

Ein Buch, das einigen Belastungen standhält

Festigkeitslehre

FÜR
DUMMIES®

Auf einen Blick:

- Die Prinzipien der Mechanik verstehen
- Das Grundlegende zu Belastung, Beanspruchung, Verformung und deren Wechselwirkungen begreifen
- Einfache statische Fragestellungen bewältigen

James H. Allen



Teil I

Das Rüstzeug für die Festigkeitslehre

The 5th Wave

By Rich Tennant



»Es tut mir Leid, Frau Oberbichler. Ich habe mir ihre neutrale Faser angesehen und ihre polaren und biaxialen Flächenmomente. Das ist alles in Ordnung. Das gilt auch für ihren Schwerpunkt und ihre Querschnittsflächen. Die Ursache könnte ihr Trägheitsradius sein, aber vor Donnerstag habe ich keine Zeit, mir das genauer anzusehen.«

In diesem Teil ...

Dieser Teil führt Sie in die grundlegenden Ideen der Festigkeitslehre ein und zeigt die Zusammenhänge zwischen der Festigkeitslehre einerseits und der Statik und der Dynamik (die zusammen die Mechanik bilden) andererseits auf. Darüber hinaus finden Sie eine Auffrischung der für dieses Buch erforderlichen Mathematikkenntnisse (Geometrie, Trigonometrie und elementare Differentialrechnung). Ferner werden Einheitensysteme und die wichtigsten Einheiten vorgestellt, die Sie für dieses Buch benötigen.

Schließlich werden in diesem Teil noch die wichtigsten Grundlagen der Statik wiederholt, beispielsweise die Berechnung der inneren Kräfte in einem Bauelemente, die auch für die Festigkeitslehre von großer Bedeutung ist. Ein weiteres Thema ist die Berechnung von Querschnittskennwerten wie die Querschnittsfläche, der Flächenschwerpunkt und die ersten und zweiten Flächenmomente. All diese Größen spielen in der Festigkeitslehre eine ausschlaggebende Rolle.

1

Mithilfe der Festigkeitslehre das Verhalten von Materialien vorhersagen

In diesem Kapitel ...

- ▶ Definition der Festigkeitslehre
 - ▶ Einführung von Spannung und Dehnung
 - ▶ Verwendung der Festigkeitslehre in der Entwicklung
-

Die Festigkeitslehre ist eine der ersten anwendungsorientierten Ingenieurwissenschaften, denen Sie in Ihrer Ausbildung begegnen. Sie ist ein Teil des Gebietes der Physik, das als *Mechanik* bezeichnet wird, die weitere Teilgebiete wie das Studium der Statik und der Dynamik starrer Körper enthält. Die Mechanik ist ein Bereich der Physik, der Ihnen das Studium des Verhaltens und der Bewegung von Körpern in Ihrer Umgebung ermöglicht.

Die Festigkeitslehre verwendet grundlegende Prinzipien der Statik und Dynamik und erlaubt Ihnen, einen Körper näher zu betrachten, um zu erfahren, wie er sich unter Belastung verhält. Sie ist der Bereich der Mechanik und der Physik, der Ihnen dabei helfen kann, zu entscheiden, ob Sie Ihren Entschluss, die Wand zwischen Küche und Wohnzimmer beim Umbau Ihres Hauses einzureißen, noch einmal überdenken sollten (es sei denn, Sie hätten

Ihr Schlafzimmer aus dem ersten Stock gerne unten in der Küche).

Obwohl die Statik Ihnen alles über Kräfte und Lasten sagen kann, die bei der Belastung von Körpern auftreten, so gibt sie keine Auskunft darüber, wie sich ein Körper als Antwort auf diese Belastung verhält. An dieser Stelle kommt die Festigkeitslehre ins Spiel.

Statik und Dynamik verbinden sich zur Mechanik

Bereits seit der Frühzeit haben die Menschen versucht, ihre Umgebung durch den Gebrauch von Werkzeugen oder das Formen der sie umgebenden Materialien zu verbessern. Zunächst erfolgten diese Verbesserungen auf der Grundlage von Erfahrungswerten und wurden meistens durch eine Versuchs-und-Irrtums-Methode entwickelt. Bauten wie die großartigen Pyramiden in Ägypten oder die Chinesische Mauer (oder Große Mauer) wurden ohne die Hilfe von ausgefallenen Materialien oder Formeln gebaut. Das änderte sich erst viele Jahrhunderte später, als Mathematiker wie Sir Isaac Newton in der Lage waren, diese Ideen in Form von mathematischen Gleichungen zu formulieren (in vielen Fällen, um Fehlannahmen zu verbessern), die halfen, den Bereich der Physik einzuführen, der Mechanik genannt wird.

Die *Mechanik* beruht auf den Untersuchungen von Newton und den von ihm entwickelten Bewegungsgesetzen. Sowohl die Statik als auch die Dynamik stellen einfache Konzepte zur Verfügung, die sich als sehr nützlich zur Untersuchung der Welt

erwiesen haben. Man verwendet die *Statik*, um das Verhalten von Körpern in Ruhe (auch als *Gleichgewicht* bezeichnet) zu beschreiben, wie etwa das Gewicht des Schnees auf Ihrem Terrassendach oder das Verhalten dieses Buches, wenn es auf Ihrem Tisch liegt. Die *Dynamik* erklärt dagegen das Verhalten von sich bewegendem Körpern; das reicht von der Geschwindigkeit von Abfahrtsläufern bis zur Flugbahn eines auf einen Korb zusteuernenden Basketballs.

