MARCO SCHRECK • KARSTEN KIRCHGESSNER

WILEY-SCHNELLKURS

INGENIEURS-MATHEMATIK

- Die Grundlagen auf einen Blick
- Von Mengen über Vektorrechnung bis zu Integraltransformationen
- Schnelltest: Mit Übungsaufgaben und Lösungen

WILEY

Der folgende Test enthält zu jedem der Kapitel jeweils eine Frage. Sofern Sie eine dieser Fragen in kurzer Zeit (maximal in etwa fünf Minuten) beantworten können, sind Sie bereits fit im Stoff des zugehörigen Kapitels.

EINSTIEGSTEST

1. Warum ist bei einem Beweis mit vollständiger Induktion der Induktionsanfang genauso wichtig wie der Rest des Beweises?
2. Wie lautet die Umkehrfunktion der Betragsfunktion?
3. Warum muss eine stetige Funktion nicht notwendigerweise auch differenzierbar sein?
4. Was muss man bei der Berechnung des Inhalts der Fläche unter dem Graphen einer Funktion beachten, wenn sie im besagten Bereich eine Nullstelle hat?
5. In einem Wettrennen tritt der schnelle Achilles gegen eine sehr behäbige Schildkröte an, die deshalb einen Vorsprung bekommt. Wenn Achilles den Vorsprung der Schildkröte zurückgelegt hat, besitzt diese einen neuen (wenn auch kleineren) Vorsprung, den Achilles erneut zurücklegen muss usw. Es sieht so aus, als könne Achilles deshalb die Schildkröte nie einholen (Zenons Paradoxon). Warum schafft er es aber doch?
6. Welche Darstellung ist zur Multiplikation komplexer Zahlen am besten geeignet?
7. Wieso benötigt man zwei linear unabhängige Richtungsvektoren, um eine Ebene (im dreidimensionalen Raum) darzustellen?
8. Unter welcher Bedingung besitzt eine Matrix eine Inverse?
9. Warum eignet sich ein Exponentialansatz so gut, um eine lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten zu lösen?
10. Warum kann man für die Exponentialfunktion $\exp(x)$ keine Fourier-Transformierte angeben?

LÖSUNGEN DER AUFGABEN DES EINSTIEGSTESTS

1. Das Beweisverfahren basiert auf dem Induktionsanfang. Selbst wenn der Induktionsschluss einwandfrei funktioniert, kann man nichts über die Gültigkeit einer Behauptung aussagen, sofern der Induktionsanfang nicht nachgewisen wurde.

2. Die Betragsfunktion besitzt keine Umkehrfunktion, weil sie weder injektiv noch auf ganz $\mathbb{R}$ surjektiv ist. Injektivität gilt nicht, da z.B. $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ derselbe Funktionswert $f(x_1) = f(x_2) = 2$ zugeordnet wird. Surjektivität auf $\mathbb{R}$ ist nicht gewährleistet, da es keine negativen Funktionswerte gibt.

3. Auch wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert einer Funktion an allen Argumenten miteinander übereinstimmen, muss das nicht auch notwendigerweise für ihre erste Ableitung der Fall sein. Auf den Graphen der Funktion bezogen heißt dies, dass ein Graph ohne Sprünge dennoch Knicke aufweisen kann.
4. Man muss das Integral aufteilen und von der linken Grenze bis zur Nullstelle berechnen. Danach berechnet man das Integral von der Nullstelle bis zur rechten Integrationsgrenze. Vom Ergebnis, wofür die Kurve unterhalb der Fläche verläuft, ist der Betrag zu nehmen. Am Ende muss man beide Beiträge addieren.
5. Die Addition der Vorsprünge der Schildkröte bilden eine konvergente Reihe mit einem bestimmten Grenzwert. Achilles kann diesen Grenzwert ohne Probleme überholen.
6. Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen funktioniert am besten in der Exponentialdarstellung, weil man dann einfach die Beträge multipliziert und die Winkel addiert.

7. Liegt nur ein Richtungsvektor vor (oder zwei linear abhängige Richtungsvektoren) kann man vom Aufpunkt ausgehend nur Punkte erreichen, die entlang einer Linie, also auf einer Geraden, liegen.
8. Das ist der Fall, wenn die Determinante der Matrix nicht verschwindet.
9. Der Exponentialansatz funktioniert gut, weil die Ableitung einer Exponentialfunktion wieder eine Exponentialfunktion ist. Einsetzen führt deshalb auf eine algebraische Gleichung.
10. Das ist nicht möglich, weil das zu berechnende Integral divergent ist.

Thoralf Räsch

Wiley Schnellkurs Ingenieursmathematik

Fachkorrektur von Regine Freudenstein

WILEY

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;

detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

1. Auflage 2015

Cover: Torge Stoffers Grafik-Design, Leipzig

Satz: inmedialo Digital- und Printmedien UG, Plankstadt

ePub ISBN: 978-3-527-69599-7

mobi ISBN: 978-3-527-69600-0

Print: ISBN: 978-3-527-53018-2

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Wir, die Autoren dieses Schnellkurses, heißen Sie willkommen! Warum schreiben wir ein weiteres Buch über Ingenieurmathematik, gibt es nicht schon genug? In der Tat existieren bereits viele Werke, die die Lehrenden an Hochschulen als Standard betrachten. Im Allgemeinen umfassen diese Bücher mehrere hundert Seiten und behandeln den Stoff in aller Ausführlichkeit und Tiefe. Solche Bücher sind hervorragend für Studenten geeignet, die ein Ingenieurstudium absolvieren.

