22
6.	LORENTZ-TRANSFORMATION	29
7.	MINKOWSKI-DIAGRAMME	37
8.	GLEICHZEITIGKEIT	49
	AUFGABEN ZU TEIL I	59

TEIL II: KINEMATIK

9.	TRANSFORMATION VON GESCHWINDIGKEITEN	63
10.*	ABERRATION DES LICHTES	69
11.	TRANSFORMATION VON BESCHLEUNIGUNGEN	74
12.	BESCHLEUNIGTE BEWEGUNG	77
13.*	DIE RAKETEN-SEIL-PARADOXIE (BELLSCHES PARADOXIE)	86
14.	DOPPLER-EFFEKT	93
15.	DIE ZWILLINGSPARADOXIE UND DER K-KALKÜL	101
16.*	BILDER SCHNELL BEWEGTER OBJEKTE	110
17.*	ROTATION UND LORENTZ-TRANSFORMATION	120
18.*	LORENTZ-TRANSFORMATION IN ZWEI UND DREI RAUMDIMENSIONEN	126
19.*	DIE STAB-LOCH-PARADOXIE	134
	AUFGABEN ZU TEIL II	141

TEIL III: DYNAMIK

20.	MASSE UND IMPULS	143
21.*	RAKETENBEWEGUNG	148
22.*	KRAFT	154
23.	ENERGIE	161
24.	ENERGIE-IMPULS-GLEICHUNG UND -DIAGRAMME	167
25.	LORENTZ-TRANSFORMATION VON ENERGIE UND IMPULS	172
26.	INVARIANZEN UND ABSTÄNDE IM DREIDIMENSIONALEN	177
27.	INVARIANZEN UND ABSTÄNDE IN DER VIERDIMENSIONALEN RAUMZEIT	181
	AUFGABEN ZU TEIL III	187

TEIL IV: VIERERVEKTOREN UND ELEKTROMAGNETISMUS

28.	VIERERVEKTOREN UND SKALARPRODUKTE	189
29.	RECHNEN MIT DEM ENERGIE-IMPULSVEKTOR	195
	1. VOLLKOMMEN INELASTISCHER STOSS ZWEIER TEILCHEN	195
	2. ERZEUGUNG EINES PROTON-ANTIPROTON-PAARES	198
	3. ABSORPTION EINES PHOTONS DURCH EIN ATOM	199
	4. EMISSION EINES PHOTONS DURCH EIN ATOM	201
	5. ZERFALL EINES RUHENDEN TEILCHENS IN ZWEI TEILCHEN	202
	6. ERZEUGUNG EINES ELEKTRON-POSITRON-PAARES AUS EINEM PHOTON	204
	7. ZERSTRAHLUNG EINES ELEKTRON-POSITRON-PAARES IN ZWEI PHOTONEN	205
	8. COMPTON-EFFEKT	207
	9. INVERSER COMPTON-EFFEKT	209
	10. BREMSSTRAHLUNG	210
30.*	VIERERGESCHWINDIGKEIT UND VIERERBESCHLEUNIGUNG	212
31.*	DER KREISFREQUENZ-WELLENZAHLVEKTOR	218
32.*	DER LADUNGSDICHTE-STROMDICHTEVEKTOR	221
33.*	DER LEISTUNGS-KRAFTVEKTOR (MINKOWSKIKRAFT)	223
34.*	TRANSFORMATION DES ELEKTRISCHEN UND MAGNETISCHEN FELDES	226
35.*	FELDER EINER VORBEIFLIEGENDEN PUNKTLADUNG	235
36.*	DIE FORMINVARIANZ DER MAXWELLSCHEN GLEICHUNGEN	239
	AUFGABEN ZU TEIL IV	243
	LÖSUNGEN	245
	BUCHLITERATUR	247
	INDEX	249

Teil I: Einführung

1. Die Postulate der Speziellen Relativitätstheorie

Stellen wir uns einen Bahnhof mit sechs Gleisen vor (Abb. 1.1): Auf Gleis 1a steht ein Zug, auf Gleis 1b fährt ein Zug mit 20 km/h nach Osten. Auf Gleis 2a fährt ein Zug mit 20 km/h nach Westen, der Zug auf Gleis 2b steht. Auf den Gleisen 3a und 3b fahren die Züge mit 10 km/h nach Westen bzw. Osten. Alle Geschwindigkeiten sind relativ zum Gleiskörper angegeben, Geschwindigkeiten nach Westen erhalten negative Vorzeichen.