Die Statik und die Dynamik haben gemein, dass sie sich in ihrer grundlegenden Form mit dem Verhalten *starrer Körper* beschäftigen (Körper, die sich unter einer Belastung nicht verformen). In der Realität verformen sich aber alle Körper bis zu einem gewissen Grad (deshalb werden sie *verformbare Körper* genannt), doch hängt dieser Grad an Verformung vollständig von der Festigkeit der jeweiligen Materialien ab. Die *Festigkeitslehre* (die manchmal auch als *Kontinuumsmechanik* bezeichnet wird) ist das Teilgebiet der Mechanik, das versucht, die Auswirkung von Belastung auf Körper zu erklären.

Die Entwicklung der Festigkeitslehre über die Jahrhunderte beruht auf der Verknüpfung von Experimenten und Beobachtungen in Verbindung mit der Entwicklung einer auf Gleichungen beruhenden Theorie. Herausragende Einzelpersonen wie Leonardo da Vinci (1452–1519) und Galileo Galilei (1564–1642) führten Experimente zum Verhalten eines breiten Feldes von Körpern (wie Balken und Stäben) unter Belastung durch. Mathematiker und Naturwissenschaftler wie Leonhard Euler entwickelten die Gleichungen, die gebraucht werden, um die Grundlagen der Theorie formulieren zu können.

Die Festigkeitslehre ist bei der Ausbildung von Ingenieuren oftmals der Nachfolgekurs von Statik und Dynamik, da sie auf den Werkzeugen und Konzepten aufbaut, die man in der Statik und der Dynamik lernt; sie öffnet die Tür zur ingenieurwissenschaftlichen Entwicklung. Und das ist der Punkt, an dem die Dinge interessant werden.

Definition der Begriffe der Festigkeitslehre

Körper verformen sich unter Belastung. Die Festigkeitslehre hilft Ihnen, zu bestimmen, wie stark sich ein Körper verformt. Genau wie die Statik kann die Festigkeitslehre sehr methodisch sein und es Ihnen ermöglichen, mit einigen einfachen Schritten das Verhalten der Körper in der Welt um Sie herum zu bestimmen. Man kann die Analyse des Verhaltens von Körpern unter Belastung in die Untersuchung und Anwendung von zwei grundlegenden Wechselwirkungen unterteilen: Spannung und Dehnung.

Mit diesen grundlegenden Konzepten stehen Ihnen zwei Formalismen zur Bestimmung der maximalen Werte von Spannung und Dehnung zur Verfügung, die erlauben zu untersuchen, ob ein Material (und der Körper, den es erzeugt) ausreichend fest ist, während man gleichzeitig ermittelt, wie stark es sich verformt. Sie können Ihre Aufmerksamkeit dann auf bestimmte Ursachen von Spannungen richten, die weiter unten in diesem Kapitel erläutert werden.

Spannung

Die *Spannung* ist ein Maß für die Stärke einer inneren Kraft, die auf den Querschnitt eines Körpers wirkt.

Obwohl Sie wissen, dass ein größerer Körper imstande ist, einer größeren Kraft standzuhalten, ist die Spannung diejenige Größe, die Ihnen sagt, ob ein Körper wirklich groß genug ist. Diese Rechnung erlaubt Ihnen, die Stärke der wirkenden Kräfte mit der tatsächlichen Festigkeit (oder Belastbarkeit) des Materials selbst zu vergleichen. Das Thema Spannung wird in [Kapitel 6](#) ausführlich erläutert; dort wird auch der Unterschied zwischen den beiden wesentlichen Arten der Spannung behandelt, der *Normalspannung* und der *Scherspannung*.

Mit dieser Kenntnis der Spannung und dem Wissen, dass Normal- und Scherspannung gleichzeitig in einem Körper auftreten können, können Sie Spannungstransformationen (siehe [Kapitel 7](#)) benutzen, um maximale Spannungen (*Hauptspannungen*) sowie deren Ausrichtung in einem Körper zu bestimmen.

Dehnung

Die *Dehnung* ist ein Maß für die Verformung eines Körpers in Bezug auf seine ursprüngliche Größe, also ein Maß für die Stärke der Änderung der Form des Körpers. Während die Spannung eine Funktion der Kraft ist, die innerhalb eines Körpers wirkt, kann eine Dehnung auch ohne eine Kraft auftreten. Verschiedene Einflüsse, wie etwa thermische Effekte, können einen Körper dazu veranlassen, sich aufgrund einer Temperaturänderung auszudehnen oder zusammenzuziehen, auch ohne die Wirkung einer physikalischen Kraft. Mehr über die Dehnung finden Sie in [Kapitel 12](#).

Genau wie bei der Spannung kann auch die Dehnung maximale und minimale Werte annehmen (*Hauptdehnungen*); sie treten in einer eindeutigen Richtung im Körper auf. In [Kapitel 13](#) wird erläutert, wie man *Dehnungstransformationen* durchführt.

