

Andreas Thiel

Zahlbegriffsentwicklung und Zehnerübergang

**Voraussetzungen und Probleme
im mathematischen Anfangsunterricht**

Thiel, Andreas: Zahlbegriffsentwicklung und Zehnerübergang: Voraussetzungen und Probleme im mathematischen Anfangsunterricht. Hamburg, Diplomica Verlag GmbH 2015

Buch-ISBN: 978-3-8428-9449-5

PDF-eBook-ISBN: 978-3-8428-4449-0

Druck/Herstellung: Diplomica® Verlag GmbH, Hamburg, 2015

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Die Informationen in diesem Werk wurden mit Sorgfalt erarbeitet. Dennoch können Fehler nicht vollständig ausgeschlossen werden und die Diplomica Verlag GmbH, die Autoren oder Übersetzer übernehmen keine juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für evtl. verbliebene fehlerhafte Angaben und deren Folgen.

Alle Rechte vorbehalten

© Diplomica Verlag GmbH

Hermannstal 119k, 22119 Hamburg

<http://www.diplomica-verlag.de>, Hamburg 2015

Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitende Gedanken	5
2.	Historische Ansätze der Zahlbegriffsentwicklung	7
2.1	Das Phänomen „Zahl“	7
2.2	Kardinalzahltheorie	7
2.3	Ordinalzahltheorie.....	8
2.4	Zusammenfassung.....	8
3.	Zahlbegriffsentwicklung nach PIAGET	9
3.1	Entwicklungsverständnis	9
3.2	Zahlverständnis	10
3.3	Stufen der kindlichen Entwicklung.....	10
3.4	Zahlbegriffserwerb	12
3.4.1	Invarianz	12
3.4.2	Klassifikation.....	14
3.4.3	Seriation	15
3.4.4	Arithmetik.....	16
3.5	Zusammenfassung.....	17
3.6	Kritik an PIAGET	18
3.6.1	Kritik am Zahlbegriffskonzept.....	18
3.6.2	Allgemeine Kritik	18
4.	Intuitive Mathematik.....	19
4.1	Exkurs: Numerische Fähigkeiten von Tieren	20
4.2	Intuitive numerische Kompetenzen des Kindes	22
4.2.1	Subitizing	22
4.2.2	Anzahlunterscheidung.....	24

4.2.3	Arithmetik.....	24
4.2.4	Grenzen	25
4.2.5	Erklärungsversuche	26
5.	Vorschulische numerische Kompetenzen des Kindes	28
5.1	Protoquantitative Schemata	28
5.2	Aspekte der Zahl.....	29
5.3	Zählwissen	30
5.3.1	Zählprinzipien nach GELMAN und GALLISTEL	30
5.3.2	Zählentwicklung nach FUSON	31
5.3.3	Zusammenfassung.....	32
5.4	Zählstrategien.....	32
5.5	Teile-Ganzes Verständnis	33
5.6	Modell von WEIßHAUPT und PEUCKER	35
5.7	Weitere Modelle zur Zahlbegriffsentwicklung	36
5.7.1	Entwicklungsmodell früher mathematischer Kompetenzen nach KRAJEWSKI.....	36
5.7.2	Entwicklungsmodell nach FRITZ und RICKEN.....	38
6.	Beiträge der Neurowissenschaften	40
6.1	Neuropsychologische Basisfunktionen im Zusammenhang mit mathematischer Leistung nach ROURKE.....	40
6.2	Triple-Code-Modell nach DEHAENE.....	41
6.3	Modell der Entwicklung zahlenverarbeitender Hirnfunktionen nach VON ASTER	42
6.3.1	Lokalisation.....	44
6.3.2	Module	45
6.4	Theorie der minimalen kognitiven Architektur nach ANDERSON.....	47
7.	Erwerb mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten.....	49
7.1	Modell des Erwerbs mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten	50