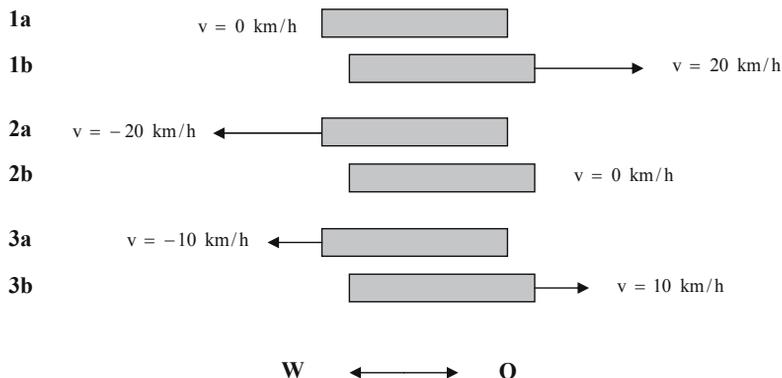


Abb. 1.1 Sechs Züge auf sechs Gleisen

Zwischen den Gleisen 1b und 2a sowie 2b und 3a liegen aber unübersehbar weite Entfernungen. Zugreisende können also jeweils nur einen Nachbarzug sehen, und nicht den Gleiskörper. Dann aber sind für die Zugreisenden die Vorgänge auf allen drei Gleispaaren ununterscheidbar: Reisende in den Zügen auf den a-Gleisen sehen die b-Züge mit 20 km/h nach Osten, Reisende in den b-Zügen sehen die a-Züge mit 20 km/h nach Westen fahren. Eine Unterscheidung der Vorgänge auf den drei Gleispaaren wird erst dann möglich, wenn die Reisenden auf den Gleiskörper schauen. Der Gleiskörper ist ein *absolutes Bezugssystem*. Die Existenz eines absoluten Bezugssystems ist die Voraussetzung für die Unterscheidung dieser drei Vorgänge, bei denen die Relativgeschwindigkeit zwischen beiden Zügen stets gleich groß (20 km/h) ist.

Stellen wir uns jetzt vor, die Züge seien Raumschiffe im völlig leeren Raum. Es gibt keine materiellen Objekte wie Gleiskörper oder Sterne mehr, die als absolutes Bezugssystem dienen könnten. Dann ist die Unterscheidung der drei Fälle offensichtlich sinnlos. Wenn aber kein absolutes Bezugssystem mehr existiert, kann auch keinem Körper mehr eine *absolute Geschwindigkeit* (0 km/h, 10 km/h nach Westen usw.) zugeordnet werden. Es gibt nur noch *Relativgeschwindigkeiten* zwischen den Raumschiffen, und diese betragen in allen drei Fällen 20 km/h nach Osten bzw. Westen.

Nun sollen sich alle sechs Raumschiffe gegenseitig sehen. *Wir können jedes der Raumschiffe als Bezugssystem deklarieren.* Wählen wir Raumschiff 1a als Bezugssystem, welches wir *1a-System* nennen wollen, dann haben die sechs Raumschiffe die folgenden Relativgeschwindigkeiten:

Raumschiff Nr.	1a	1b	2a	2b	3a	3b
Relativgeschwindigkeit (km/h)	0	20	-20	0	-10	10

Im *1b-System* haben die Raumschiffe diese Relativgeschwindigkeiten:

Raumschiff Nr.	1a	1b	2a	2b	3a	3b
Relativgeschwindigkeit (km/h)	-20	0	-40	-20	-30	-10

Selbstverständlich gibt es unendlich viele weitere solche Bezugssysteme, die mit weiteren Raumschiffen verbunden sein können, welche sich geradlinig mit irgendeiner konstanten Geschwindigkeit bewegen.

Das *Spezielle Relativitätsprinzip*, welches von Einstein postuliert wurde, besagt nun, dass alle derartigen Bezugssysteme völlig gleichwertig sein sollen, dass *sich kein System durch irgendeine Eigenschaft von allen anderen Systemen hervorheben soll.* In allen diesen Bezugssystemen sollen alle physikalischen Gesetze in genau der gleichen Form gelten (*Forminvarianz*). Da sich diese Bezugssysteme geradlinig, gleichförmig und drehungsfrei (d.h. ohne jede Beschleunigung) zueinander bewegen, folgen alle sich selbst überlassenen Körper dem *Trägheitsprinzip*. Man nennt solche Bezugssysteme daher auch *Inertialsysteme* (von lat. *inertia* = Trägheit).

Spezielles Relativitätsprinzip: Alle Bezugssysteme, die sich geradlinig, gleichförmig und drehungsfrei zueinander bewegen (Inertialsysteme), sollen physikalisch vollkommen gleichwertig sein. Keines soll sich durch irgendeine Eigenschaft von allen anderen hervorheben.

