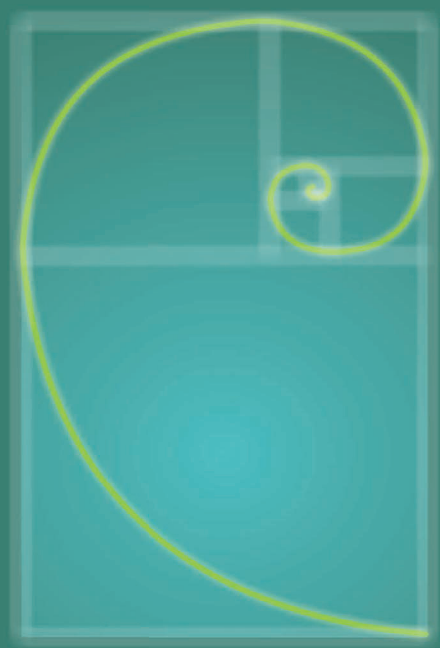
PROBLEMAS DE SUCESIONES RECURRENTES

colección textos

textos textos textos textos textos textos textos

Yu Takeuchi



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ
FACULTAD DE CIENCIAS

Facultad de Ciencias
Saber más y formar mejor

Problemas de sucesiones recurrentes

Problemas de sucesiones recurrentes

Yu Takeuchi

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Colombia

Sede Bogotá

Problemas de sucesiones recurrentes

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia

Ignacio Mantilla, Decano
Eugenio Andrade, Vicedecano Académico
Jorge Ortiz Pinilla, Director de Publicaciones

ISBN 978-958-701-888-2

Diagramaciónen LaTeX : Margoth Hernández Quitián

Diseño de carátula: Andrea Kratzer

Catalogación en la publicación Universidad Nacional de Colombia

Takeuchi, Yu, 1927 –
Problemas de sucesiones recurrentes / Yu Takeuchi. – Bogotá : Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas, 2007
iii, 249 p.

ISBN 978-958-701-888-2

1. Sucesiones (Matemáticas) 2. Análisis matemático

CDD-21 515.24 / 2007

Índice general

Presentación III

1. Introducción 1

2. Regla de L'Hôpital para series 13

3. Fórmula lineal de recurrencia del primer orden 21

4. Fórmula de recurrencia de primer orden (Caso particular) 55

5. Fórmula de recurrencia del primer orden (Caso general) 97

6. Fórmula fraccionaria de recurrencia del primer orden 131

7. Fórmula lineal de recurrencia del segundo orden 137

8. Fracciones continuas 147

9. Fórmula lineal de recurrencia de segundo orden con coeficientes variables (I) 161

Problemas adicionales introducción 177

Fórmula lineal de recurrencia del 1º orden 187

Fórmula fraccionada de recurrencia 207

Regla de L'Hôpital 225

Problemas adicionales 239

Presentación

La mayoría de textos de análisis tienen bastante material sobre los temas básicos de sucesiones, mas cuando el lector quiere profundizar en ciertos tópicos, la bibliografía es escasa y dispersa. En el texto *Sucesiones recurrentes* he querido profundizar en algunos temas e incorporar un número importante de ejemplos y ejercicios que pueden ser material de apoyo para un curso avanzado de la carrera de matemáticas o para los primeros cursos de posgrado.

El libro está dividido en nueve capítulos numerados que contienen las soluciones de los ejercicios propuestos en el libro Sucesiones recurrentes y cinco más con ejercicios adicionales.

En los primeros dos capítulos, los ejercicios buscan afianzar los conceptos de igualdad asintótica entre series, de sucesión de variación acotada, la regla de L'Hôpital para series y trabajar exhaustivamente los casos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Los siguientes tres capítulos contienen las soluciones de los ejercicios sobre sucesiones recurrentes de primer orden de la forma $X_{n+1} = A_n X_n + B_n$, como caso más general que el de recurrencia de primer con coeficientes constantes.

La recurrencia fraccionaria de primer orden de la forma $x_{n+1} = a_n - \dfrac{b_n}{x_n}$ es el tema de los ejercicios del capítulo sexto, y en el séptimo se resuelven los que corresponden al tema de la recurrencia de segundo orden.

Los ejercicios sobre fracciones continuas se estudian en el capítulo octavo como aplicación de las sucesiones recurrentes aplicando los cuatro criterios de convergencia conocidos, y en el capítulo noveno se trata la fórmula lineal de recurrencia de segundo orden con coeficientes variables.