Vielleicht halten Sie jedoch dieses Buch gerade in Händen, weil Sie Medizin, Mechatronik, Verfahrenstechnik oder auch etwas ganz anderes studieren. In Ihrem Studiengang kommen Sie nicht drum herum, ein Modul in höherer Mathematik erfolgreich abzuschließen, weil das eben im Lehrplan an Ihrer Hochschule vorgeschrieben ist. Nun haben Sie während des laufenden Semesters genug andere Dinge im Kopf, und jetzt steht in einer Woche auch noch eine Abschlussklausur in diesem Modul an. Müssen Sie sich nun tatsächlich durch einen tausendseitigen Wälzer quälen, wenn Sie ausschließlich daran interessiert sind, die Klausur halbwegs gut zu bestehen? Eben nicht, und da kommt dieses Buch ins Spiel!

Das vorliegende Buch ist ein Schnelleinstieg in die Ingenieurmathematik. Die wichtigsten THemen werden kurz dargestellt, und auf die wesentlichen Punkte wird eingegangen. Dabei tritt die allgemeine Theorie eher in den Hintergrund; der Schwerpunkt liegt auf schnell nachvollziehbaren Beispielen und Anwendungen. Das erleichtert es ungemein, wenn man nicht viel Zeit investieren kann, um sich ausgiebig mit dem Thema zu beschäftigen, sondern eher an einem schnellen Lernzuwachs interessiert ist.

Das Buch ist modular aufgebaut. Daher können Sie es natürlich als Ganzes durchlesen oder sich auf die für Sie wichtigen Kapitel und Abschnitte beschränken. Auch das ist hilfreich, wenn Sie an bestimmten Themenbereichen interessiert sind, weil in exakt einer Woche die Prüfung ansteht.

Was Sie schon immer über Ingenieurmathematik wissen wollten

Wie berechnet man das Maximum einer Funktion? Wie kann man komplizierte Integrale bestimmen? Wie löst man noch einmal eine Differenzialgleichung 1. Ordnung? Vielleicht sind es solche oder ähnliche Fragen, die Sie zu diesem Schnellkurs geführt haben. Die Ingenieurmathematik ist ziemlich umfangreich. Aus dem Grund erweist es sich als große Herausforderung, den Stoff im Rahmen eines Schnellkurses darzustellen. Letztendlich muss man sich als Autor für bestimmte Themen entscheiden und andere weglassen. Wir haben uns viele Gedanken darüber gemacht, was wichtig ist und was zunächst in den Hintergrund tritt. Diese Auswahl basiert auf persönlichen Erfahrungen, und wir hoffen, dass sie dem gerecht wird, was von unseren Lesern in entsprechenden Vorlesungen verlangt wird. Der Schnellkurs geht in die Breite und versucht, auf so viele Themen wie möglich einzugehen. Natürlich ist es dann nicht möglich, ein spezielles Thema besonders tiefgründig darzustellen. Es soll jedoch eine gute Basis geschaffen werden, um das erlernte Wissen mit weiterführender Literatur zu vertiefen.

Unsere Leser

Wir haben das Buch vor allem (aber nicht ausschließlich) für Studenten der Ingenieur- und Naturwissenschaften geschrieben, die Mathematik als Nebenfach belegen müssen. Wenn Sie das Buch gerade in Händen halten, gehören Sie wahrscheinlich zu diesem Kreis. Möglicherweise sind Sie dann auch nicht so sehr an der reinen Theorie und mathematischen Beweisen interessiert, sondern Sie möchten die Mathematik ganz einfach in der Anwendung sehen. Vielleicht steht in Ihrem Terminkalender auch eine Klausur. Doch selbst wenn Sie das Interesse an der Mathematik haben, fehlt Ihnen einfach die Zeit, sich ausgiebig mit den Themen auseinanderzusetzen. Dann ist dieses Buch auf jeden Fall für Sie geeignet!

Nötiges Vorwissen

Wenn Sie sich entschieden haben, eine Ingenieur- oder Naturwissenschaft zu studieren, standen Sie mit der Mathematik höchstwahrscheinlich in der Schule nicht gerade auf Kriegsfuß. In mathematischen Vorlesungen an einer Hochschule ist es so, dass noch einmal das Abiturwissen von vorne bis hinten neu aufgerollt wird. Dies geschieht jedoch auf eine andere Weise als in der Schule. An der Universität wird mehr Wert auf Zusammenhänge und Beweisverfahren gelegt, wohingegen Beispiele und Anwendungen meist in den Hintergrund treten.

Dennoch setzen auch Mathematikprofessoren in der Regel voraus, dass Studenten über das nötige mathematische Handwerkszeug verfügen. Obwohl das vorliegende Buch kein Mathematikbuch im eigentlichen Sinne ist, nehmen wir das auch an. Das heißt, Sie sollten die vier Grundrechenarten beherrschen, sich ein bisschen mit Potenzen und Wurzeln auskennen und mit Variablen umgehen können. Dazu gehört ebenso die Vereinfachung mathematischer Ausdrücke sowie das Lösen von einfachen Gleichungen. Sofern Sie dies können, willkommen an Bord!