Untersuchungen mithilfe der Spannung

Spannungen legen fest, wie Kräfte auf Körper wirken; sie können von einer Vielzahl von inneren Kräften verursacht werden. Die folgende Aufzählung gibt Ihnen einen Überblick über die verschiedenen Arten der Spannung, mit denen Sie als Ingenieur in Berührung kommen:

- ✓ **Axiale Spannung:** *Axiale Spannungen* entstehen durch innere axiale Kräfte (Kräfte, die entlang der Längsachse eines Stabes wirken). Beispiele für axiale Spannungen sind die Zugspannung in einem Seil oder die Druckspannung in einem kurzen Stab. Wenn Sie weitere Beispiele kennen lernen wollen, blättern Sie weiter zu [Kapitel 8](#).
- ✓ **Biegespannung:** *Biegespannungen* entstehen, wenn in einem Körper innere Biegemomente auftreten. Beispiele für Stäbe, die einer Biegung ausgesetzt sind, sind die Balken Ihrer Lieblings-Straßenüberführung oder die Dachbalken Ihres Hauses. Biegespannung werden in [Kapitel 9](#) ausführlich behandelt.
- ✓ **Scherspannung:** *Scher- oder Schubspannungen* sind etwas komplizierter, da sie verschiedene Ursachen haben können. Schubspannung infolge von Querkräften treten auf, wenn Sie versuchen, ein Blatt Papier mit einer Schere zu schneiden, indem Sie zwei Kräfte in entgegengesetzter Richtung entlang der Schnittlinie anlegen. Schubspannung können aber auch das Ergebnis von Biegemomenten sein. Beide Arten der Scherspannung werden in [Kapitel 10](#) erläutert. Die *Torsion* (Verdrillung) ist eine weitere Art der Belastung, die durch Drehung Scherspannungen in

Körpern verursacht; sie tritt in rotierenden Maschinen und Achsen auf. Die Torsion wird in [Kapitel 11](#) diskutiert.

Untersuchungen mithilfe der Dehnung

Sie können die Dehnung benutzen, um eine Reihe von Sachverhalten zu untersuchen:

- ✓ **Experimentelle Untersuchungen:** Die Dehnung ist bei der Durchführung von Experimenten sehr wichtig, da sie anders als die Spannung eine Größe ist, die man mit Geräten wie elektromechanischen Dehnungsmessstreifen physikalisch messen kann. Man kann dann diese Dehnung mithilfe von Materialkonstanten zur jeweiligen Spannung in dem Material in Verhältnis setzen.
- ✓ **Verformung ohne Belastung:** Die Dehnung kann Ihnen auch helfen, Situationen zu untersuchen, in denen sich Körper verformen, ohne dass sie eine Belastung durch eine Kraft oder ein Drehmoment erfahren. So verändern beispielsweise manche Körper ihre Form, wenn sie einer Temperaturänderung ausgesetzt sind. Um die Auswirkung solcher Temperaturänderungen zu messen, verwendet man ebenfalls das Prinzip der Dehnung.

Einführung des »Materials« in die Festigkeitslehre

Nachdem Sie den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung verstanden haben, sind Sie in der Lage, Ihre Aufmerksamkeit auf die Erforschung des Verhaltens von Materialien zu richten. Bei allen Materialien gibt es einen eindeutigen Zusammenhang zwischen der Belastung (oder Spannung) und der Verformung (oder Dehnung); diese spezifischen Materialeigenschaften spielen bei der Planung von Bauwerken und Bauteilen eine entscheidende Rolle.

Einer der entscheidenden Zusammenhänge bei der Beziehung zwischen Spannung und Dehnung wird durch das Hooke'sche Gesetz beschrieben (siehe [Kapitel 14](#)). Genaugenommen ist es in der Festigkeitslehre das allerwichtigste Prinzip überhaupt, da es das Gesetz ist, das Spannung und Dehnung in einen direkten Zusammenhang stellt; dies ist der erste Schritt in der Entwicklung einer Theorie, die Ihnen sagen kann, wie stark sich der Ast durchbiegt, auf dem Sie sitzen. Diese Beziehung dient auch als Grundlage für das Produktdesign und einige weitergehende Rechnungen, die in [Teil IV](#) vorgestellt werden.

Mit der Festigkeitslehre arbeiten

Wenn Sie über die Hilfsmittel verfügen, um Körper in ihrer Umgebung zu analysieren, dann können Sie diese Mittel bei bestimmten Anwendungen für Sie arbeiten lassen. Die folgende Liste enthält einige der Standardanwendungen der Festigkeitslehre:

- ✓ **Zusammengesetzte Spannungen:** In manchen Fällen möchten Sie alle einzelnen und einfachen Spannungseffekte, die in [Teil II](#) vorgestellt werden, zu

einer einzigen Gesamtspannung zusammensetzen. Sie können komplexe Systeme wie Körper, die sich in mehrere Richtungen gleichzeitig biegen (zweiachsige Biegung), oder Balken mit zusammengesetzten Scher- und Torsions-Effekten analysieren. Mehr dazu finden Sie in [Kapitel 15](#).

- ✓ **Verschiebung und Verformung:** *Verformungen* sind ein Maß für die Antwort einer Struktur auf eine Spannung. Man kann mithilfe grundlegender Methoden, die auf dem Hooke'schen Gesetz beruhen, Verbiegungen und Drehbewegungen für einen breiten Anwendungsbereich berechnen (siehe [Kapitel 16](#)).
- ✓ **Statisch unbestimmte Strukturen:** Bei einfachen Strukturen können Sie den Gleichgewichtsbedingungen, die Sie bereits aus der Statik kennen, alle wichtigen Informationen zur Analyse entnehmen. Allerdings ist ein Großteil der zu untersuchenden Körper wesentlich komplexer. Wenn die aus der Statik bekannten Gleichgewichtsbedingungen nicht ausreichend sind, um einen Körper zu analysieren, nennt man den Körper statisch *unbestimmt*. In [Kapitel 17](#) wird gezeigt, wie verschiedene Arten von unbestimmten Systemen mithilfe der Prinzipien der Festigkeitslehre behandelt werden können.
- ✓ **Stäbe:** Anders als die meisten anderen Körper, die nur dann versagen, wenn die Spannung die jeweilige Festigkeit übersteigt, können Stäbe eine geometrische Instabilität erfahren, die *Knickung* genannt wird; dabei neigt oder verbiegt sich ein Stab unter einer Druckspannung. In [Kapitel 18](#) erfahren Sie alles Notwendige über Stäbe.
- ✓ **Konstruktion:** *Konstruktion* ist die Fähigkeit, die minimale Größe eines Bauelements zu bestimmen, so