Durante varios años tuve la idea de desarrollar los ejercicios para mi uso personal; sin embargo, por insinuación de algunos colegas empecé a trabajar la idea de escribir un texto con las soluciones. A todos ellos les expreso mis agradecimientos porque sin su insistencia tal vez este libro no hubiera llegado a escribirse. Las Directivas del Departamento de Matemáticas y de la Facultad de Ciencias acogieron la idea con entusiasmo y me ofrecieron su apoyo para la publicación. Como resultado de ello, le entregué el manuscrito a la señorita Margoth Hernández Q., quien se encargó de transcribirlo y de diseñarlo tal como se presenta publicado en este momento con constancia y profesionalismo admirables. A ella le expreso especialmente mis agradecimientos.

Yu Takeuchi

Bogotá, Octubre de 2007

1

Introducción

1.3 Ejercicios

Comprobar las siguientes afirmaciones

1) $\left|\dfrac{(n+1)^3-n^3}{n^2}\right| = \dfrac{3n^2+3n+1}{n^2} = 3+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2} \leq 3+3+1 = 7$

para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $(n+1)^3-n^3 = O(n^2)$, o sea que

$(n+1)^3 = n^3 + O(n^2)$.

2) $0 \leq \dfrac{(n+1)!}{n} = \dfrac{n+1}{n} \cdot n! \leq 2 \cdot n! = O(n!)$.

3) Aplicando la regla de L'Hôpital del cálculo se tiene:

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\text{sen } t - t}{t^3} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos t - 1}{3 \cdot t^2} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{-\text{sen } t}{6t} = -\dfrac{1}{6}$, por lo tanto existe M

tal que $\left|\dfrac{\text{sen } t - t}{t^3}\right| \leq M$ en una vecindad de 0, o sea

$\left|\dfrac{\text{sen } \frac{x}{n} - \frac{x}{n}}{\frac{1}{n^3}}\right| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R},$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es:

$$\text{sen } \frac{x}{n} - \frac{x}{n} = O\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

4) $\left|\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{n^2}\right| = \left|\dfrac{-1}{n^2\cdot(n+1)}\right| = \dfrac{1}{n^2\cdot(n+1)} \leq \dfrac{1}{n^3}$ para todo $n\in\mathbb{N}$,

esto es: $\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{n^2} = O\Big(\dfrac{1}{n^3}\Big)$, o sea que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n^2}+O\Big(\dfrac{1}{n^3}\Big)$.

5) Sean $a_n = O\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$, $\quad b_n = O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$, entonces existe $M>0$ tal que

$|a_n| \leq M\cdot\dfrac{1}{n}$, $\quad |b_n|\leq M\cdot\dfrac{1}{n^2}\leq M\cdot\dfrac{1}{n}$ para todo $n>\mathbb{N}$, por lo tanto:

$|a_n+b_n|\leq |a_n|+|b_n|\leq M\cdot\dfrac{1}{n}+M\cdot\dfrac{1}{n} = 2M\cdot\dfrac{1}{n}$, para todo $n>\mathbb{N}$.

6) Sea (a_n) una sucesión que satisface: $a_n = O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$, o sea que existe $M>0$ tal que $|a_n|\leq M\cdot\dfrac{1}{n^2}$. Por lo tanto se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M\cdot\frac{1}{n^2} = M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty,$$

o sea que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

7) Sea (a_n) la sucesión que satisface $a_n = O(r^n)$, entonces existe $M>0$ tal que $|a_n|\leq M\cdot r^n$. Si $0<r<1$ entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M\cdot r^n = M\sum_{n=1}^{\infty} r^n < +\infty \qquad \text{(serie geométrica)}$$

por lo tanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

8) Como existe el límite " $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ ", entonces la sucesión $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ es acotada, o sea que existe $M>0$ tal que $|\dfrac{a_n}{b_n}|\leq M$ para todo $n\in\mathbb{N}$, esto es: $|a_n|\leq M\cdot|b_n|$ para todo $n\in\mathbb{N}$, o sea que $a_n = O(b_n)$.