Ziel des Buchs

Wir als Autoren sehen das Ganze pragmatisch. Nachdem Sie sich mit dem Buch auseinandergesetzt haben, sollten Sie in der Lage sein, Ihre Klausur zu bestehen. Sofern Sie nach der Klausur tiefer in die Mathematik einsteigen wollen, werden Sie mithilfe dieses Buchs über die notwendigen Grundlagen verfügen. Dann können Sie entweder weiterführende Vorlesungen besuchen oder sich entsprechende Fachliteratur besorgen.

Was bedeutet was

Die Notation im Buch ist einheitlich. Neue Fachbegriffe werden fett gedruckt. Soll etwas besonders betont werden, schreiben wir es kursiv. Ebenso sind Variablen immer kursiv, es sei denn, es handelt sich um feststehende Ausdrücke wie trigonometrische Funktionen oder um feste Zahlen.

Außerdem werden drei Symbole verwendet, um verschiedene, wichtige Stellen im Buch ausdrücklich zu kennzeichnen. Es gibt jeweils ein Symbol für Beispiele, Tipps und Warnungen.

Beispiel

Hierbei handelt es sich um ein kurzes oder ausführliches Beispiel, womit das eingeführte Thema oder eine bestimmte Technik praxisnah veranschaulicht werden soll. Da das vorliegende Buch auf dem Verstehen durch Beispiele basiert, werden Sie auf dieses Symbol häufig treffen.

Tipp

Unter diesem Symbol finden Sie nützliche Tipps, die z.B. eine Berechnung abkürzen oder erleichtern können.

Warnung

Das aktuelle Symbol steht für eine Warnung und weist auf etwaige Stolperfallen hin.

Bloomington, Indiana (U.S.A.) M. Schreck

Frankfurt am Main, Deutschland K. Kirchgessner

1
Grundbegriffe

In diesem Kapitel

- Summen- und Produktzeichen
- Mengenlehre
- Binomialkoeffizienten
- Vollständige Induktion

»Aller Anfang ist schwer« …sagt man gewöhnlich, doch nicht in diesem Buch! Das aktuelle Kapitel dient dazu, Ihnen den Anfang so einfach wie möglich zu machen. Hier werden die grundlegenden Ideen vorgestellt, und Ihnen wird das Werkzeug an die Hand gegeben, das Sie im Verlauf des Buchs immer wieder benötigen. Als erstes geht es um häufig verwendete mathematische Symbole, anschließend werden Mengen und der binomische Lehrsatz vorgestellt. Den Abschluss bildet die vollständige Induktion, die als einfaches Beweisverfahren an zahlreichen Stellen im Schnellkurs benötigt wird.

1.1 Summen- und Produktzeichen

In diesem kurzen Abschnitt wird auf einige in der Mathematik übliche Symbole eingegangen, die sehr oft Verwendung finden. Es geht um die kompakte Darstellung von Summen und Produkten, deren Ursache zum Teil in der Faulheit von Mathematikern zu finden ist. Diese Grundlagen sind im Rahmen einer Einführung zentral, und Sie sollten den Abschnitt aufmerksam lesen, sofern Sie mit der erklärten Symbolik nicht vertraut sind. Wissen Sie bereits Bescheid, dann können Sie das Kapitel problemlos überspringen.

In der höheren Mathematik können sowohl Summen als auch Produkte auftreten, die aus sehr vielen oder sogar unendlich vielen Gliedern bestehen. Um einem das Leben leichter zu machen, dient zur kurzen Darstellung von Summen das

Summenzeichen:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \quad (1.1)$$

Hierbei nennt man *i* den Summationsindex, über den die Summe läuft. Unterhalb des Summenzeichens wird dessen Startwert angegeben und oberhalb der Endwert. Wie Sie den Summationsindex nennen, ist nicht wichtig. Schauen Sie sich dazu die folgenden Beispiele an:

$$\sum_{i=1}^{3} i = 1 + 2 + 3 = 6, \quad (1.2a)$$

$$\sum_{k=0}^{2} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5, \quad (1.2b)$$

$$\sum_{\alpha=10}^{100} x^\alpha = x^{10} + x^{11} + \cdots + x^{100}. \quad (1.2c)$$

Summationsindizes lassen sich verschieben, wobei der Wert der Summe jedoch gleich bleibt. Für die Summe aus (Gl. 1.1) kann man z.B. die Ersetzung $i = i' + 1$ vornehmen, wobei i' ein neuer Summationsindex ist. Für $i = 1$ bzw. $i = n$ gilt dann $i' = 0$ und $i' = n - 1$. Dem neuen Summationsindex gibt man oft wieder den Namen des alten Indexes:

(1.3)

$$\sum_{i'=0}^{n-1} a_{i'+1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Dabei wird der erste Schritt meistens weggelassen. Ebenso kann man Teile der Summe abspalten, womit sich der Startwert bzw. der Endwert des Summationsindex ändert, also

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_n + \sum_{i=2}^{n-1} a_i = -a_0 - a_{n+1} + \sum_{i=0}^{n+1} a_i = \ldots. \quad (1.4)$$

Zur Darstellung von Produkten dient das Produktzeichen, das ähnlich wie das Summenzeichen funktioniert:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \equiv a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n. \quad (1.5)$$