dass es sicher die Spannung aushalten bzw. die Biegunskriterien erfüllen kann. Mehr dazu finden Sie in [Kapitel 19](#).

- ✓ **Energiemethoden:** *Energiemethoden* stellen einen weiteren Bereich der Analyse dar, bei dem aus der Physik bekannte energetische Prinzipien zu den Methoden in Beziehung gesetzt werden, die mit Spannungen und Dehnungen arbeiten. In [Kapitel 20](#) erfolgt eine Einführung von Begriffen wie der Dehnungsenergie und Impakt-Belastungen.

2

Wiederholung der Mathematik und der in der Festigkeitslehre verwendeten Einheiten

In diesem Kapitel ...

- ▶ Auffrischung der grundlegenden Trigonometrie und Geometrie
 - ▶ Anwendung der Infinitesimalrechnung
 - ▶ Verwendung des SI-Einheitensystems
-

Wie in anderen Bereichen der Ingenieur- und Naturwissenschaften spielt die Mathematik auch in der Festigkeitslehre eine entscheidende Rolle. Es ist die Mathematik, mit deren Hilfe Sie die furchteinflößenden Statikgleichungen lösen, die Sie aufstellen; sie verleiht der Festigkeitslehre ihre herausragende Stellung bei der Bestimmung und Untersuchung von Spannungen und Dehnungen.

Am Anfang reichen grundlegende Kenntnisse in Algebra, Geometrie und Trigonometrie für Ihre Arbeiten in der Festigkeitslehre aus. Später hilft Ihnen die Infinitesimalrechnung, insbesondere die Integration und Differentiation, Größen wie die Biegung von Balken und die Beziehung zwischen inneren Kräften zu bestimmen.

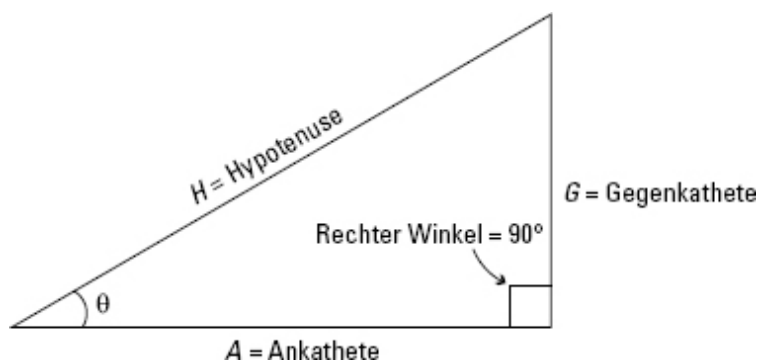
Dieses Kapitel bietet Ihnen eine Auffrischung der wichtigsten mathematischen Grundlagen für die

Festigkeitslehre. Darüber hinaus werden sowohl die Einheiten der Festigkeitslehre als auch das SI-Einheitensystem vorgestellt.

Wichtige geometrische Methoden verstehen

In der Festigkeitslehre treffen Sie auf verschiedene grundlegende geometrische Prinzipien wie etwa die Winkleinheiten und den berühmten Satz des Pythagoras. In den folgenden Abschnitten werden Sie daher lernen, welche Rolle diese Themen in Ihrem Studium der Festigkeitslehre spielen.

Eine der gebräuchlichsten geometrischen Beziehungen beschreibt den Zusammenhang zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks (ein Dreieck mit genau einem Winkel von 90°). Diese Beziehung ist unter dem Namen *Satz von Pythagoras* bekannt; sie ist ein wesentlicher Bestandteil der Transformationsrechnungen in den [Kapiteln 7](#) und [13](#). Das Dreieck in [Abbildung 2.1](#) veranschaulicht diese Beziehung.



[Abbildung 2.1](#): Der Satz von Pythagoras

Der Satz von Pythagoras kann durch die folgende Beziehung beschrieben werden:

$$H^2 = A^2 + G^2$$

Dabei ist H die Hypotenuse (die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt), G die Seite, die dem Referenzwinkel θ gegenüberliegt, und A die Seite, die an den Winkel θ grenzt.



In vielen Lehrbüchern wird die Formel auch in der Form $A^2 + B^2 = C^2$ geschrieben; in dieser Formel steht C statt H und B statt G (A bleibt stehen).

Das Lösen von linearen Gleichungssystemen

Ein Aspekt der Algebra, der in der Festigkeitslehre immer wieder auftritt, ist das *gleichzeitige* Lösen von mehreren algebraischen Gleichungen (das sind diese lästigen Gleichungen mit mehreren Variablen). Diese Gleichungen treten in der Festigkeitslehre regelmäßig auf, wenn man etwa mit DMS-Rosetten (die in [Kapitel 13](#) erläutert werden) arbeitet oder statisch unbestimmte mechanische Systeme löst (siehe [Kapitel 17](#)).