9) Aplicando la regla de L'Hôpital del cálculo se tiene:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-\operatorname{sen}\, t}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\cos t}{2}=-\frac{1}{2}$$

Por lo tanto la sucesión $\left(\dfrac{\cos\frac{x}{n}-1}{\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}\right)$ es acotada (para cada $x\in\mathbb{R}$), en consecuencia se tiene que $\cos\frac{x}{n-1}=1+O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

10) Aplicando la regla de L'Hôpital del cálculo se tiene:

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^a-1-at}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{a(1+t)^{a-1}-a}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{a(a-1)(1+t)^{a-2}}{2}=\frac{a(a-1)}{2}$$

Por lo tanto la sucesión: $\left(\dfrac{(1+\frac{1}{n})^a-1-\frac{a}{n}}{\frac{1}{n^2}};n=1,2,3,\dots\right)$ es acotada, en consecuencia se tiene que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^a-1-\dfrac{a}{n}=O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$, esto es: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^a=1+\dfrac{a}{n}+O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

11) $\left|\dfrac{(n+1)^2-n^2}{n}\right|=\dfrac{2n+1}{n}=2+\dfrac{1}{n}\leq 3$ para todo $n\in\mathbb{N}$, por lo tanto: $(n+1)^2-n^2=O(n)$, o sea que $(n+1)^2=n^2+O(n)$.

12) sea (A_n) una sucesión que satisface $A_n=O(a_n)$, entonces existe $M>0$ tal que $|A_n|\leq M|a_n|$, esto es, la sucesión $\left(\dfrac{A_n}{a_n}\right)$ es acotada, o sea que $\dfrac{A_n}{|a_n|}=O(1)$, esto es $A_n=|a_n|O(1)$.

13) $\dfrac{n(n+1)-n^2}{n}=(n+1)-n=1$ para todo $n\in\mathbb{N}$, por lo tanto: $n(n+1)-n^2=O(n)$, esto es, $n(n+1)=n^2+O(n)$.

1.6 Ejercicios

Comprobar las siguientes afirmaciones:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ ya que $\lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{\ln X}{X} = \lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{(\frac{1}{X})}{1} = 0$ (regla de L'Hôpital), esto es: $\ln n = o(n)$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\frac{1}{2^n}\right)}{(\frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{2^n}\right) = 0$ ya que $\lim\limits_{X\to\infty} \left(\dfrac{X}{2^X}\right) = \lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{1}{2^X \cdot \ln 2} = 0$ (Regla de L'Hôpital), esto es, $\dfrac{1}{2^n} = o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n}{3^n}}{\frac{n}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{(\frac{3}{2})^n} = 0$ (nótese que $\frac{3}{2} > 1$), o sea que $\frac{n}{3^n} = o(\frac{1}{2^n})$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\frac{1}{n^\lambda}\right)}{\frac{1}{n\cdot\ln n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cdot\ln n}{n^\lambda} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^{\lambda-1}} = 0$ (nótese que $\lambda - 1 > 0$)
o sea que $\frac{1}{n^\lambda} = o\big(\frac{1}{n\cdot\ln n}\big)$ (cuando $\lambda > 1$).

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^a}{a^n} = 0$ $(a > 1)$ ya que $\lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{X^a}{a^X} = \lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{X^a}{e^{kX}} = 0$ (tome $k = ln\ a$)
o sea que $n^a = o(a^n)$ si $a > 1$.

6) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\text{sen } t - t}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{cos\ t - 1}{2t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{-\text{sen } t}{2} = 0$ (Regla de L'Hôpital),
por lo tanto: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\text{sen } \frac{X}{n} - \frac{X}{n}}{(\frac{1}{n})^2} = 0$ (para cada $X \in \mathbb{R}$)
o sea que sen $\frac{X}{n} - \frac{X}{n} = o\big(\frac{1}{n^2}\big)$ (para cada $X \in \mathbb{R}$).

7) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1 - t}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{1} = 0$ (Regla de L'Hôpital), por lo tanto:
$\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 0$, esto es: $e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n} = o\big(\frac{1}{n}\big)$.

8) Sean (A_n), (B_n) tales que $A_n = O(a_n)$, $B_n = (a_n)$, entonces existe $M > 0$ tal que $|A_n| \leq M \cdot a_n$, además $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{B_n}{a_n} = 0$, tenemos:
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n + B_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{a_n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{B_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{a_n} \leq M$.
Como la sucesión $\left(\dfrac{A_n + B_n}{a_n};\quad n = 1, 2, 3, \ldots\right)$ es acotada, entonces:
$A_n + B_n = O(a_n)$.

