

colección **textos**

textos
textos
textos
textos
textos
textos
textos



TEORÍA DE LA DECISIÓN

Luis G. Moreno Osorio



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE BOGOTÁ
FACULTAD DE CIENCIAS

Facultad de Ciencias
Saber más y formar mejor

Luis G. Moreno Osorio

Profesor titular de la Universidad Nacional de Colombia, entidad a la que ha estado vinculado como docente desde 1966 y en la que ha sido catedrático en los campos de la Investigación Operativa y las Ciencias Actuariales. El profesor Moreno es matemático de la Universidad Nacional de Colombia y Master of Science de Michigan State University.

ÚLTIMAS PUBLICACIONES

Fernando Zalamea
LOS GRÁFICOS
EXISTENCIALES PEIRCEANOS

Sistemas de lógicas
diagramáticas
del continuo:
Horosis, tránsitos,
reflejos, fondos

Gustavo Rubiano O.
TOPOLOGÍA GENERAL
[un primer curso]

José Edgar Alfonso,
Dery Esmeralda Corredor
TEORÍA BÁSICA DE LA MICROSCOPIA
ELECTRÓNICA DE TRANSMISIÓN

José Gregorio Portilla
ELEMENTOS DE ASTRONOMÍA
DE POSICIÓN

Hernando Valencia
MANUAL DE PRÁCTICAS
DE MICROBIOLOGÍA
DEL SUELO

Teoría de la decisión

Teoría de la decisión

Luis G. Moreno Osorio

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Sede Bogotá

TEORÍA DE LA DECISIÓN

- © Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
- © Luis G. Moreno Osorio
Profesor, Facultad de Ciencias

Primera edición, 2011
ISBN : 978-958-719-512-5

Catalogación en la publicación Universidad Nacional de Colombia

Moreno Osorio, Luis Gildardo, 1941-
Teoría de la decisión / Luis G. Moreno Osorio. - Bogotá : Universidad Nacional
de Colombia. Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas, 2011
xii, 158 p. : il. - (Colección monografías)

Incluye referencias bibliográficas

ISBN : 978-958-719-512-5

1. Toma de decisiones 2. Procesos de Markov 3. Decisiones estadísticas 4. Teoría
de la estimación I. Tit.

CDD-21 519.542 / 2011

A mis padres

Contenido

Prólogo	XI
1 Elementos básicos en la toma de decisiones	1
1.1 Introducción	1
1.2 Acciones y eventos	2
1.3 Tabla de decisiones	3
1.4 Tabla de pagos	3
1.5 Función de pagos continua	8
Ejercicios	8
2 Criterios de decisión	11
2.1 Introducción	11
2.2 Acciones dominadas	12

2.3	Criterios mínimax y maximín	14
2.4	Criterio de Bayes	16
2.5	Criterio de máxima verosimilitud	19
	Ejercicios	20
3	Pérdida de oportunidad e información perfecta	25
3.1	Introducción	25
3.2	Pérdida de oportunidad	26
3.3	Pago esperado con información perfecta	28
3.4	Regla de decisión de Bayes y pérdida de oportunidad	29
3.5	Valor esperado de la información perfecta	30
	Ejercicios	33
4	Análisis del árbol de decisión	37
4.1	Introducción	37
4.2	Diagrama del árbol de decisión	38
4.3	Determinación de los pagos y asignación de probabilidades	40
4.4	Elección de la trayectoria óptima	43
	Ejercicios	46
5	Toma de decisiones con información experimental	51
5.1	Introducción	51
5.2	Regla de Bayes	52
5.3	Análisis posterior	56

5.4	Uso de la información experimental	57
5.5	Valor esperado de la información muestral	63
5.6	Ejercicios	64
6	Decisiones con muestreo binomial	69
6.1	Introducción	69
6.2	Características del muestreo binomial	70
6.3	Uso de la distribución beta	72
6.4	Muestreo cuando las medias son los eventos	74
6.5	Uso de la distribución normal	76
6.6	Tamaño óptimo de la muestra	80
	Ejercicios	84
7	Funciones de decisión y de riesgo	87
7.1	Introducción	87
7.2	Reglas de decisión	88
7.3	Punto de equilibrio	90
7.4	Función de riesgo	92
7.5	Reglas de decisión admisibles	95
7.6	Tamaño óptimo de la muestra	97
	Ejercicios	101
8	Teoría de la utilidad	107
8.1	Introducción	107
8.2	Función de utilidad	108

8.3	Anotaciones sobre la función de utilidad	110
8.4	Determinación de los valores de la utilidad	113
8.5	La curva de indiferencia monetaria	115
8.6	Punto de equilibrio	117
	Ejercicios	121
9	Procesos markovianos de decisión	125
9.1	Introducción	125
9.2	Modelo markoviano de decisión	126
9.3	Programación lineal y políticas óptimas	129
9.4	Distribución de probabilidad estacionaria	131
9.5	Mejoramiento de una política	133
9.6	Pagos con descuento	138
9.7	Método de las aproximaciones sucesivas	143
	Ejercicios	144
	Respuestas	151
	Bibliografía	153
	Índice Alfabético	155

Prólogo

La base fundamental de la teoría de la decisión la componen las acciones que tiene a su disposición un decisor y los eventos que se pueden presentar como consecuencia de la adopción de estas acciones.