Hier ist i der Produktindex. Unterhalb des Produktzeichens wird auch hier der Startwert angegeben und oberhalb der Endwert. Zum Verständnis dienen wieder einige Beispiele:

$$\prod_{i=1}^{4} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \quad (1.6a)$$

$$\prod_{k=0}^{2} k = 0 \cdot 1 \cdot 2 = 0, \quad (1.6b)$$

$$\prod_{\beta=1}^{10} x^\beta = x \cdot x^2 \cdot \cdots \cdot x^{10} = x^{55}. \quad (1.6c)$$

Ebenso lässt sich bei Produkten der Index verschieben. Führt man einen neuen Index i' gemäß $i = i' - 1$ ein, so entsprechen $i = 1$ bzw. $i = n$ den neuen Indexgrenzen $i' = 2$ bzw. $i' = n + 1$. Dann geht das Produkt aus (Gl. 1.5) in das folgende über, dessen Wert jedoch nach wie vor derselbe ist:

$$\prod_{i'=2}^{n+1} a_{i'-1} = \prod_{i=2}^{n+1} a_{i-1} = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n. \quad (1.7)$$

Analog zu Summen kann man einzelne Faktoren abspalten oder hinzufügen. Für (Gl. 1.5) gilt dann:

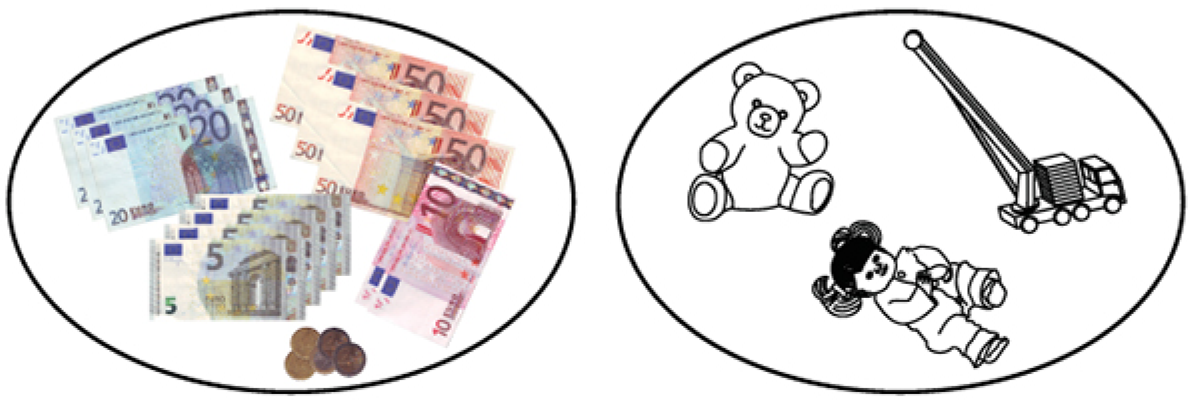
$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_n \cdot \prod_{i=2}^{n-1} a_i = \frac{1}{a_0 \cdot a_{n+1}} \prod_{i=0}^{n+1} a_i = \ldots . \quad (1.8)$$

Diese Art, Summen und Produkte abkürzend zu schreiben, ist ungemein wichtig in der höheren Mathematik. Sowohl in Vorlesungen als auch in der einschlägigen Literatur wird davon ausgiebig Gebrauch gemacht. Deshalb ist es sehr wichtig, dass Sie mit den Symbolen umgehen können. Sie sollten sowohl ihre Definitionen verstehen als auch Indexverschiebungen beherrschen, die oft ohne weitere Erklärung durchgeführt werden.

1.2 Mengenlehre

Die Mengenlehre ist ein großer Teil des Fundaments, auf dem die Mathematik aufbaut. Sie beschäftigt sich mit den sogenannten Mengen an sich sowie dem Rechnen mit Mengen. Cantor leistete auf diesem Gebiet Bahnbrechendes, und seine Definition einer Menge wird auch heute noch verwendet. Laut Cantor ist eine Menge eine Zusammenfassung wohldefinierter, unterscheidbarer Dinge zu einem Ganzen. Das hört sich schon ziemlich abstrakt an, was für eine mathematische Definition nicht unüblich ist. Doch eigentlich ist eine Menge eines der normalsten Dinge der Welt.

In Ihrem Sprachgebrauch haben Sie diesen Begriff sicherlich schon oft verwendet, ohne darüber nachzudenken. Wenn Sie sagen, dass jemand eine Menge Geld hat oder die Kinder des Nachbarn eine Menge Spielzeug, dann sind das bereits geläufige Beispiele. In diesem Sinne steht *eine Menge* immer für *viel*, doch eine Menge in der Mathematik muss nicht notwendigerweise viele Dinge enthalten. Manchmal kann das nur eine einzige Sache sein oder es gibt auch Mengen, die leer sind! Schauen Sie sich die im folgenden Abschnitt aufgeführten Beispiele an, um sich mit dem mathematischen Begriff der *Menge* vertraut zu machen.