9) Sea (A_n) una sucesión tal que $A_n = o(a_n)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{a_n} = 0, \quad \text{o sea que } \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{|a_n|\cdot 1} = 0, \text{ esto es: } \frac{A_n}{|a_n|} = o(1).$$

10) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n+1} = 0, \quad \text{o sea: } \tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n} = o\big(\tfrac{1}{n}\big).$$

11) Tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(1+x)\cdot 2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{2\cdot(1+x)} = 0,\end{aligned}$$

como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n) - a_n + \left(\frac{a_n^2}{2}\right)}{a_n^2} = 0, \text{ o sea: } \ln(1+a_n) - a_n + \left(\tfrac{a_n^2}{2}\right) = o(a_n^2).$$

1.8 Ejercicios

Comprobar las siguientes afirmaciones:

1) $\operatorname{sen} \frac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$ ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ (nótese que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.)

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{e^0}{1} = 1$, esto es, $e^{\frac{1}{n}} \sim 1 + \frac{1}{n}$.

3) $(n+1)^2 \sim n^2$ ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = 1.$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (Regla de L' Hôpital), por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n^2}} = 1, \text{ esto es: } 1 - \cos\tfrac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}.$$

5) Sean $A_n = n+1$, $\quad B_n = n$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1, \text{ esto es, } A_n \sim B_n.$$

Por otra parte, $A - B = 1 \neq o(1)$, ya que $1 \neq 0$.

6) Sean $A_n = \dfrac{2}{n}$, $\quad B_n = \dfrac{1}{n}$, entonces: $A_n = B_n + \dfrac{1}{n} = B_n + o(1)$ ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Por otra parte $\dfrac{A_n}{B_n} = 2 \neq 1$, esto es $A_n \nsim B_n$ (A_n no es asintóticamente igual a B_n).

7) Supongamos que $A_n \sim B_n$ $\left(\text{esto es, } \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{B_n} = 1\right)$, entonces tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} \Big/ \frac{B_{n+1}}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n}\frac{B_n}{B_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}\frac{B_n}{A_n} = 1 \cdot 1 = 1.$$

8) Supongamos que $\quad A_n < B_n < A_n + O(1), \quad \lim\limits_{n\to\infty} A_n = +\infty$. Tenemos que:

$1 < \dfrac{B_n}{A_n} < 1 + \dfrac{O(1)}{A_n}$, por lo tanto: $1 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{B_n}{A_n} < 1 + O(1) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{A_n} = 1$

Por lo tanto: $B_n \sim A_n$, en consecuencia: $A_n \sim B_n$.

9) Supongamos que $A_n < B_n < A_n + o(A_n)$, entonces: $1 < \dfrac{B_n}{A_n} < 1 + \dfrac{o(A_n)}{A_n}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{o(A_n)}{A_n} = 0$, entonces: $1 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{B_n}{A_n} \leq 1$ por lo tanto se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{B_n}{A_n} = 1$, o sea que $B_n \sim A_n$. En consecuencia: $A_n \sim B_n$.

10) Supongamos que $A_n \sim B_n$, entonces: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{B_n} = 1$.

- Sea (X_n) una sucesión tal que $X_n = O(A_n)$, entonces existe $M > 0$ tal que $|X_n| \leq M \cdot A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto:

$$\frac{|X_n|}{B_n} = \frac{|X_n|}{A_n} \cdot \frac{A_n}{B_n} \leq M \cdot \frac{A_n}{B_n}.$$

  Como $\left(\frac{A_n}{B_n}\right)$ es acotada ya que existe su límite, entonces la sucesión $\left(\frac{|X_n|}{B_n}\right)$ es acotada, esto es: $X_n = O(B_n)$.

- Sea (X_n) una sucesión tal que $X_n = o(A_n)$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{A_n} = 0$. Por lo tanto: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{B_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{A_n} \cdot \dfrac{A_n}{B_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{B_n} = 0 \cdot 1 = 0$, esto es: $X_n = o(B_n)$.

11) Si $A_n \sim B_n$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{B_n} = 1$.

Tenemos: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n - B_n}{B_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{B_n} - 1 = 1 - 1 = 0$, o sea que $A_n - B_n = o(B_n)$. Recíprocamente, si $A_n - B_n + o(B_n)$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n - B_n}{B_n} = 0$. Por lo tanto: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{B_n} - 1 = 0$, o sea que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{B_n} = 1$. Si $A_n \sim B_n$ entonces $B_n \sim A_n$, por lo tanto se tiene que $B_n = A_n + o(A_n)$, en consecuencia $A_n = B_n + o(A_n)$. El recíproco es evidentemente válido.