Das Modalverb *soll* drückt aus, dass diese Eigenschaft an dieser Stelle nur postuliert wird. Erst die Erfahrung, also das Experiment, wird die Richtigkeit bestätigen.

Alles bisher Gesagte erscheint nicht besonders aufregend, da es mit dem *gesunden Menschenverstand* nicht kollidiert. Ganz anders dagegen Einsteins zweites Postulat, das *Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit*. Um dieses zu verstehen, machen wir zunächst einen kleinen Abstecher in die Akustik.

Schall breitet sich im Medium Luft mit der *Schallgeschwindigkeit* v_s aus. Ruht die Schallquelle bezüglich des Ausbreitungsmediums, so ist die Schallgeschwindigkeit *isotrop*, d.h. nach allen Richtungen gleich groß. Bewegt sich dagegen die Schallquelle mit der Geschwindigkeit v relativ zur Luft, z.B. nach Osten, so gilt für die Schallgeschwindigkeit v'_s relativ zur Schallquelle:

$$\begin{aligned} v'_s &= v_s + v && \text{für die Ausbreitung nach Westen,} \\ v'_s &= v_s - v && \text{für die Ausbreitung nach Osten.} \end{aligned}$$

Die Schallausbreitung ist jetzt ganz offensichtlich nicht mehr isotrop relativ zur Schallquelle (Abb. 1.2).

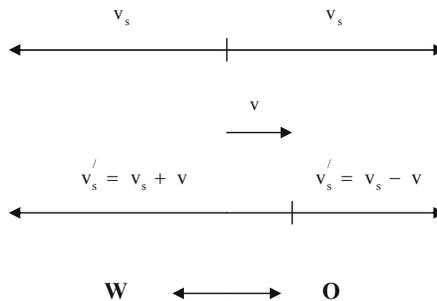


Abb. 1.2 Änderung der Schallgeschwindigkeit, wenn sich die Schallquelle mit v nach Osten bewegt

Man nahm im 19. Jahrhundert an, dass sich Licht ganz analog in einem Medium ausbreitet, welches *Äther* genannt wurde. Es wurde postuliert, dass *der Äther das ganze Universum, also auch die materiellen Körper, durchsetzt*. Der Äther wurde damit auch zu einem absoluten Bezugssystem wie der Gleiskörper in unserem Beispiel. Es wurde also als ganz selbstverständlich – weil dem *gesunden Menschenverstande* folgend – angenommen, dass die Lichtausbreitung von der Bewegung des Lichtsenders relativ zum Äther abhängt. Ganz zentrale Aufgaben der Physik des 19. Jahrhunderts waren die Suche nach dem Äther und die experimentelle Verifikation der *Anisotropie* der Lichtausbreitung.

Ein für die weitere Entwicklung der Physik sehr wichtiges Experiment wurde von *Michelson und Morley* 1887 ausgeführt. Dazu machen wir folgende Überlegung (Abb. 1.3):



Abb. 1.3 Ein Boot fährt in Flussrichtung (links) und quer dazu (rechts)

Ein Fluss fließt von links nach rechts mit der Geschwindigkeit v relativ zum Ufer. Auf ihm fährt ein Boot mit der Geschwindigkeit c relativ zum Wasser. Fährt das Boot stromab bzw. stromauf, so ist seine Geschwindigkeit relativ zum Ufer $c+v$ bzw. $c-v$. Um die Strecke ℓ_1 von A nach B und wieder zurück zu fahren, braucht es die Zeit

$$t_1 = \frac{\ell_1}{c+v} + \frac{\ell_1}{c-v} = \frac{\ell_1(c-v) + \ell_1(c+v)}{c^2 - v^2} = \frac{2\ell_1 c}{c^2 - v^2} = \frac{2\ell_1}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.1)$$

Fährt das Boot quer über den Strom, so muss es seinen Bug etwas stromaufwärts drehen und erreicht die Geschwindigkeit $\sqrt{c^2 - v^2}$ relativ zum Ufer. Für die Strecke ℓ_2 von C nach D und wieder zurück braucht es die Zeit

$$t_2 = \frac{2\ell_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2\ell_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.2)$$

Ist v klein gegenüber c , so kann man eine *Taylor-Entwicklung* von (1.1) und (1.2) machen:

$$\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

Daraus folgt für die Laufzeitdifferenz

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{2\ell_1}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{2\ell_2}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (1.3)$$

Nun stellen wir uns vor, das Flusswasser sei der Äther, der mit der Geschwindigkeit v durch ein auf der Erde ruhendes Interferometer fließt. Das Boot sei ein Lichtstrahl, der sich mit der *Lichtgeschwindigkeit* c relativ zum Äther bewegt. Der Lichtstrahl wird auf einen halbdurchlässigen Spiegel H geworfen und dort in zwei Strahlen aufgeteilt, von denen der eine über Spiegel S_1 , der andere quer dazu über Spiegel S_2 wieder zu H gelangt. Von dort verlaufen beide Teilstrahlen parallel bis zum Beobachter B und interferieren (Abb.1.4).