(a) eine Menge Geld (b) eine Menge Spielzeug

Abb. 1.1 Zwei Mengen, die verschiedene Dinge umfassen

Man kann Mengen anschaulich darstellen. Nehmen Sie ein Blatt Papier und zeichnen Sie darauf verschiedene Dinge. Um auf das Beispiel *eine Menge Geld* einzugehen, können Sie ein paar 20- und 50-Euro-Scheine zeichnen. Das ist dann sicherlich schon eine Menge Geld, wenn auch nur auf dem Papier. Umschließen Sie die Zeichnung danach mit einem Kreis oder einem Oval; dann haben Sie bereits die anschauliche Darstellung einer Menge (Abb. 1.1a). Geht es um *eine Menge Spielzeug*, können Sie ähnlich vorgehen. Malen Sie z.B. einen Teddybären, eine Spielzeugeisenbahn und eine Puppe, und umschließen Sie das alles wieder mit einem Oval (Abb. 1.1b). Im Allgemeinen nennt man die

Dinge, die sich in einer Menge befinden, die Elemente dieser Menge.

Schreibweise

In der Mathematik an sich arbeitet man nicht mit Spielzeug oder Geld; als Mathematiker an der Universität wird man auch sicher nicht reich. Es geht dann eher darum, mit Zahlen oder anderen mathematischen Objekten umzugehen. Schreiben Sie auf ein Blatt Papier eine 2, 3, 5, 7, 13, und umschließen Sie das wieder mit einem Oval. Dann haben Sie eine Menge, die eben diese Zahlen als Elemente enthält. Mathematiker sind in der Regel faul und möchten das Ganze einfacher schreiben. Öffnen Sie eine geschweifte Klammer, und schreiben Sie die Elemente der Menge nacheinander auf. Dabei trennen Sie die einzelnen Elemente mit einem Komma voneinander und schließen die Klammer am Schluss wieder. Dann sollte $\{2, 3, 5, 7, 13\}$ auf Ihrem Blatt stehen, und genau auf diese Weise schreiben Mathematiker Mengen.

Hantiert man mit unterschiedlichen Mengen, gibt man diesen Bezeichnungen, z.B. $A = \{2, 3, 5, 7, 13\}$ und $B = \{5, 7, 11\}$. Dabei kommt es übrigens nicht auf die Reihenfolge der einzelnen Elemente an. Also handelt es sich bei $A = \{3, 2, 5, 7, 13\} = \{13, 7, 5, 3, 2\} = \{5, 13, 2, 7, 3\}$ jeweils um dieselbe Menge. Wie Sie sehen, kommt auch jedes Element nur einmal vor, denn nach Cantor sollen die Elemente unterscheidbar sein. Von daher ist $\{2, 2, 2, 3, 3, 5, 7, 13, 13\} = \{2, 3, 5, 7, 13\} = A$. Es ist auch unnötig, gleiche Elemente mehrfach aufzuführen. Möchte man sagen, dass ein bestimmtes Element in einer Menge liegt oder nicht liegt, so tut man das durch die Schreibweise $7 \in A$ bzw. $13 \notin B$. Übrigens gibt es auch eine Menge, die keinerlei Elementeenthält. Man bezeichnet sie als leere Menge und schreibt sie in der Form $\{\}$ oder als $\emptyset$.

Mengendiagramme

Am Anfang des Kapitels haben Sie Mengen grafisch dargestellt, indem Sie deren Elemente aufgezeichnet und diese mit einem Oval umschlossen haben. Derartige Darstellungen sind nicht einfach nur dazu da, um Ihnen den Mengenbegriff näher zu bringen, sondern sie werden tatsächlich so auch von Mathematikern benutzt; man nennt sie Mengendiagramme. Wenn die Elementeeiner Menge nicht näher bestimmt sein sollen, malt man einfach ein leeres Oval und schreibt den Namen der Menge hinein. Eine derartige Darstellung ist vor allem am Anfang überaus hilfreich und erleichtert den Umgang mit Mengen ungemein.

Mengenoperationen

Eine bestimmte Menge an sich kann für den Mathematiker bereits interessant sein. Oft ist man jedoch nicht einfach nur an einer einzigen Menge interessiert, sondern man möchte zwei oder mehrere Mengen – und damit auch deren Elemente – miteinander kombinieren. Gewöhnliche Zahlen lassen sich beispielsweise über die Grundrechenarten miteinander kombinieren. Man führt dazu die Operationen der Addition, Subtraktion usw. ein und legt für sie bestimmte Regeln fest. Auch für Mengen gibt es solche Mengenoperationen, und diese lernen Sie im Folgenden kennen. Außerdem wird jede Mengenoperation durch ein Symbol gekennzeichnet, so wie Sie das ja auch von den Grundrechenarten her kennen. Nehmen wir an, uns liegen zwei Mengen A und B vor, deren Elemente nicht näher bekannt sind; das ist auch zunächst nicht notwendig.

1. Teilmenge einer Menge:
Eine Menge B ist eine Teilmenge einer Menge A, sofern alle Elemente von B auch in A liegen. Umgekehrt müssen sich jedoch nicht notwendigerweise alle Elemente von A in B

befinden. In einem Mengendiagramm ist eine Teilmenge B von A dadurch charakterisiert, dass ihr Oval vollständig in dem Oval von A liegt (Abb. 1.2a). Man verwendet zur Darstellung die Symbolik $B \subset A$. Für die obigen beiden Mengen $A = \{2, 3, 5, 7, 13\}$ und $B = \{5, 7, 11\}$ ist $\{5, 11\} \subset B$, jedoch $\{5, 11\} \not\subset A$. Da nicht alle Elemente von B auch in A liegen (die Zahl 11) ist $B \not\subset A$.