12) Tenemos, para $p < 1$, que

$$\int_1^n \frac{1}{t^p} dt < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} < 1 + \int_1^n \frac{1}{t^p} dt$$

Como $\int_1^n \dfrac{1}{t^p} dt = \dfrac{1}{1-p}(n^{1-p} - 1)$, entonces se tiene que

$$\frac{1}{1-p}(n^{1-p} - 1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} < 1 + \frac{1}{1-p}(n^{1-p} - 1).$$

Dividiendo la desigualdad anterior por $\dfrac{1}{1-p}(n^{1-p})$:

$$1 - \frac{1}{n^{1-p}} < \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}}{\frac{1}{1-p}(n^{1-p})} < 1 - \frac{p}{n^{1-p}}.$$

Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^{1-p}} = 0 \right)$(nótese que $p < 1$) se tiene que: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}}{\frac{1}{1-p}(n^{1-p})} = 1$, o sea que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^p} \sim \dfrac{1}{1-p}\ n^{1-p}$.

13) Para todo $N > n$ se tiene la siguiente desigualdad:

$$\int_n^N \frac{1}{t^p} dt < \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^p} < \frac{1}{n^p} + \int_n^N \frac{1}{t^p} dt \text{ (para } p > 1)$$

Como

$$\int_n^N \frac{1}{t^p}dt = \frac{1}{p-1}\left\{\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{N^{p-1}}\right\} \longrightarrow \frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{n^{p-1}} \qquad (N \to \infty)$$

entonces se tiene que $\dfrac{1}{p-1}\cdot\dfrac{1}{n^{p-1}} \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty}\dfrac{1}{k^p} \leq \dfrac{1}{n^p} + \dfrac{1}{p-1}\cdot\dfrac{1}{n^{p-1}}$.

Dividiendo la desigualdad anterior por $\dfrac{1}{p-1}\cdot\dfrac{1}{n^{p-1}}$ se tiene que

$1 \leq \dfrac{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\dfrac{1}{k^p}}{\dfrac{1}{p-1}\dfrac{1}{n^{p-1}}} \leq \dfrac{p-1}{n} + 1$, o sea: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\dfrac{1}{k^p}}{\dfrac{1}{p-1}\dfrac{1}{n^{p-1}}} = 1$, esto es,

$\sum\limits_{k=n}^{\infty}\dfrac{1}{k^p} \sim \dfrac{1}{p-1}\cdot\dfrac{1}{n^{p-1}}$

1.11 Ejercicios

1) Demostrar el siguiente criterio de Abel.

La serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k \quad (a_k,\ b_k \in \mathbb{C})$ converge si la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y la sucesión (b_k) es de variación acotada.

Demostración

Como la sucesión (b_k) es convergente, entonces (b_k) es acotada, o sea que existe $B > 0$ tal que $|b_k| \leq B$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Además la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$ converge. Por la condición de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe N tal que para cualquier $m > N$ se tiene:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{l} |b_k - b_{k+1}| < \epsilon & \text{(para todo } l \geq m) \\ |S_l| = |a_m + a_{m+1} + \cdots + a_l| < \epsilon & \text{donde } S_l = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_l, \\ & S_{m-1} = 0 \end{cases}$$

Tenemos:

$$\left|\sum_{k=m}^{l} a_k \cdot b_k\right| = \left|\sum_{k=m}^{l-1} S_k \cdot (b_k - b_{k+1}) + S_l \cdot b_l\right| \leq \sum_{k=m}^{l-1} |S_k| \cdot |b_k - b_{k+1}| + |S_l| \cdot |b_l|$$

$$< \epsilon \left\{ \sum_{k=m}^{l-1} |b_k - b_{k+1}| + B \right\} < \epsilon \cdot (\epsilon + B).$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{k=1}^{l} a_k \cdot b_k$ satisface la condición Cauchy, la cual converge.

2) Demostrar que la suma de dos sucesiones de variación acotada es de variación acotada.

Demostración

Sean (a_n), $\quad (b_n)$ dos sucesiones de variación acotada, entonces:

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| < +\infty,$

Se tiene entonces que:

$\sum_{k=1}^{\infty} \big|(a_k + b_k) - (a_{k+1} + b_{k+1})\big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| < +\infty.$

Por tanto, la sucesión $(a_k + b_k; \quad k = 1, 2, 3, \ldots)$ es de variación acotada.