Um derartige Gleichungen zu lösen, müssen Sie ein wenig einfache Algebra anwenden. Betrachten Sie etwa das folgende lineare Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen x und y :

$$3x + 2y = 11$$

$$9x - 3y = -3$$

Da man zwei verschiedene Gleichungen mit denselben unbekannten Variablen hat, kann man diese Gleichungen gleichzeitig lösen und die Werte der Variablen bestimmen, indem man ein paar einfache Schritte verwendet:

1. Lösen Sie eine der Gleichungen für eine der unbekannten Variablen.

Sie können beispielsweise die erste Gleichung einfach nach x auflösen.

$$x = \frac{1}{3}(11 - 2y)$$

2. Setzen Sie den Ausdruck für die erste Variable aus Schritt 1 in die verbleibende Gleichung ein und lösen Sie diese für die andere Variable.

$$\begin{aligned} 9\left(\frac{1}{3}(11 - 2y)\right) - 3y &= -3 \\ \Rightarrow 33 - 9y &= -3 \\ \Rightarrow y &= +4 \end{aligned}$$

3. Setzen Sie das Ergebnis aus Schritt 2 in die Gleichung aus Schritt 1 ein.

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}(11 - 2 \cdot 4) \\ \Rightarrow x &= +2 \end{aligned}$$

4. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einer der ursprünglichen Gleichungen.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 &= 11 \\ \Rightarrow 11 &= 11 \quad \text{OK} \end{aligned}$$



Sie können mit dieser Methode auch Gleichungssysteme lösen, die aus mehr als zwei Gleichungen bestehen; Sie müssen nur die Schritte 1 und 2 solange wiederholen, bis Sie alle Variablen bestimmt haben. Sie müssen nur daran denken, dass die Anzahl der Variablen, die Sie bestimmen wollen, der Anzahl der Gleichungen entsprechen muss.

Einfache trigonometrische Beziehungen

Die *Trigonometrie* ist das Gebiet der Mathematik, das sich mit Winkeln beschäftigt. Drei der wichtigsten Funktionen in den Ingenieurwissenschaften sind die trigonometrischen Funktionen Sinus (sin), Kosinus (cos) und Tangens (tan), die die Beziehungen zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks beschreiben. Mit Bezug auf [Abbildung 2.1](#) kann man diese Beziehungen folgendermaßen ausdrücken:

$$\text{Sinus : } \sin \theta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Kosinus : } \cos \theta = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Tangens : } \tan \theta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$



Welche Seite die Ankathete und welche die Gegenkathete ist, hängt allein davon ab, welchen Winkel Sie als Referenzwinkel θ wählen. Seien Sie also aufmerksam!

Etwas elementare Infinitesimalrechnung

Wenn Sie mit Methoden der Festigkeitslehre arbeiten, werden Sie schnell entdecken, dass Sie viele Ausdrücke, die Sie benutzen, in Form von Polynomen darstellen können. Daher können Sie die Hilfsmittel der Infinitesimalrechnung (wie Differentiation und Integration) verwenden, um die Lage und den Betrag der minimalen und maximalen Werte zu bestimmen. Diese Methoden werden in den folgenden Abschnitten erläutert.

Integration und Differentiation von Polynomen

In Grundkursen der Festigkeitslehre sind bestimmte Fertigkeiten in der Infinitesimalrechnung sehr nützlich, einschließlich der Integration und Differentiation von Polynomfunktionen; das sind Funktionen, bei denen man die Potenzregel anwenden kann. Natürlich gehört zu den grundlegenden Kenntnissen deutlich mehr (lesen Sie: tonnenweise) als das, was hier behandelt wird. Für die Absichten dieses Buches ist es jedoch ausreichend, wenn Sie bei der Art von Funktionen, die Sie letztendlich aufstellen, die Potenzregel anwenden können.

Elementare Differentiation und Tangenten an Funktionen

Die Ableitung einer Funktion beschreibt die Steigung der Tangente an eine Funktion in einem bestimmten Punkt x . Man schreibt die Ableitung einer Funktion $f(x)$ in der Form:

$$f'(x) \text{ oder } \frac{df(x)}{dx}$$

Die Potenzregel besagt, dass man bei einer stetigen und kontinuierlichen Funktion $f(x)$ (die Funktion besitzt weder Lücken noch Knicke) der Ordnung n die Ableitung folgendermaßen bildet:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

Für die Funktion $f(x) = 3x^6 + 7x^3 - 9$ ergibt sich beispielsweise folgende Ableitung:

$$f'(x) = 6 \cdot 3x^{(6-1)} + 3 \cdot 7x^{(3-1)} + 0 = 18x^5 + 21x^2$$

Die Ausdrücke innerhalb der Klammern zeigen an, dass die Potenz des Ursprungsterms abgeleitet, also um 1 vermindert wurde. Da die Ableitung einer Konstante immer null ist, verschwindet der Term -9 in der Ableitung.

Dieses Beispiel zeigt Ihnen, wie die erste Ableitung einer einfachen Funktion gebildet wird. Man kann aber auch höhere Ableitungen bilden. Wenn Sie die zweite Ableitung bilden wollen, dann leiten Sie zunächst die Funktion $f(x)$ ab und dann deren Ableitung. Je höher die Ordnung der Ableitung ist, die Sie berechnen wollen, desto mehr Ableitungen müssen Sie aufstellen. In der Festigkeitslehre reicht gewöhnlich eine Ableitung dritter oder vierter Ordnung, um zum Ergebnis zu kommen.