2. Schnittmenge von Mengen:

Die Schnittmenge (Durchschnitt) zweier Mengen A und B ist eine Menge C, die alle Elemente umfasst, die *sowohl* in A *als auch* in B vorkommen. Die Elemente in C müssen also in beiden Mengen liegen (Abb. 1.2b). Befindet sich ein Element nur in A oder nur in B, dann gehört es nicht zur Schnittmenge von A und B. Das Bilden der Schnittmenge kürzt man mit dem Symbol $\cap$ ab, also ist $C = A \cap B$. Beispielsweise ist der Durchschnitt der beiden Mengen $A = \{2, 3, 5, 7, 13\}$ und $B = \{5, 7, 11\}$ gegeben durch $A \cap B = \{5, 7\}$.

3. Vereinigungsmenge (Vereinigung) von Mengen:

Die Vereinigungsmenge zweier Mengen A und B ist eine Menge C, die alle Elemente enthält, die *entweder* in A *oder* in B liegen (Abb. 1.2c). Die Vereinigung ist nichts anderes als eine Zusammenführung beider Mengen. Hierbei ist es nicht wichtig, ob ein Element nur in einer oder in beiden Mengen A, B vorkommt. Die Vereinigung wird durch das Symbol $\cup$ gekennzeichnet: $C = A \cup B$. Beispielsweise gilt für die beiden obigen Mengen $A \cup B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

4. Komplement von Mengen:

Von zwei Mengen A und B lässt sich das Komplement bilden; die zugehörige Verknüpfung wird mit einem umgekehrten Schrägstrich gekennzeichnet. Das Komplement $A \setminus B$ besteht aus allen Elementen von A, die nicht in B enthalten sind (Abb. 1.2d). Das Komplement der beiden bisher verwendeten Mengen A und B lautet $A \setminus B = \{2, 3, 13\}$.

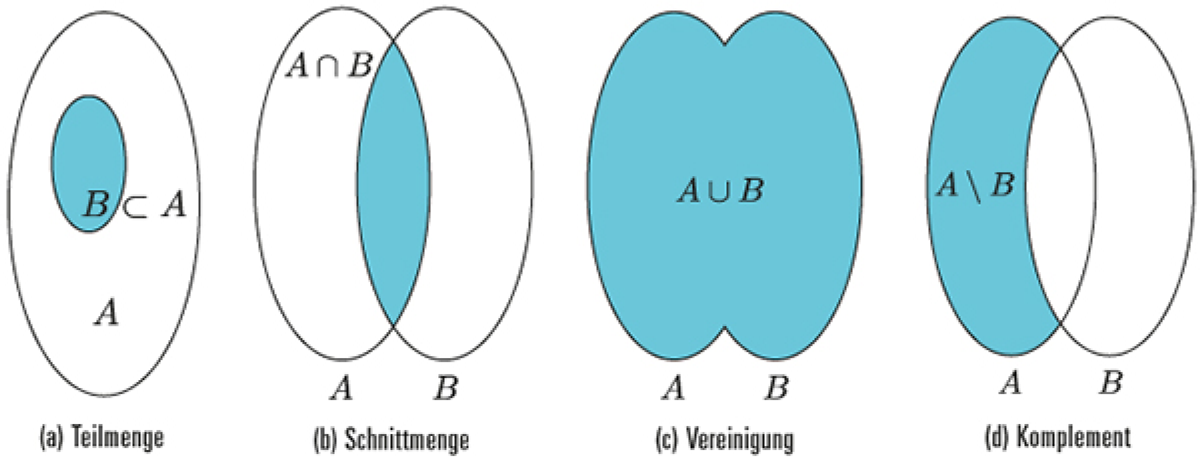


Abb. 1.2 Kombinationen zweier Mengen A und B

Rechenregeln für Mengen

Wie beim Rechnen mit gewöhnlichen Zahlen gibt es auch für Mengenoperationengewisse Rechenregeln. Das schöne ist, dass man diese Regeln mit Hilfe der Mengendiagramme wunderbar veranschaulichen kann. Deshalb ist dieser Abschnitt auch eine Hilfe, um zu lernen, die Mengendiagramme besser zu verstehen.

Es werden drei Mengen A, B und C betrachtet. Dann gelten die Regeln von de Morgan:

$$(B \setminus A) \cup C = (B \cup C) \setminus (A \setminus C), \quad (1.9a)$$

$$(B \setminus A) \cap C = (B \cap C) \setminus A = B \cap (C \setminus A), \quad (1.9b)$$

$$(B \setminus A) \cup C = (B \cup C) \setminus (A \setminus C), \quad (1.9c)$$

$$(B \setminus A) \cup C = (B \cup C) \setminus (A \setminus C), \quad (1.9d)$$

$$(B \setminus A) \cup C = (B \cup C) \setminus (A \setminus C), \quad (1.9e)$$

Nun sollen die ersten beiden Zusammenhänge mit Mengendiagrammennachvollzogen werden. Schauen Sie sich dazu Abb. 1.3 an. Die Mengen A und B sind so gezeichnet, dass sie eine nichtverschwindende

Schnittmenge haben und ebenso nichtverschwindende Schnittmengen mit C.