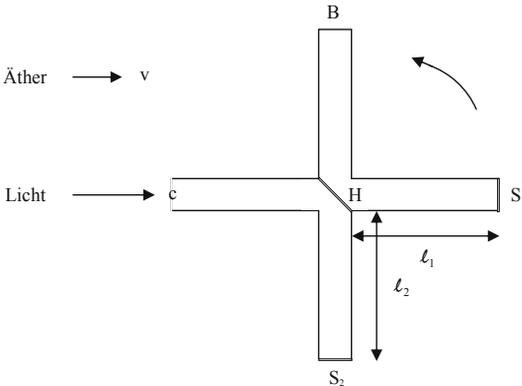


Abb. 1.4 Michelson-Interferometer

Wird dieses *Michelson-Interferometer* nun um 90° gedreht, so vertauschen beide Strahlen ihre Rolle, und die Laufzeitdifferenz wird

$$\Delta t' = t'_1 - t'_2 \approx \frac{2l_1}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{2l_2}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (1.4)$$

Daraus folgt für die Änderung der Laufzeitdifferenz

$$\Delta t - \Delta t' = \frac{l_1 + l_2}{c} \frac{v^2}{c^2}. \quad (1.5)$$

Beim Drehen müsste sich das Interferenzbild bei B verändern. Es wird aber nichts beobachtet! Nun könnte es ja sein, dass die Messung zu einem Zeitpunkt gemacht wird, in dem die Erde relativ zum Äther ruht, also $v = 0$ ist. Dann müsste sich die Erde aber bei ihrem Lauf um die Sonne ein halbes Jahr später mit 60 km/s relativ zum Äther bewegen, und es ergäbe sich bei einer Armlänge von $l_1 = l_2 = 10 \text{ m}$ für (1.5) ein Wert von $2,7 \cdot 10^{-15} \text{ s}$. Da die Periode von Licht der Wellenlänge $\lambda = 600 \text{ nm}$ ungefähr $2,0 \cdot 10^{-15} \text{ s}$ beträgt, müsste eine Änderung des Interferenzbildes zu sehen sein. Es wird aber *auch dann nichts beobachtet*.

Das Ergebnis des Experimentes ist die Feststellung, dass *die Bewegung der Erde relativ zu einem hypothetischen Äther zu keinem Zeitpunkt nachgewiesen werden kann*. Ein von einem irdischen Sender emittiertes Lichtsignal breitet sich also stets und in allen Richtungen, das heißt *isotrop*, mit der gleichen Geschwindigkeit $c = 299.792.458 \text{ m/s}$ aus. Das Experiment von Michelson und Morley wurde später mit immer größerer Genauigkeit wiederholt; die Ätherhypothese konnte aber nicht verifiziert werden und gilt daher heute als unhaltbar. Da der Erde nach dem Wissen der Gegenwart keine besondere Rolle im Universum zukommt, da die Erde also kein irgendwie ausgezeichnetes Bezugssystem sein kann, muss die Feststellung der *Isotropie der Lichtausbreitung* auch für alle anderen Inertialsysteme gelten. Es bleibt natürlich anzumerken, dass die Erde streng genommen kein Inertialsystem ist, da sie sich einmal pro Tag um ihre Achse und einmal pro Jahr um die Sonne dreht und noch weitere beschleunigte Bewegungen in der Milchstraße und mit der Milchstraße im Universum ausführt. Die daraus entstehenden Scheinkräfte haben aber einen völlig vernachlässigbaren Einfluss auf das Experiment.

Nach der Falsifikation der Ätherhypothese durch Michelson und Morley stellte Ritz 1908 die einleuchtende Vermutung auf, dass sich Licht zwar isotrop von jedem Lichtsender ausbreitet, aber je nach der Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger den Empfänger mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten erreicht. Licht von einem Stern, der sich von der Erde entfernt, sollte daher mit kleinerer Geschwindigkeit auf der Erde ankommen als Licht von einem Stern, der sich der Erde nähert.