Elementare Integration

Wenn man ein Integral zwischen einer Obergrenze b und einer Untergrenze a auswertet, dann berechnet man ein bestimmtes Integral. Ein bestimmtes Integral für die Funktion $f(x)$ kann folgendermaßen berechnet werden:

$$\int_a^b f'(x) \cdot dx = f(b) - f(a)$$

Wenn man eine Integration durchführt, dann berechnet man die Fläche unterhalb der Kurve (oder Funktion) zwischen den Grenzen a und b . Diese Fläche kann bei der Berechnung von Schwerpunkten und Schnittpunkten sehr hilfreich sein (schauen Sie in die [Kapitel 4](#) und [5](#)). Das bestimmte Integral eines stetigen und kontinuierlichen Polynoms n -ter Ordnung wie $f'(x) = x^n$ lautet:

$$\int_a^b x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \left(\frac{1}{n+1} \right) (b^{n+1} - a^{n+1})$$

Wenn man den zur Potenzregel umgekehrten Prozess (siehe den vorangegangenen Abschnitt) durchführt, dann führt man eine elementare Integration aus, die *unbestimmte Integration* genannt wird; sie ist bei der Berechnung der Verbiegung in [Kapitel 16](#) von grundlegender Bedeutung. Wenn man ein unbestimmtes Integral berechnet, erscheint bei jeder Integration die Konstante C_1 . Das unbestimmte Integral eines stetigen und kontinuierlichen Polynoms n -ter Ordnung wie $f'(x) = x^n$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C_1$$

Integriert man die Funktion $f''(x) = 3x^6 + 7x^3 - 9$ zweifach, so erhält man folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{7}x^7 + \frac{7}{4}x^4 - 9x + C_1 \\ f(x) &= \frac{3}{56}x^8 + \frac{7}{20}x^5 - \frac{9}{2}x^2 + C_1x + C_2 \end{aligned}$$

Dabei sind C_1 und C_2 numerische Integrationskonstanten, die sich mithilfe der Randbedingungen (bestimmte bekannte Werte der Funktion) berechnen lassen. In

[Kapitel 16](#) wird der Umgang mit Randbedingungen ausführlich erläutert.

Bestimmung von Maxima und Minima mithilfe der Differentialrechnung

Eine Vielzahl der Gleichungen, die Sie in der Festigkeitslehre aufstellen, sind stetige und kontinuierliche Polynome. Glücklicherweise lässt sich die Potenzregel, die im Abschnitt »Elementare Differentiation und Tangenten an Funktionen« vorgestellt wird, sehr gut auf Polynome anwenden.

Erinnern Sie sich, dass Sie beim Differenzieren einer Funktion deren Steigung berechnen. Setzt man die Ableitung gleich null, so betrachtet man einen Punkt, an dem die Steigung der Funktion eine horizontale Gerade beschreibt:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$$

Wenn die Tangente (die Steigung) an einem bestimmten Punkt null ist, so liegt dort ein Maximum oder ein Minimum. Diese Punkte sind besonders hilfreich, wenn man mit verallgemeinerten Gleichungen arbeitet (wie mit denen, die in [Kapitel 3](#) eingeführt werden), da sie die Höchstwerte der inneren Kräfte vorhersagen können, die Sie benötigen, wenn sie die Festigkeitslehre in der Konstruktion anwenden wollen (siehe [Kapitel 19](#)).

Um die Lage der Maxima oder Minima zu bestimmen, benötigt man nur die erste Ableitung der Ursprungsfunktion, setzt diese gleich null und bestimmt den Wert/die Werte der unabhängigen Variable x , die diese Gleichung erfüllen. Hat man diese Punkte berechnet, setzt man diese x -Werte in die

Ursprungsfunktion $f(x)$ ein und berechnet den Funktionswert.

Die Einheiten in der Festigkeitslehre

Wenn man sich mit der Festigkeitslehre beschäftigt, muss man natürlich auch mit den darin verwendeten Einheiten vertraut sein. Daher wird im folgenden Abschnitt das SI-Einheitensystem vorgestellt.

SI-Einheiten

Das *Internationale Einheitensystem* (SI) ist ein System aus Standardeinheiten, das ausschließlich metrische Größen beinhaltet. Die Abkürzung SI steht für den französischen Ausdruck »*Systeme Internationale d'Unites*«; es ist das weltweit am meisten verbreitete Einheitensystem.

Das SI-System beruht auf bestimmten Basiseinheiten für alle Bereiche von Messungen (Masse, Kraft, Weg usw.). In [Tabelle 2.1](#) sind einige Basiseinheiten und ihre Abkürzungen im SI-System aufgelistet.

[Tabelle 2.1](#): *Grundeinheiten und ihre Abkürzungen*

Messgröße	Einheit	Abkürzung
Länge	Meter	m
Kraft	Newton	N
Zeit	Sekunde	s
Masse	Kilogramm	kg

Wenn Sie mit SI-Einheiten arbeiten, müssen Sie in der Lage sein, Basiseinheiten mit verschiedenen Vorsilben

ineinander umzuwandeln. Nachdem Sie eine Basiseinheit aus [Tabelle 2.1](#) ausgewählt haben, können Sie eine Reihe von Vorsilben verwenden, um aus einer Basiseinheit eine skalierte Einheit (eine größere oder kleinere Einheit als die jeweilige SI-Basiseinheit) zu erzeugen. [Tabelle 2.2](#) listet einige in der Festigkeitslehre gebräuchliche SI-Vorsilben auf; dazu gehören solche, die die Einheiten vergrößern (Mega- und Kilo-), aber auch verkleinern (Milli- und Mikro-).