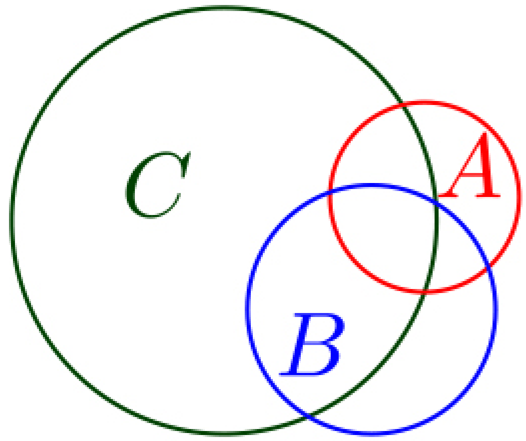


Abb. 1.3 Drei Mengen A, B und C, die nichtleere Schnittmengen miteinander haben

Die linke Seite von (Gl. 1.9a) ist so zu verstehen, dass man zunächst die Schnittmenge von A und B aus B entfernt. Das erhaltene Ergebnis wird mit C vereinigt. Auf der rechten Seite wird zunächst die Vereinigungvon B und C gebildet und die Schnittmenge von A und C aus A entfernt. Die Schnittmenge der letzten Menge wird dann aus der ersten Vereinigung herausgenommen. Dargestellt ist das Ganze in Abb. 1.4a.

Auf der linken Seite von (Gl. 1.9b) wird der Schnitt von A und B aus B entfernt und die sich ergebende Menge mit C geschnitten. In der Mitte wird B mit C geschnitten und daraus wird der zugehörige Schnitt mit A entfernt. Auf der rechten Seite wird der Schnitt von A und C aus C herausgenommen und die erhaltene Menge mit B vereinigt (Abb. 1.4b). Alle Operationen führen auf dasselbe Ergebnis.

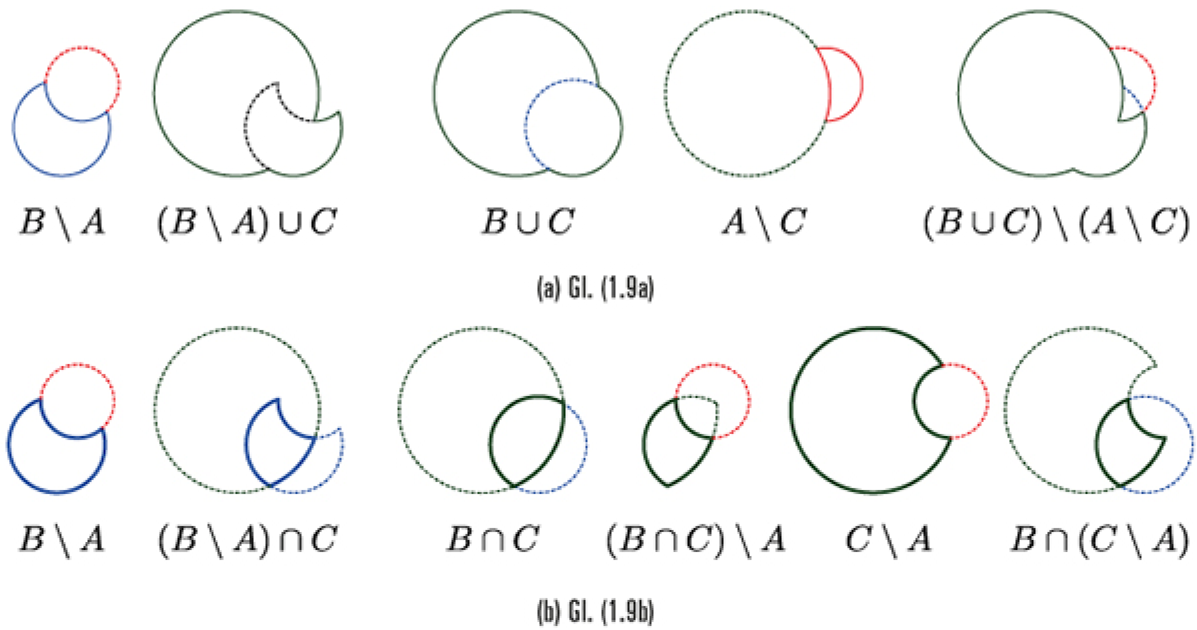


Abb. 1.4 Graphische Darstellungen der Formeln von de Morgan

Zahlenmengen

Der Mengenbegriff erlaubt es, Zahlen mit bestimmten Eigenschaften in Gruppen einzuteilen. Diese Zahlenmengen bilden eine der Grundfesten der Mathematik.

- Die Menge der natürlichen Zahlen ist $\mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$. Ob man die Null dazunimmt, hängt davon ab, welche Quelle man benutzt. Definiert man $\mathbb{N}$ wie angegeben, also ohne die Null, dann gibt es zusätzlich die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null. Letztere ist die Vereinigung von $\mathbb{N}$ und der Menge mit der Null als einziges Element: $\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- Die Menge der negativen ganzen Zahlen ist $\mathbb{Z}^- \equiv \{-1, -2, -3, \dots\}$. Ihre Elemente entsprechen den Elementen von $\mathbb{N}$, wobei jedes einzelne ein Minuszeichen erhält.
- Die Menge der ganzen Zahlen ist $\mathbb{Z} \equiv \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Es handelt sich dabei um eine Vereinigung der

Menge der negativen ganzen Zahlen, der Null und der Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}^{-} \cup \mathbb{N}_0$.