1.16 Ejercicios

1) (I) $u_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{2n} (1 + u_k) &= \prod_{k=1}^{n} \Big(1 + \frac{1}{\sqrt{2k-1}}\Big)\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2k}}\Big) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{1}{2k} + \frac{1}{\sqrt{2k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k-1}}\Big) \\
&= \prod_{k=1}^{n} (1 - v_k)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
v_k &= \frac{1}{\sqrt{2k}} - \frac{1}{\sqrt{2k-1}} + \frac{1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k-1}} \\
&= \frac{\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k} + 1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k-1}} \cdot \frac{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k}}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k}} \\
&= \frac{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k} - 1}{\sqrt{2k} \cdot \sqrt{2k-1} \cdot \left(\sqrt{2k} + \sqrt{2k-1}\right)} > 0 \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Además, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k = +\infty$ ya que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k} \cdot \sqrt{2k-1}} > \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = +\infty$, la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k} \cdot \sqrt{2k-1} \cdot \left(\sqrt{2k} + \sqrt{2k-1}\right)}$ converge, por lo tanto el producto infinito $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} (1 - v_k)$ diverge a 0.

(II) $u_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{2n} (1 - u_k) &= \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k(2k-1)}\right) = \prod_{k=1}^{n} 1 = 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{2n} (1 + u_k) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2k}\right) = 1$, en consecuencia, el producto infinito converge al valor "1".

2) $u_{2k-1} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}}, \quad u_{2k} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Tenemos:

$$\begin{aligned}
(1 + p \cdot u_{2k-1}) \cdot (1 + p \cdot u_{2k}) &= \left(1 + \frac{p}{k} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}} p\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{k} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}} p\right) \\
&= \left(1 + \frac{p}{k}\right)^2 - \frac{2}{k} p^2 = 1 + \frac{2p}{k}(1 - p) + \frac{p^2}{k^2}.
\end{aligned}$$

- $p > 1$. $\dfrac{2p\cdot(1-p)}{k} + \dfrac{p^2}{k^2} < 0$ para k suficientemente grande, y $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{2p}{k}(1-p)+\dfrac{p^2}{k^2}\right) = -\infty$. Por lo tanto el producto infinito $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ diverge a 0.
- $0 < p < 1$. $\dfrac{2p}{k}(1-p)+\dfrac{p^2}{k^2} > 0 \quad$ para todo $\quad k \in \mathbb{N}, \quad$ y $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{2p}{k}(1-p)+\dfrac{p^2}{k^2}\right) = +\infty$. Por lo tanto, el producto infinito $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ diverge a $+\infty$.

3) Supongamos que $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ converge.

$\ln(1+u_k) = u_k - \dfrac{u_k^2}{2} + \Delta_k$ donde $\Delta_k = u_k^2 \cdot o(1)$ (Ejercicio 1.6, 11), entonces se tiene: $ln(1+p\cdot u_k) = p\cdot u_k - p^2 \cdot \dfrac{u_k^2}{2} + \Delta_k$ donde $\Delta_k = u_k^2 \cdot o(1)$.

Como $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+u_k)$ converge, entonces $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(u_k - \frac{1}{2}\cdot u_k^2 + u_k^2\cdot o(1)\right)$ converge, por lo tanto la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+p\cdot u_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(p\cdot u_k - p^2\cdot\dfrac{u_k^2}{2} + \Delta_k\right) = p\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(u_k - \frac{p}{2}\{u_k^2 + o(1)\cdot u_k^2\}\right) = p\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\{\left(u_k - \frac{u_k^2}{2}\right) - \dfrac{p-1}{2}\cdot u_k^2 + o(1)\cdot u_k^2\}$ converge si y sólo si la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k^2$ converge.

En caso de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k^2 = +\infty$, entonces:

- $p > 1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(-\dfrac{p-1}{2}u_k^2 + o(1)u_k^2\right) = -\infty$, por lo tanto el producto infinito $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+pu_k)$ diverge a 0.
- $0 < p < 1$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(-\dfrac{p-1}{2}u_k^2 + o(1)u_k^2\right) = +\infty$, por tanto el producto infinito $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+pu_k)$ diverge a $+\infty$.

4) $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^k}{k}+\frac{1}{k^2}\right)$.

La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{(-1)^k}{k}+\frac{1}{k^2}\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ converge, y la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{(-1)^k}{k}+\frac{1}{k^2}\Big)^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\Big((-1)^k+\frac{1}{k}\Big)^2<\infty$ converge, por lo tanto el producto infinito $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1+\frac{(-1)^k}{k}+\frac{1}{k^2}\Big)$ converge.

5) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-(-1)^n\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\Big)\Big)$.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Sin embargo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{(-1)^n\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\Big)\Big\}^2=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}+\frac{2}{n\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}\Big)=+\infty$ (diverge a $+\infty$).

Por el criterio 1, el producto infinito $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\Big)\right)$ diverge a 0.