[Tabelle 2.2](#): Vorsilben von Einheiten

Vorsilbe	Symbol	Dezimalwert	Potenzschreibweise
Vergrößerung			
Mega-	M	1 000 000	10^6
Kilo-	k	1 000	10^3
Verkleinerung			
Milli-	m	0,001	10^{-3}
Mikro-	μ	0,000 001	10^{-6}

Wenn Sie das SI-System verwenden, müssen Sie auch wissen, wie man Umrechnungen ausführt. Um von einer kleineren Vorsilbe zu einer größeren zu wechseln, müssen Sie nur mit der in [Tabelle 2.2](#) aufgelisteten Potenzschreibweise der Vorsilbe multiplizieren. Der erste Term in der Umrechnung ist immer die Ursprungseinheit. Der zweite Ausdruck enthält immer die Umrechnung von der Ursprungseinheit in die Basiseinheit. Das zugrunde liegende Prinzip lautet:

Ursprungseinheit · Umrechnung in die Basiseinheit ·
Umrechnung in die Wunscheinheit = Wunscheinheit

Abgeleitete Einheiten, die Sie benötigen

Verschiedene gebräuchliche Einheiten beruhen auf einer Kombination der in [Tabelle 2.2](#) aufgelisteten Basiseinheiten. So ist beispielsweise das Newton eine *abgeleitete Einheit*, die auf einer Kombination anderer Einheiten beruht; es gilt folgender Zusammenhang:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Wie Sie bemerken, steht in diesem Ausdruck die Masseneinheit Kilogramm. Der zweite Ausdruck ist die Einheit der Beschleunigung. Wenn Sie eine Kraft in Newton berechnen wollen, so müssen Sie für die Masse die Einheit Kilogramm verwenden.

Weitere Messgrößen und Einheiten, die in der Festigkeitslehre eine wichtige Rolle spielen, sind:

- ✓ **Drehmoment:** Das Drehmoment ist eine Größe, die eine Rotationsbewegung verursacht. Im SI-Einheitensystem ist die Grundeinheit des Drehmoments Newtonmeter (Nm).
- ✓ **Verteilte Kräfte (Streckenkräfte):** Die Einheit für diese Art von Kräften muss eine »Kraft pro Strecke« beschreiben. Demzufolge lautet sie im SI-System Newton pro Meter (N/m).
- ✓ **Druckeffekte:** Der Druck ist definiert als die Wirkung einer Kraft auf eine bestimmte Fläche. Die SI-Einheit für Druckeffekte (dies schließt Spannungen ein, die ein Maß für die Intensität einer Kraft sind, die auf eine Fläche wirkt) ist Newton pro Quadratmeter (N/m²). Diese Einheit wird auch als Pascal bezeichnet und dann mit Pa abgekürzt.

- ✓ **Volumeneffekte:** Volumeneffekte beruhen auf der Wirkung einer Kraft auf ein Volumen. Beispiele sind die Dichte und das spezifische Gewicht. Die SI-Einheit ist Newton pro Kubikmeter (N/m^3).

Umrechnung von Winkeln von Grad in Radian

Eine typische Falle für Studenten der Mechanik ist der Unterschied zwischen verschiedenen Winkleinheiten. Winkel können entweder in Grad oder in Radian angegeben werden. Beide Einheiten können ineinander umgerechnet werden. Doch wenn Sie die falsche Einheit zur falschen Zeit benutzen, wird auch Ihr Ergebnis falsch sein. Ein *rad* ist das Maß für den Winkel im Zentrum eines Halbkreises. Dieser Winkel entspricht 180° (da ein voller Kreis 360° oder 2π rad enthält). Das bedeutet:

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,296 \dots$$



Die meisten Taschenrechner sind in der Lage, Rechnungen sowohl in Grad als auch in rad durchzuführen; um zwischen beiden Darstellungen zu wechseln, reicht es aus, einen Knopf zu drücken – was häufig unbeabsichtigt passiert, vor allem, wenn Sie es am wenigsten erwarten. Prüfen Sie also die Einstellung Ihres Rechners, bevor Sie mit den trigonometrischen Funktionen in diesem Kapitel wild herumrechnen. (Vielleicht sollten Sie einen Blick in die Gebrauchsanweisung werfen.)

3

Auffrischung ihrer Statikkenntnisse

In diesem Kapitel ...

- ▶ Das Freischneiden von Körpern
 - ▶ Berechnung von Stützkräften und inneren Kräften mithilfe der Gleichgewichtsbedingungen
 - ▶ Bestimmung der inneren Kräfte anhand verallgemeinerter Gleichungen und Flächenberechnungen
-

Einfach ausgedrückt gäbe es ohne die Statik keine Festigkeitslehre. Um die meisten Untersuchungen in der Festigkeitslehre durchführen zu können, muss man sich sowohl mit dem Freischneiden von Körpern als auch mit dem Gleichgewicht und inneren Kräften auskennen. Obwohl ich davon ausgehe, dass Sie bereits vor dem Lesen dieses Buches mit den Grundbegriffen der Statik vertraut waren, nutze ich dieses Kapitel, um Ihnen dabei zu helfen, die Spinnweben von den wichtigsten Statikkenntnissen zu entfernen.