- Die Menge der rationalen Zahlen enthält als Elemente alle Zahlen, die sich als Bruch mit ganzen Zahlen darstellen lassen: $\mathbb{Q} \equiv \{m/n;\ m,\ n \in \mathbb{Z};\ n \neq 0\}$. Beispielsweise sind -11/3 und 17/191 rationale Zahlen.
- Zusammen mit den rationalen Zahlen werden alle Zahlen, die nicht als Bruch mit ganzen Zahlen dargestellt werden können, in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zusammengefasst. Dazu gehören Wurzeln, also z.B. $\sqrt{2}$, der berühmte goldene Schnitt $\Phi \equiv (1 + \sqrt{2})/2$ und verschachtelte Wurzeln wie $\sqrt{\sqrt[5]{3} + 1}$. Das Komplement $I \equiv \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nennt man die irrationalen Zahlen. Dabei handelt es sich um alle reelle Zahlen, die übrig bleiben, wenn man die durch Brüche darstellbaren Zahlen entfernt.
- Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist eine Erweiterung der reellen Zahlen, die die Angabe der Lösungen von Gleichungen erlaubt, die mit den reellen Zahlen allein nicht bestimmt werden können. Das umfasst z.B. Lösungen von Gleichungen der Form $x^2 = -a$ mit $a > 0$. Auf die komplexen Zahlen wird in Kapitel 6 des Buchs näher eingegangen.

Letztendlich sind alle in der Reihenfolge angegebenen Zahlenmengen Teilmengen voneinander: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Intervalle und ihre Darstellung durch Mengen

Zahlenmengen werden oft an Zahlenstrahlen dargestellt. Ein bestimmter Abschnitt eines solchen Zahlenstrahls nennt man Intervall. Auf der Grundlage von $\mathbb{R}$ beschreibt z.B. $[a, b]$ alle reellen Zahlen x, für die $a \leq x \leq b$ gilt.

Hierbei sind *a* und *b* die Intervallgrenzen, und sie gehören in diesem Fall zum Intervall selbst dazu. Derartige Intervalle bezeichnet man deshalb als geschlossen. Im Gegensatz dazu sind $[a, b)$ und $(a, b]$ halboffen. Das erste umfasst alle reellen Zahlen mit $a \leq x < b$ und das zweite mit $a < x \leq b$. Letztendlich sind offene Intervalle solche, bei denen keine der Intervallgrenzen selbst dazugehört, also (a, b). Letzteres steht stellvertretend für $a < x < b$.

Man kann jedes Intervall auch als Menge betrachten. Die Schreibweise für die oben genannten Intervalle als Mengen lautet wie folgt:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, \quad M_2 = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}, \tag{1.10a}$$

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, \quad M_2 = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}, \tag{1.10b}$$

Sie sehen, dass in dieser Art der Formulierung *eine Menge* an Information steckt. Zunächst wird die vollständige Zahlenmenge angegeben und anschließend alle Eigenschaften, die die betrachteten Elemente der Menge erfüllen. Beide Informationen werden durch einen senkrechten Strich voneinander abgetrennt.

Für die obigen Mengen ist *b* die kleinste obere Schranke (das **Supremum**), weil alle Elemente kleiner oder gleich *b* sind und *b* zudem kleiner ist als alle anderen oberen Schranken, die man angeben könnte. Dementsprechend handelt es sich bei *a* um die größte untere Schranke(das **Infimum**), denn alle Elemente dieser Mengen sind größer als *a* und *a* ist größer als alle möglichen unteren Schranken, von denen es unendlich viele gibt. Beachten Sie, dass Supremum und Infimum nicht notwendigerweise Teil der jeweiligen Menge sein müssen. Beispielsweise gehört *b* nicht mehr zu den Mengen M_2, M_4 und *a* nicht zu M_3, M_4. Gehört ein Supremum noch zu einer Menge selbst, so heißt es Maximum. Ein Infimum nennt man in diesem

Falle auch Minimum. Für die gegebenen Mengen ist b ein Maximum von M_1, M_3 und a ein Minimum von M_1, M_2.

1.3 Binomialkoeffizienten

Aus der Schule kennen Sie sicherlich noch das Pascal'sche Dreieck, das in Abb. 1.5a gezeigt ist. Erinnern Sie sich auch daran, wo die auftretenden Zahlen eine Rolle spielen? Wenn Sie eine Summe aus zwei Variablen – also z.B. $x + y$ – potenzieren, handelt es sich bei den Zahlen im Pascal'schen Dreieck um die Koeffizienten des sich ergebenden Ausdrucks. Beispielsweise kann man die folgenden Gleichungen aus der dritten, vierten bzw. fünften Spalte des Dreiecks ablesen:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \quad (1.11a)$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3, \quad (1.11b)$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4. \quad (1.11c)$$

Es gibt eine zweite Möglichkeit, das Pascal'sche Dreieck aufzuschreiben, die Sie möglicherweise in der Schule nicht kennengelernt haben; gezeigt ist sie in Abb. 1.5b. Hier entspricht jede einzelne Zahl einem Ausdruck der Form (n k) mit n, $k \in \mathbb{N}_0$, den man Binomialkoeffizient nennt. Letztere sind wie folgt definiert:

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!}. \quad (1.12)$$

Hier ist $k! \equiv k \cdot (k - 1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$ die Fakultät, wobei $0! \equiv 1$.