2

Regla de L'Hôpital para series

2.11 Ejercicio

1) Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_{n+1}}{x_n} = r,\ |r| < 1,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty} b_k \cdot X_k}{X_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty} b_k \cdot X_k}{\sum\limits_{k=n}^{\infty} (X_k - X_{k+1})} = \lim_{k\to\infty} \frac{b_k \cdot X_k}{X_k - X_{k+1}}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{1 - (X_{k+1}/X_k)} = \frac{b}{1-r}.$$

2.12 Ejercicio

1) Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_{n+1}}{X_n} = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n \cdot \dfrac{X_n}{X_n - 1} = L$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} b_k \cdot X_k}{X_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} b_k \cdot X_k}{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (X_{k-1} - X_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{b_k \cdot X_k}{X_{k-1} - X_k}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{b_k \cdot (X_k/X_{k-1})}{1 - (X_k/X_{k-1})} = \frac{L}{1-0} = L.$$

2.16 Ejercicios

1) Sea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k$ una serie absolutamente convergente, si $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty} |X_k| r_k}{\sum\limits_{k=n}^{\infty} |X_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|X_k| r_k}{|X_k|} = \lim_{k\to\infty} r_k = r$$

Del 2) al 8) demostrar las igualdades asintóticas:

2) $\sum\limits_{k=n}^{\infty} b_k \cdot X_k \sim \frac{b}{1-r} X_n$ ya que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{X_{n+1}}{X_n} = r, \quad |r| < 1, \quad \lim\limits_{k\to\infty} b_n = b.$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2^{k+1}} \right) \Big/ \left(\frac{k(k+1)}{2^k} \right) \right) = \frac{1}{2},$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k} \sim \frac{n(n+1)}{2^n} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{n(n+1)}{2^{n-1}}.$$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot e^{-n-1}}{n \cdot e^{-n}} = \frac{1}{e}.$ $\sum\limits_{k=n}^{\infty} k \cdot e^{-k} \sim n \cdot e^{-n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{n}{e-1} \cdot e^{-n+1}.$

5)

$$\lim_{k\to\infty} \left(\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} \right) \Big/ \left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \right) \right) = \frac{1}{2}.$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \sim \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

6) $\left(\frac{1}{(k+1)^2} \cdot \frac{1}{3^{k+1}} \right) \Big/ \left(\frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{3^k} \right) \xrightarrow[(k\to\infty)]{} \frac{1}{3}$. Por lo tanto:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{3^k} \sim \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{3^n} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\cdot 3^{n-1}} \frac{1}{n^2}$$

7)

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\left((k+1)^2\right) / \left((k+2)\cdot 2^{k+2}\right)}{\left(k^2\right) / \left((k+1)\cdot 2^{k+1}\right)} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{k^2}{(k+1)\cdot 2^{k+1}} \sim \frac{n^2}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{n^2}{(n+1)2^n} \sim \frac{n}{2^n}$$

8) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(k+1)\cdot r^{k+1}}{k\cdot r^k} = r \quad (|r|<1), \quad \sum\limits_{k=n}^{\infty} k\cdot r^k \sim n\cdot r^n \dfrac{1}{1-r}$.

9) Supongamos que $X_n \sim n\cdot 2^{n-1}, \quad Y_n = X_n \cdot \sum\limits_{k=n}^{\infty} \dfrac{k\cdot 2^{k-1}}{X_k \cdot X_{k+1}}$, entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{k\cdot 2^{k-1}}{X_k X_{k+1}} &\sim \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k\cdot 2^{k-1}}{k\cdot 2^{k-1}\cdot (k+1)\cdot 2^k} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\cdot 2^k} \\ &\sim \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}\cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n-1}},\end{aligned}$$

por lo tanto se obtiene:

$$Y_n \sim n\cdot 2^{n-1}\cdot \frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n-1}} = \frac{n}{n+1} \sim 1.$$

En consecuencia, la sucesión (Y_n) es convergente, y $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = 1$.