Auch diese Hypothese über die Lichtausbreitung ließ sich falsifizieren. Licht von einem *Doppelsternsystem* – bestehend aus zwei Sternen, die sich um ihren gemeinsamen Schwerpunkt bewegen: einer läuft auf die Erde zu, der andere von ihr weg – müsste die Erde mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten erreichen. Unter bestimmten Umständen müsste dann einer der Sterne zur gleichen Zeit sogar zweimal zu beobachten sein: einmal, wie er sich auf die Erde zu bewegt (große Lichtgeschwindigkeit), und einmal, wie er sich einige Zeit vorher von der Erde weg bewegte (kleine Lichtgeschwindigkeit). Beobachtungen dieser Art wurden noch nie berichtet.

Noch ein weiterer überzeugender experimenteller Hinweis auf die Unrichtigkeit der Ritzschen Hypothese kommt aus neuester Zeit. Als 1987 in der 165.000 Lichtjahre entfernten Großen Magellanschen Wolke ein *Supernovaausbruch* stattfand, wurden *Neutrinos* von Atomkernen emittiert. Neutrinos bewegen sich wie Photonen mit Lichtgeschwindigkeit. Obwohl die Atomkerne relativ zueinander Geschwindigkeiten von bis zu 10.000 km/s hatten, erreichten alle Neutrinos die Erde innerhalb einer Zeitspanne von 10 Sekunden. Es bleibt also heute keine realistische Alternative zu *Einsteins zweitem Postulat*:

Prinzip der Konstanz¹ der Lichtgeschwindigkeit: Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit hat in jedem Inertialsystem ganz unabhängig von der Geschwindigkeit des Lichtsenders und des Lichtempfängers denselben Wert. Er ist daher eine fundamentale Naturkonstante und beträgt $c = 299.792.458 \text{ m/s}$.

Der Wert von c war Einstein mit dieser Genauigkeit natürlich noch nicht bekannt.

Dieses Prinzip bedeutet daher ganz konkret Folgendes: Ein Stern entfernt sich mit halber Lichtgeschwindigkeit von der Erde. Das von ihm in Richtung Erde emittierte Licht verlässt den Stern mit Lichtgeschwindigkeit und *nicht* mit eineinhalbfacher Lichtgeschwindigkeit (Ätherhypothese). Das Licht erreicht die Erde ebenfalls mit Lichtgeschwindigkeit und *nicht* mit halber Lichtgeschwindigkeit (Ritzsche Hypothese). Ein anderer Stern nähert sich der Erde mit halber Lichtgeschwindigkeit. Auch das von ihm emittierte Licht verlässt den Stern mit Lichtgeschwindigkeit und erreicht die Erde mit Lichtgeschwindigkeit.

Dieses Prinzip verstößt ganz offensichtlich gegen jeden gesunden Menschenverstand! Die Genialität Einsteins zeigt sich aber gerade darin, dass er ein derartiges Prinzip zur Grundlage einer großen Theorie machte, die überdies zum Zeitpunkt ihrer Entstehung 1905 noch keineswegs experimentell nachprüfbar war. Die jahrzehntelange, zum Teil erbitterte Ablehnung der Relativitätstheorie hat ihre Wurzeln unter anderem auch in der scheinbaren Widersinnigkeit dieses Prinzips und den Folgerungen, die sich daraus ergeben.

Ein Grund für die unglaubliche Faszination, die von der Speziellen Relativitätstheorie ausgeht, wenn sie erst einmal verstanden wird, ist der Umstand, dass ihr *nur zwei Prinzipien*, das Spezielle Relativitätsprinzip und das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, zugrunde liegen.

Im weiteren Verlaufe dieses Buches werden mit nur drei Ausnahmen, nämlich der *Invarianz der elektrischen Ladung* (Kapitel 5), der *Invarianz des transversalen Impulses* (Kapitel 20) und der Formulierung für die *Kraft im elektrischen und magnetischen Feld* (Kapitel 34), keine zusätzlichen Arbeitshypothesen aufgestellt, und für den Aufbau der Theorie werden keine experimentellen Befunde herangezogen. Die Vorgehensweise ist *rein deduktiver Art*: Alle Phänomene werden ausschließlich durch die Theorie vorhergesagt und anschließend ggf. durch das unabhängige Experiment bestätigt.

¹ Streng genommen sollte man von der *Invarianz* der Lichtgeschwindigkeit reden. Wir folgen aber dem üblichen Sprachgebrauch und sprechen von der *Konstanz*.