7.2	Rechenschwächen - Definitionsversuche.....	52
7.3	Ursachen einer Rechenschwäche.....	55
7.3.1	Faktor Kind	56
7.3.2	Faktor Familie und soziales Umfeld.....	59
7.3.3	Faktor Schule	60
7.3.4	Zusammenfassung.....	62
8.	Ein ausgewählter Lerngegenstand – der Zehnerübergang	62
8.1	Grundaufgaben.....	63
8.2	Mathematische Stufentheorie nach AEBLI.....	63
8.3	Strategien zum Zehnerübergang	65
8.4	Warum nicht-zählende Strategien?	66
8.5	Forderungen der Fachdidaktik	67
8.6	Lehrplanforderungen	69
9.	Anforderungen im Zusammenhang mit dem Zehnerübergang im Teilschrittverfahren am Beispiel des Kutzerzuges	70
9.1	Der „Kutzerzug“	70
9.2	Core systems	72
9.3	Basale Fähigkeiten und Fertigkeiten	72
9.3.1	Teilleistungen im Zusammenhang mit arithmetischer Leistung	73
9.3.2	Gehirnstrukturen.....	76
9.3.3	Anforderungen in den Phasen der mathematischen Stufentheorie.....	76
9.4	Kulturell- mathematischer Bereich	84
9.4.1	Unterscheidung intuitive und kulturelle Mathematik.....	84
9.4.2	Verständnis der Addition.....	86
9.4.3	Zahlzerlegungen	88
9.4.4	Assoziativgesetz.....	90
9.4.5	Problematik „Ziffernsymbole“ und „Zahlwörter“	90

9.4.6	Problematik „Operationssymbole“	91
9.4.7	Problematik „Zahlensyntax“	91
9.4.8	Problematik „zahlsystembezogene Sprache“	92
9.5	Sprache	94
9.6	Zusammenfassung.....	96
10.	Abschließende Gedanken und Ausblick	97
	Verzeichnisse	103
	Abbildungsverzeichnis.....	103
	Tabellenverzeichnis	104
	Verwendete Literatur	105

1. Einleitende Gedanken

„Nach der Vorstellung der OECD werden mit PISA Basiskompetenzen erfasst, die in modernen Gesellschaften für eine befriedigende Lebensführung in persönlicher und wirtschaftlicher Hinsicht sowie für eine aktive Teilnahme am gesellschaftlichen Leben notwendig sind“ (BAUMERT et al. 2001, 16).

Eine dieser Basiskompetenzen, die in den PISA-Studien erhoben wurden, stellt nach dieser Sicht die mathematische Grundbildung dar. Egal ist dabei, wie man zu diesem kompetenzorientierten Bildungsverständnis steht. Festzuhalten bleibt, dass Rechnen können einen zentralen Bildungsgegenstand darstellt.

Der Mathematikunterricht vermittelt dabei nicht nur die fachlichen Grundlagen, sondern beeinflusst die gesamte Entwicklung des Kindes. Er soll zur Erschließung der Lebensumwelt unter mathematischen Aspekten beitragen. Wir sind im Alltag stets von Zahlen umgeben, die gelesen und interpretiert werden wollen. Buslinien, Preise, Hausnummern, Platzierungen, Adressen, usw. Eine Welt ohne Zahlen ist schlichtweg nicht vorstellbar. Wie relevant auch gesellschaftlich ein adäquater Umgang mit Zahlen tatsächlich sein kann, konnte in einer Studie nachgewiesen werden. Dabei wurde festgestellt, dass die Arbeitslosenquote bei 37-jährigen englischen Männern mit guten Rechenleistungen bei etwa 8% liegt. Demgegenüber steht eine Quote von 48% bei Männern mit schwacher Rechenleistung (vgl. LANDERL et al. 2008, 100).

Rechnen stellt aber eine hochkomplexe Leistung dar und viele können sich an Schwierigkeiten im Mathematikunterricht in der eigenen Schulzeit noch gut erinnern. Probleme in Mathematik scheinen trotz der dargestellten negativen Auswirkungen ein Stück weit gesellschaftsfähig zu sein. Darin scheint auch ein möglicher Grund für den bisher unbefriedigenden Forschungsstand im Bereich des denkenden Umgangs mit Zahlen zu liegen.

Rechnen muss also erlernt werden und ein Großteil dieser Aufgabe fällt der Schule zu. Auch wenn festzustehen scheint, dass das Kind nicht als mathematisch unbeschriebenes Blatt eingeschult wird, so werden doch vor allem in den Eingangsklassen die Grundsteine gelegt, von denen der Erfolg in der weiteren Schullaufbahn abhängt. Kenntnislücken und missverstandene Begriffe in den

ersten beiden Schuljahren haben demnach meist massive Schwierigkeiten in Mathematik zur Folge.