Este libro recopila las notas empleadas en la enseñanza del curso Teoría de la decisión. Los temas tratados se desarrollan de manera que sean fáciles de comprender por los lectores con conocimientos elementales de cálculo diferencial e integral, álgebra lineal, cálculo de probabilidades y procesos de Markov.

En los tres primeros capítulos se analizan los resultados provenientes de las combinaciones de las acciones y los eventos. Además se discuten los criterios más simples para tomar decisiones y se muestra la forma en que se establece la máxima cantidad que un decisor podría pagar por una información que le permita seleccionar la mejor acción entre las que tiene a su disposición.

En los cuatro capítulos siguientes se analizan los problemas de decisión mediante el uso de un diagrama de árbol y las situaciones en que el decisor puede buscar información adicional proveniente de un muestreo. También se indica la forma en que se resuelven los problemas de decisión, mediante el empleo de funciones de decisión y de riesgo.

En el capítulo 8 se introduce el uso de la función de utilidad, diseñada para tener en cuenta la experiencia del decisor y sus preferencias. Finalmente en el capítulo 9 se analizan los problemas de decisiones que involucran el uso de los procesos de Markov.

Los ejemplos que se presentan en cada capítulo sirven para complementar la teoría. Por otra parte, los ejercicios al final de cada capítulo se distribuyen por secciones para que el estudiante pueda consolidar sus conocimientos a medida que los vaya adquiriendo.

Agradezco al ingeniero Jorge E. Gómez M. la dedicación y el esmero que puso en la transcripción del manuscrito nuevo. También manifiesto mi gratitud a Edgard Rincón por su colaboración y a Gustavo Rubiano por su apoyo como director de la oficina de publicaciones de la Facultad de Ciencias.

Finalmente expreso mis agradecimientos a la Universidad Nacional de Colombia por el apoyo brindado para la publicación del texto.

El autor

CAPÍTULO 1

Elementos básicos en la toma de decisiones

1.1 Introducción

Cuando un decisor enfrenta un problema, debe tener en cuenta las acciones que puede adoptar, los eventos que se pueden presentar, relacionados con el problema, y las consecuencias provenientes de la escogencia de cada acción y de la ocurrencia de cada evento.

En este capítulo veremos inicialmente las características que distinguen a todo problema de decisión, como son las acciones, los eventos y las consecuencias o resultados que provienen de las combinaciones entre las acciones y los eventos. Posteriormente trataremos con estos resultados los que se colocan en las llamadas tablas de decisión que se convierten en matrices o tablas de pago, cuando a ellos se les asignan valores numéricos para representar ganancias o costos. Al final del capítulo veremos los problemas de decisión en los cuales, no es procedente el uso de la tabla de pagos.

1.2 Acciones y eventos

En la teoría de las decisiones se asume que cada actividad posible es conocida por el decisor (una persona u organización) y que solo una de estas puede seleccionarse. Las actividades potenciales del decisor se conocen con el nombre de “acciones” y se designan con la letra a . Al adoptar una acción, quien lo hace debe tener en cuenta sus consecuencias o resultados, los cuales también dependen del “estado de la naturaleza”. Un “evento” o “estado de la naturaleza”, indicado por θ , es una representación de la situación del mundo real a la cual se aplica la acción. Vemos así que todas las decisiones implican la escogencia de una acción, pero los resultados provenientes de cada acción son inciertos, porque un resultado es determinado parcialmente por la escogencia y parcialmente por el azar.

Con el fin de medir las consecuencias de una acción, por parte del decisor, se emplea una “función de pagos” $l(a, \theta)$ para reflejar el resultado que se obtiene al adoptar la acción a , cuando el estado de la naturaleza es θ .

Ejemplo 1.1. Considere la alternativa de llevar o no un paraguas durante un día determinado. Describa las acciones que se pueden adoptar, los eventos que se pueden presentar y los resultados que se pueden obtener.

Solución. Aquí hay dos posibilidades: llevar un artículo que puede, en caso de lluvia, favorecer el vestido, o desafiar los elementos con las manos libres, esperando que no llueva. La falta de habilidad para predecir el tiempo causa incertidumbre sobre si va o no a llover. No obstante, se debe tomar una decisión a pesar de la incertidumbre.