2. Zeitdilatation

Wir brauchen ab jetzt sehr häufig *zwei Bezugssysteme*: Das erste, das S-System, hat *drei rechtwinklige Koordinatenachsen* (x , y und z) und die *Zeitkoordinate* t . Das andere, das S'-System, hat ebenfalls drei rechtwinklige Koordinatenachsen (x' , y' und z'), die *achsenparallel* zu denen des S-Systems liegen, ferner die Zeitkoordinate t' (Abb. 2.1). S' bewegt sich mit der *konstanten Geschwindigkeit* v relativ zu S. Für die meisten Probleme dieses Buches reicht es, wenn $v = (v, 0, 0)$ genommen wird. Der Einfachheit halber soll $t = t' = 0$ sein, wenn die beiden Koordinatenursprünge zusammenfallen.

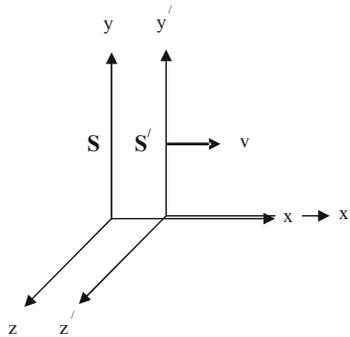


Abb. 2.1 Das S- und das S'-System

Wir machen nun ein Gedankenexperiment mit einer *Lichtuhr* (Abb. 2.2). Eine Lichtuhr soll ein 0,15 m hoher Kasten sein, der beidseitig mit einem perfekten Spiegel versehen ist. Am unteren Ende wird ein Lichtblitz gezündet, der dann beliebig oft zwischen den beiden Spiegeln hin und her reflektiert wird. Für den Hin- und Rückweg braucht das Licht genau eine Nanosekunde ($ns = 10^{-9}$ s). Erreicht das Licht wieder den unteren Spiegel, so geht ein in Nanosekunden geeichtes Zählwerk um eine Einheit weiter.

In den beiden Koordinatenursprüngen soll jeweils eine Lichtuhr liegen, die von $y_1 = y'_1 = 0,00$ m bis $y_2 = y'_2 = 0,15$ m reicht. Die Lichtuhren sollen sich völlig ungestört durchdringen. Beim Zusammenfallen der beiden Koordinatenursprünge, also bei $t = t' = 0$, wird am Koordinatenursprung ein Lichtblitz gezündet, der von nun an den Nanosekundentakt *beider* Lichtuhren angibt.

Nach 0,5 ns ist aus dem Lichtblitz eine *Kugelwelle* mit dem Radius 0,15 m geworden. S' soll sich mit $v = c/\sqrt{2}$ nach rechts bewegen. Der Koordinatenursprung von S' ist dann

etwa 0,11m weit nach rechts gewandert. Die Kugelwelle hat nun den oberen Spiegel der Lichtuhr des S-Systems erreicht (Abb. 2.3). Damit ist voraussetzungsgemäß im S-System die Zeit $t = 0,5 \text{ ns}$ verstrichen. Die Kugelwelle hat aber den oberen Spiegel der Lichtuhr des S' -Systems noch nicht erreicht. Also muss im S' -System die Zeit $t' < 0,5 \text{ ns}$ verstrichen sein. Offenbar läuft die Zeit im S' -System langsamer ab als im S-System.

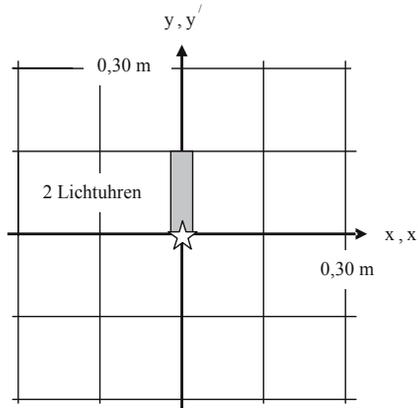


Abb. 2.2 Der Lichtblitz und die Lichtuhren bei $t = 0 \text{ s}$

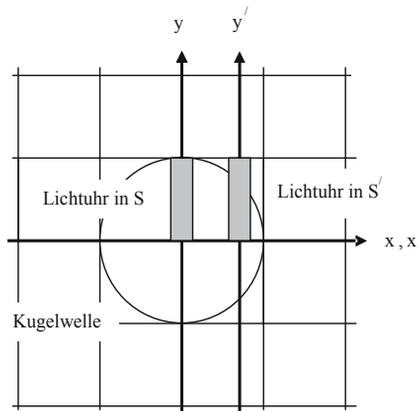


Abb. 2.3 Die Lichtuhren bei $t = 0,5 \text{ ns}$

Nach $t = 0,5\sqrt{2}$ ns ist der Radius der Kugelwelle auf etwa 0,21 m angewachsen. Der Koordinatenursprung von S' liegt 0,15 m rechts vom Ursprung (Abb. 2.4). Die Kugelwelle hat nun den oberen Spiegel der Lichtuhr des S' -Systems erreicht. Voraussetzungsgemäß ist dann die Zeit $t' = 0,5$ ns verstrichen. In der Lichtuhr des S -Systems aber läuft der Lichtblitz schon zurück. Also muss $t > 0,5$ ns sein. Wir sehen erneut, dass die Zeit im S -System schneller abläuft als im S' -System.