Der Erwerb dieser Grundsteine ist dabei mit vielfältigen Anforderungen an das Kind verbunden. Gerade für Schüler mit sonderpädagogischem Förderbedarf im Förderschwerpunkt Lernen können diese Anforderungen immense Hindernisse darstellen.

Ziel dieser Arbeit soll es nun sein, diese Anforderungen am Beispiel des Zehnerübergangs im Teilschrittverfahren im Bereich des Zahlenraums bis 20 darzustellen.

Dazu werden zunächst entwicklungspsychologische und neurowissenschaftliche Theorien aufgezeigt, wie das Kind zu einem Zahlbegriff kommt, der arithmetische Operationen erlaubt. Anschließend soll das Phänomen der Rechenschwäche etwas näher beleuchtet, mögliche Ursachen aufgezeigt und schließlich die Operation des Zehnerübergangs hinsichtlich seiner basalen und kulturell-mathematischen Anforderungen untersucht werden.

2. Historische Ansätze der Zahlbegriffsentwicklung

2.1 Das Phänomen „Zahl“

Was ist eine Zahl und wie ist sie zu denken? Wurde die Zahl erfunden oder existierte sie schon immer? Diese Fragen stellt unter anderem BRAINERD (1979) und stellt fest, dies sei „[...] one of humanity’s most ancient and redoubtable mental preoccupation“ (BRAINERD 1979, 1). Bis zum Ende des 19. Jahrhunderts ging man davon aus, dass Zahlen schon immer vorhanden waren und lediglich vom Menschen entdeckt und für den Alltag nutzbar gemacht worden sind. Aber bereits in der Antike lässt sich ein unterschiedlicher Umgang mit Zahlen feststellen. Die Ägypter und Babylonier benutzten Zahlen und Zahlsymbole im Alltag, wie beispielsweise zum Handeln und Schätzen. Die Griechen jedoch setzten sich mit der Zahl eher philosophisch auseinander und stellten sich die Frage, was denn die Zahl eigentlich sei. (vgl. MOSER OPITZ 2008, 15; ULLMANN 2005, 200). Erst im späten 19. Jahrhundert setzte sich die Sichtweise durch, dass Zahlen konstruiert seien und mit ihrer Funktion der Menschheit zu dienen. Nun gab es Bemühungen zu begründen, warum und wie Zahlen konstruiert seien (vgl. WEMBER 2003, 51). Es entwickelten sich daraus vor allem zwei verschiedene Zahltheorien, die BRAINERD zusammenfasst.

2.2 Kardinalzahltheorie

Bei der Kardinalzahltheorie ist der Aspekt der Größe und der Anzahl ausschlaggebend. Wichtige Vertreter dieser Theorie sind RUSSEL und FREGE.

„It is assumed that, in their simplest sense, numbers refer to classes, and the theory stresses that number ultimately is based on physical counterparts of the logical idea of manyness“ (BRAINERD 1979,92)

Hier wird zum einen davon ausgegangen, dass Zahlen eine Klasse von Dingen repräsentieren. „Jede Menge gehört zu einer übergeordneten Menge, diese

wiederum gehört zur nächsten übergeordneten Menge usw.“ (MOSER OPITZ 2002, 18). Zum anderen wird die Bedeutung der Eins-zu-Eins-Zuordnung deutlich. Denn wenn gleiche Anzahl gleicher Zahl entspricht, muss diese Anzahl feststellbar sein. Wichtig ist deshalb, dass eine Menge aus wahrnehmbaren einzelnen Einheiten besteht.

„Two classes have the same number when their terms can be correlated one to one, so that any one term of either corresponds to one and only one term of the other“ (RUSSEL, zit. nach BRAINERD 1979, 67).

2.3 Ordinalzahltheorie

Die Ordinalzahltheorie, die vor allem von DEDEKIND und PEANO entwickelt wurde, stellt die andere damalige Sichtweise zum Zahlbegriffserwerb dar. In deren Zentrum steht der Ordnungsaspekt. Demnach sind natürliche Zahlen

„definiert als eine bestimmte arithmetische Progression, die mit Eins beginnt und bei der jede folgende Zahl dadurch generiert wird, dass zur vorangegangenen eine weitere dazu gefügt wird“ (MOSER OPITZ 2008, 17).