De acuerdo con las alternativas anteriores, las acciones que se tienen en cuenta son a_1 : llevar el paraguas y a_2 : dejar el paraguas en casa. Por otra parte, los eventos son θ_1 : llueve y θ_2 : no llueve. De esta manera se tienen los resultados $l(a_1, \theta_1)$: permanecer protegido, $l(a_1, \theta_2)$: llevar una carga innecesaria, $l(a_2, \theta_1)$: mojarse y $l(a_2, \theta_2)$: permanecer seco y sin molestias.

1.3 Tabla de decisiones

Para facilitar su análisis, un problema de decisión puede resumirse en una “tabla de decisiones”, en la cual se indican los resultados obtenidos al adoptar las distintas acciones en cada uno de los eventos. En el ejemplo siguiente se ilustra la forma en que se presenta una tabla de decisiones.

Ejemplo 1.2. Construya la tabla de decisiones para el problema descrito en el ejemplo 1.1.

Solución. La tabla de decisiones para el problema descrito en el ejemplo 1.1 es la tabla 1.1. Cada fila corresponde a un evento y cada columna corresponde a una acción. Los resultados aparecen como entradas en la tabla.

TABLA 1.1. Decisiones para el ejemplo del paraguas.

Eventos	Acciones	
	a_1 : llevar el paraguas	a_2 : dejar el paraguas en casa
θ_1 : llueve	$l(a_1, \theta_1)$: permanecer protegido	$l(a_2, \theta_1)$: mojarse
θ_2 : no llueve	$l(a_1, \theta_2)$: llevar una carga innecesaria	$l(a_2, \theta_2)$: permanecer seco y sin molestias

Debe tenerse en cuenta que las acciones incluidas en la tabla de decisiones son sólo las que desea considerar el decisor. En el ejemplo anterior, “permanecer en casa” es otra acción posible, que excluimos porque no se ha contemplado.

1.4 Tabla de pagos

Generalmente, la función de pagos se mide en términos monetarios, para reflejar una ganancia o un costo. Si el problema se plantea en términos de pérdidas, estas se pueden mencionar como ganancias negativas. Debe notarse que $l(a, \theta)$ es una función únicamente de la acción a y del evento θ . De esta manera cada resultado, esto es, cada combinación evento-acción, tiene asociado a él un pago.

En la determinación de los pagos asignados a los resultados se asume que el decisor desea seleccionar una acción que lo acerque más a un objetivo. Por ejemplo, si la meta es asegurar un nivel elevado de ganancias, entonces un pago natural para cada resultado sería su ganancia.

Quienes toman las decisiones con metas diferentes pueden asignar pagos distintos a los resultados aun cuando consideren el mismo conjunto de alternativas. La asignación de los pagos debe hacerse de acuerdo con el grado de importancia que el decisor asigne a los resultados.

En general, en los problemas de la teoría de las decisiones, el decisor debe conocer todas las acciones potenciales a su disposición, los eventos mutuamente excluyentes que se pueden presentar y los valores numéricos que representan las consecuencias originadas por las ocurrencias de los eventos, cuando se han seleccionado las diversas acciones.

Puesto que, después de haberse escogido una acción, los pagos dependen del evento que ocurre, se mencionan algunas veces como “valores condicionales”. Estos valores pueden arreglarse convenientemente en una “tabla de pagos” o “matriz de pagos”. En el ejemplo 1.3 se ilustra la forma en que se presenta esta tabla.

Ejemplo 1.3. Una compañía petrolera, propietaria de un terreno en el que se cree hay petróleo, clasifica este terreno en términos del número de barriles que se espera obtener: 500.000 barriles, 200.000, 50.000 o ninguno. La compañía enfrenta el problema de decidir si realiza la perforación, alquila incondicionalmente el terreno a un perforador independiente o alquila condicionalmente el terreno por un valor que dependa de la cantidad de petróleo que se obtenga. El costo de perforación de un pozo productor es de 150.000 y el costo de perforación de un pozo seco es de 100.000. Para los pozos productores, el precio de venta por barril de petróleo es de 2. Bajo el acuerdo de un alquiler incondicional, la compañía recibe 50.000 por el terreno, mientras que, bajo el acuerdo de un alquiler condicional, recibe 0,80 por cada barril de petróleo extraído, siempre que el terreno rinda al menos 200.000 barriles; en caso contrario, no hay retribución alguna. Construya la tabla de ganancias para la compañía petrolera.

Solución. Las acciones a disposición de la compañía petrolera son a_1 : realizar la perforación, a_2 : alquilar incondicionalmente el terreno y a_3 : alquilar condicionalmente el terreno. Por otra parte, el estado θ de la