10) Supongamos que $X_n \sim \dfrac{r^n}{n} \quad (r>1), \quad Y_n = X_n \cdot \sum\limits_{k=n}^{\infty} \dfrac{r^k}{X_k \cdot X_{k+1}}$, entonces:

$$\begin{aligned}\left(\frac{r^{k+1}}{X_{k+1}\cdot X_{k+2}}\right)\Big/\left(\frac{r^k}{X_k\cdot X_{k+1}}\right) \sim r\frac{X_k}{X_{k+2}} \sim \left(r\cdot \frac{r^k}{k}\right)\Big/\left(\frac{r^{k+2}}{k+2}\right) \\ = \frac{k+2}{k}\frac{1}{r} \sim \frac{1}{r}\end{aligned}$$

(cuando $k\to\infty$) además: $|\dfrac{1}{r}|<1$. por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{r^k}{X_k\cdot X_{k+1}} \sim \frac{r^n}{X_n\cdot X_{n+1}}\cdot \frac{1}{1-\frac{1}{r}} = \frac{r^{n+1}}{r-1}\cdot \frac{1}{X_n\cdot X_{n+1}} \\ \sim \frac{r^{n+1}}{r-1}\cdot \frac{n}{r^n}\cdot \frac{n+1}{r^{n+1}} \sim \frac{1}{r-1}\frac{n^2}{r^n},\end{aligned}$$

en consecuencia:

$$\frac{1}{n}\cdot Y_n \sim \frac{1}{n}\cdot X_n\cdot \frac{1}{r-1}\cdot \frac{n^2}{r^n} \sim \frac{1}{n}\cdot \frac{r^n}{n}\frac{1}{r-1}\frac{n^2}{r^n} = \frac{1}{r-1}$$

Por lo tanto, la sucesión $(\dfrac{1}{n}\cdot Y_n)$ es convergente, y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\cdot Y_n = \dfrac{1}{r-1}$.

2.31 Ejercicios

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \dfrac{2^n-1}{2-1} = 2^n - 1$ (serie geométrica) $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^{k-1} \sim 2^n$.

Nótese que

$\dfrac{2^k}{2^{k-1}} = 2 \longrightarrow 2$ (cuando $k \longrightarrow \infty$). $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^{k-1} \sim \dfrac{2}{2-1} \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

2) Del ejemplo 2.24:

si $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln a_{n+1} - \ln a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln r$, entonces:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \ln r$, o sea: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$,

(el segundo teorema de Cauchy).

3) $\lim\limits_{k\to\infty} k \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{k} = x \cdot \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{x} \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{k} = x \cdot \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} \frac{x}{k}}{\dfrac{x}{k}} = x \cdot 1 = x$.

Por el primer teorema de Cauchy se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{k} = x.$$

4) Como $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k+1}{k} = 1$, entonces por el 1^{er} teorema de Cauchy se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = 1.$$

5) Si $X_n = o(1)$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$. Por el 1^{er} teorema de Cauchy se obtiene: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k = 0$.

6)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (ak+b) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n(n+1)} \left(\frac{1}{2}\, \frac{n+1}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} (ak+b)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (ak+b)}{\dfrac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (ak+b)}{\sum\limits_{k=1}^{n} k} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{ak+b}{k} = \frac{1}{2} a.$$

De 7) a 10), demostrar la igualdad asintótica.

7) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(k+1)(k+2)\cdot 2^{k+1}}{k(k+1)\cdot 2^k} = 2.$

$\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)\cdot 2^k \sim \dfrac{2}{2-1}\cdot n(n+1)\cdot 2^n.$

8) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\dfrac{2^{k+1}}{k+1}}{\dfrac{2^k}{k}} = 2.\quad \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{k} \sim \dfrac{2}{2-1}\cdot\dfrac{2^n}{n} = \dfrac{2^{n+1}}{n}.$

9) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(k+1)^a\cdot p^{k+1}}{k^a p^k} = p,\quad \sum\limits_{k=1}^{n} k^a p^k \sim \dfrac{p}{p-1}\cdot n^a\cdot p^n = \dfrac{1}{p-1}\cdot n^a\cdot p^{n+1}.$

10) $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{\big(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)\big)/\big((k+1)!\big)}{\big(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)\big)/(k!)}\right) = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2k+1}{k+1} = 2.$ Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{k!} &\sim \frac{2}{2-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}\\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\cdot\frac{2^{n+1}\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

ya que (la fórmula de Wallis)

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

11) Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = r$ con $|r|>1$, entonces por el teorema 2.28 se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \sim \frac{r}{r-1}\cdot b_n,\quad \sum_{k=1}^{n}|b_k| \sim \frac{|r|}{|r|-1}|b_n|,$$

por lo tanto:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|b_n|}{|\sum\limits_{k=1}^{n}b_k|} \sim \frac{|r-1|}{|r|-1}$$

o sea que $\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k| = O(1)\cdot|\sum\limits_{k=1}^{n}b_k|.$

Por lo tanto, el teorema 2.19 es válido.