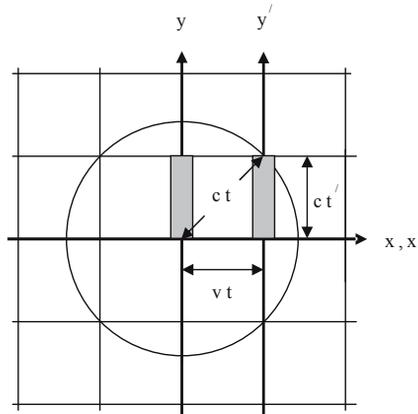


Abb. 2.4 Die Lichtuhren bei $t = 0,5\sqrt{2}$ ns

Man sieht sofort, dass mit Pythagoras der Zusammenhang $c^2 t^2 = v^2 t'^2 + c^2 t'^2$ gilt. Die Genialität der Einsteinschen Überlegung liegt darin, die Länge einer der Katheten mit ct' anzugeben statt mit ct . Letzteres wäre gesunder Menschenverstand gewesen, der gesagt hätte, die Lichtgeschwindigkeit im S' -System sei eben langsamer, nämlich $\sqrt{c^2 - v^2}$ statt c , dafür sei dort aber die gleiche Zeit wie im S -System verstrichen. Einstein dagegen postuliert, dass die Lichtgeschwindigkeit in beiden Systemen gleich groß ist. Daraus folgt zwingend, dass *im S' -System die Zeit langsamer verstreicht als im S -System*. Aus obiger Gleichung folgt

$$t^2 (c^2 - v^2) = c^2 t'^2$$

$$t^2 = \frac{t'^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Die negative Lösung hat keine physikalische Bedeutung, also gilt

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (2.1)$$

Der Wurzelausdruck $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ kommt in der Speziellen Relativitätstheorie sehr häufig vor. Daher definiert man

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad (2.2)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.3)$$

Ganz offenbar ist γ stets gleich oder größer als eins. Als Ergebnis dieses Gedankenexperimentes halten wir Folgendes fest:

Bewegt sich ein Inertialsystem S' relativ zu einem anderen Inertialsystem S mit konstanter Geschwindigkeit v , so wird ein Vorgang (z.B. das Ticken einer Uhr), der in S' ruht und die Zeit t' dauert, für den Beobachter in S verlängert auf

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma t' \geq t'.$$

Dieses Phänomen heißt *Zeitdilatation*, d.h. wörtlich *Zeitdehnung*.

An dieser Überlegung ändert sich nichts, wenn der Ursprung des S' -Systems in y - oder z -Richtung verschoben wird. Damit hat man gleich den verallgemeinerten Fall berücksichtigt, nämlich den Vorbeiflug des S' -Systems am S -System.

Setzen wir das Gedankenexperiment fort: Für einen Beobachter im S' -System bewegt sich das S -System mit $v = -c/\sqrt{2}$ nach links. Die gleiche Konstruktion ergibt, dass aus Sicht des S' -Systems ein Vorgang, der im S -System ruht und die Zeit t dauert, verlängert wird auf

$$t' = \gamma t \geq t. \quad (2.4)$$

Dies muss wegen des Speziellen Relativitätsprinzips auch so sein, andernfalls wäre eines der beiden Systeme ausgezeichnet. Daraus folgt eines der wichtigsten Ergebnisse:

Zeit ist relativ. Von allen relativ zueinander bewegten Beobachtern misst derjenige für einen Vorgang die kürzeste Zeit, der relativ zum Ort dieses Vorganges ruht. Man nennt diese Zeit die *Ruhezeit* oder *Eigenzeit* des Vorganges. Sie wird häufig mit τ bezeichnet.