Dieses Kapitel bietet Ihnen einen Überblick über die Grundlagen der Statik einschließlich des Gleichgewichts. Dabei werden Ihre Erinnerungen daran aufgefrischt, wie man Stützkräfte und innere Kräfte berechnet. Anschließend wird erläutert, wie man verallgemeinerte Gleichungen aufstellt, die man verwenden kann, um verschiedene Aufgabenstellungen in der Festigkeitslehre zu lösen, wie etwa die Verbiegung von Stäben in [Kapitel](#)

16. Das Kapitel schließt mit einer schnellen Methode zur Bestimmung innerer Kräfte bei einfachen Statikproblemen.

Das Freischneiden von Körpern

Bevor Sie damit beginnen können, die Methoden der Festigkeitslehre anzuwenden, müssen Sie erst eine statische Analyse durchführen. Der erste Schritt jeder Statik-Analyse ist das Freischneiden der Körper und die Berechnung möglichst vieler Stützkräfte.

Wenn Sie Körper freischneiden wollen, sollten Sie sich daran erinnern, dass es vier Kategorien von Kräften gibt, die Sie neben den Dimensionen und Winkeln berücksichtigen müssen. Diese vier Kategorien sind äußere Kräfte, innere Kräfte, Stützkräfte und die Gewichtskraft; sie werden in den folgenden Abschnitten ausführlich erläutert.

Äußere Kräfte

Äußere Kräfte sind angelegte Kräfte, die direkt auf einen Körper wirken. Beispiele für äußere Kräfte sind die Kraft, die ein Balken ausübt, der auf einen anderen drückt, und die Torsionskraft, die am Ende einer Übertragungswelle angelegt wird. Man kann äußere Kräfte in zwei grundlegende Kategorien unterteilen:

- ✓ **Angelegte Kräfte:** Eine *angelegte Kraft* versucht, einen Körper in Richtung der Kraft zu verschieben. Eine *punktförmig angreifende Kraft* wirkt an einem einzigen Punkt (oder einer sehr, sehr kleinen Fläche); sie wird in Form eines einzelnen Pfeils dargestellt, wenn Sie eine Skizze zum Freischneiden von Körpern anfertigen

(siehe [Abbildung 3.1](#)). Wenn ein Körper auf einen anderen eine Kraft ausübt, dann spricht man von *Kontaktkräften*.

Eine *verteilte Last* (Streckenlast) ist eine Last, die längs einer Strecke angreift, wie in [Abbildung 3.1](#) dargestellt. Verteilte Lasten können in verschiedenen Formen auftreten, wobei die *gleichmäßig verteilte Last* (Last konstanter Intensität) am häufigsten vorkommt. Bei einer *linear verteilten Last* ändert sich die Intensität linear von einem Maximalwert an einem Ende zu einem Minimalwert am anderen Ende. Kräfte können auch auf eine bestimmte Fläche wirken (Drücke); in manchen Fällen, wie bei der Gewichtskraft, könne sie auch auf ein Volumen wirken (Volumenkräfte).



Die resultierende Kraft (oder die *Resultierende*) einer verteilten Last oder eines Drehmoments entspricht der Fläche unter der Funktion, die die Verteilung beschreibt. Die Resultierende greift im geometrischen Mittelpunkt (siehe [Kapitel 4](#)) der Verteilung an. Der Betrag der verteilten Last heißt *Intensität*; sie wird in Kraft pro Strecke oder Drehmoment pro Strecke angegeben.

✓ **Drehmomente:** *Drehmomente* sind Belastungen, die die Biegung eines Körpers (*Biegemomente*) oder das Verdrehen um eine Längsachse (*Torsionsmoment* oder *Verdrillungsmoment*) verursachen. (Wenn Sie mehr über Biegemomente und Verdrillung wissen wollen, blättern Sie weiter zu den [Kapiteln 9](#) und [11](#).) Genau wie Kräfte können Drehmomente punktförmig oder verteilt angreifen. In der graphischen Darstellung wird

ein *Drehmoment* durch einen kreisförmigen Pfeil um den Angriffspunkt gekennzeichnet.

Man kann zur Darstellung eines Torsionsmoments ähnlich vorgehen wie beim Biegemoment, doch das kann im Zweidimensionalen schwierig sein. Daher verwendet man einen Pfeil mit zwei Spitzen, dessen Schaft parallel zur Längsachse liegt, wie in dem Torsionsbeispiel in [Abbildung 3.2](#) gezeigt ist.



Um die Vorzeichen der Drehmomente zu bestimmen, verwendet man einen Trick, der sich Rechte-Hand-Regel nennt. Halten Sie Ihre rechte Hand so wie bei der vergleichbaren Rechte-Hand-Regel in [Kapitel 5](#) (bei der Ausrichtung kartesischer Koordinatensysteme). Drehen Sie Ihre Finger in Richtung des Drehmoments um die Rotationsachse, um die das Drehmoment wirkt (Ihre Finger zeigen in dieselbe Richtung wie die Pfeilspitze des kreisförmigen Drehmoment-Pfeils). Wenn der Daumen Ihrer rechten Hand in Richtung des positiven Endes einer kartesischen Achse zeigt, ist es ein positives Drehmoment um diese Achse. Zeigt der Daumen dagegen zum negativen Ende, handelt es sich um ein negatives Drehmoment.