An dieser Stelle sei darauf aufmerksam gemacht, dass die Koexistenz der scheinbar widersprüchlichen Gleichungen $t = \gamma t'$ und $t' = \gamma t$ oft Kopfzerbrechen bereitet. Diese Gleichungen sind so zu verstehen: *Auf der rechten Seite steht die Eigenzeit eines Vorganges*, d.h. die Zeitdauer, die ein Beobachter misst, der relativ zum Ort dieses Vorganges ruht; auf der linken Seite steht die Zeitdauer, die ein Beobachter misst, der sich relativ dazu bewegt. In $t = \gamma t'$ ist t' die Eigenzeit eines Vorganges, das S' -System ruht also relativ zu diesem Vorgang; in $t' = \gamma t$ ist t die Eigenzeit eines Vorganges, das S' -System bewegt sich relativ dazu. Wenn sich also das S -System und das S' -System relativ zueinander bewegen, kann nur *eines* davon dasjenige sein, in welchem der betreffende Vorgang ruht. Damit ist *eindeutig*, welche der beiden Gleichungen zur Anwendung kommt.

Es stellt sich die Frage, ob die gerade ausgeführten Überlegungen nur für Lichtuhren gelten oder auch für mechanische, elektrische oder sonstige Uhren bzw. für nichtperiodische Vorgänge wie den radioaktiven Zerfall oder biologische Prozesse. Die Frage muss mit *Ja* beantwortet werden. Gäbe es nämlich Abweichungen zwischen dem Zeitmaß einer Lichtuhr und dem Zeitmaß einer anderen relativ zu ihr ruhenden Uhr, so müssten diese Abweichungen von Inertialsystem zu Inertialsystem verschieden sein, um überhaupt erst entdeckt werden zu können. Dann aber gäbe es ein Inertialsystem, in welchem diese Abweichungen z.B. minimal wären. Dieses Inertialsystem wäre ein ausgezeichnetes System und damit ein Verstoß gegen das Spezielle Relativitätsprinzip, also gegen eine der zwei Grundvoraussetzungen der ganzen Speziellen Relativitätstheorie.

Ein berühmt gewordener experimenteller Beweis für die Zeitdilatation betrifft die *Lebensdauer von Myonen*. Sie entstehen durch *kosmische Strahlung in der Hochatmosphäre* und haben gemäß der *radioaktiven Zerfallsgleichung* $N = N_0 \cdot (1/2)^{t/T_{1/2}}$ eine *Halbwertszeit* $T_{1/2}$ von $1,5 \mu\text{s}$, bevor sie in ein Elektron bzw. ein Positron und zwei Neutrinos zerfallen. In der Zeit $t = T_{1/2} = 1,5 \mu\text{s}$ legen die Myonen, die fast mit Lichtgeschwindigkeit unterwegs sind, eine Strecke von 450 m zurück. Also müsste sich ihre Intensität mit zunehmender Höhe ca. alle 450 m verdoppeln. Tatsächlich nimmt ihre Intensität aber sehr viel langsamer zu. Der Grund ist die Zeitdilatation: Im sehr schnell bewegten System der Myonen vergeht die Zeit aus Sicht eines Erdbeobachters viel langsamer, die Halbwertszeit wird auf $\gamma T_{1/2}$ verlängert. Die genauen Zahlen sind: $v = 0,9998 c$, also $\gamma = 50$. Für einen Erdbeobachter beträgt die Halbwertszeit somit $75 \mu\text{s}$, und die Myonen legen in dieser Zeit 22,5 km zurück.

Ein ganz praktisches Problem im Zeitalter sehr genau gehender Atomuhren ist die Frage, *ob zwei Uhren, die an einem Ort synchronisiert werden, räumlich getrennt werden können, ohne dass die Synchronisation verloren geht.* Dazu stellen wir uns vor, dass die ruhende Uhr die Zeit t zeigt. Die andere Uhr, die mit konstanter Geschwindigkeit v über die Strecke s transportiert wird, zeigt die Zeit τ . Offenbar gilt

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (2.5)$$

Da in Praxis stets $v \ll c$ ist, kann eine Taylorentwicklung der Wurzel durchgeführt werden, und man erhält

$$t \approx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] \tau,$$

also beträgt die Zeitdifferenz

$$t - \tau \approx \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \tau.$$

Da nun andererseits nach (2.5)

$$\tau \approx \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] t$$

ist, wird die Zeitdifferenz zwischen den Uhren

$$t - \tau \approx \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] t$$

und in zweiter Ordnung in v/c einfach

$$t - \tau \approx \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 t.$$

Mit $v = s/t$ folgt daraus

$$t - \tau \approx \frac{s^2}{2c^2 t}. \quad (2.6)$$

Die Synchronisation geht also verloren! Je länger man sich aber Zeit lässt mit dem Transport über die Strecke s , je langsamer dieser also vonstatten geht, desto geringer wird die Zeitdifferenz zwischen den beiden Uhren.