Nach dieser Theorie lernen Kinder den Umgang mit nicht numerischen Progressionen bereits im Alltag im Vorschulalter. Sie verwenden die Begriffe „größer“ und „kleiner“ oder ordnen Gegenstände der Größe nach an. Sie erwerben die Ordinalzahl also beiläufig in der kindlichen Sozialisation.

2.4 Zusammenfassung

Die Autoren RADATZ und SCHIPPER betonen, dass es sich bei den vorgestellten Theorien nicht um einen methodischen Streit, sondern eigentlich um eine Auseinandersetzung zwischen „Zahlbildphilosophen“ und „Zählphilosophen“ handelt (vgl. RADATZ et al. 1983, 37). Demnach würde eine Ableitung der Mathematikdidaktik von einer der beiden Theorien eine der beiden damals

angenommenen Gruppen benachteiligen. Die Existenz von „Zählern“ und „Anschauern“ wird heute sehr angezweifelt.

Logische und philosophische Herangehensweisen, die Zahl zu begründen konnten die Frage, wie das Kind zum Zahlbegriff kommt, nicht beantworten. Erst durch die Entwicklung der experimentellen Psychologie und der Psychologie als Wissenschaft wurde diese Frage verstärkt angegangen (vgl. MOSER OPITZ 2008, 16). Vor allem befassen sich die Entwicklungspsychologie, die „sich im Allgemeinen mit Vorgängen und Veränderung des Menschen im Laufe seines Lebens“ (KRAJEWSKI 2003, 33) beschäftigt und die kognitive Psychologie, der es vorrangig um die „Identifikation spezifischer *Prozesse der Zahlenverarbeitung*“ (KRAJEWSKI 2003, 31, Hervorhebung im Original) geht, mit dem Phänomen der Zahlbegriffsentwicklung.

3. Zahlbegriffsentwicklung nach PIAGET

3.1 Entwicklungsverständnis

In der Tradition der französischen Verhaltenspsychologie, geht PIAGET davon aus, dass man Psychologie betreibt, indem man das Verhalten des Menschen beobachtet und analysiert (AEBLI, in PIAGET et al. 1975, 7).

„Handeln ist es also, was Erkenntnis, was Denken möglich macht. Das Subjekt erweitert durch seine Aktivität die kognitiven Strukturen und differenziert sie immer weiter aus“ (MOSER OPITZ 2008, 20).

Damit ist er einer der ersten Vertreter einer konstruktivistischen Sichtweise von Lernen und Entwicklung. Er nimmt an, dass Kinder schlicht logisch handeln und sich mit dem Instrument der Logik auch die Stufen des Denkens untersuchen lassen.

3.2 Zahlverständnis

PIAGET ging als erster der Frage nach, welche Teilfertigkeiten benötigt werden um den Begriff der natürlichen Zahl zu erwerben und wie diese Fertigkeiten aufeinander aufbauen. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle etwas genauer auf die Erkenntnisse PIAGETS eingegangen. Er verbindet Ordinalzahl- und Kardinalzahlentwicklung. Sie finden nach seiner Auffassung zwar getrennt, aber gleichzeitig statt. Für PIAGET entwickelt sich die Zahl aus den logischen Operationen der Klassen- und Reihenbildung. Mit dem Begriff der Operation sind Handlungen gemeint, die konkreten oder formalen Charakter haben. Konkrete Operationen können bereits im Gedanken ausgeführt werden, sind aber noch an konkrete Anschauung gebunden. Formale Operationen hingegen werden gekennzeichnet durch einen Umgang mit abstrakten Begriffen, die außerhalb der Anschauung liegen (vgl. MOSER OPITZ 2008, 27). Als Beispiel wäre hier die Unendlichkeit der Zahlen zu nennen. Da Piaget annimmt, dass das Kind kein angeborenes „Wissen“ im Hinblick auf den Zahlbegriff mitbringt, muss dieses sukzessive und aktiv aufgebaut werden. Dieser Vorgang beginnt bereits in der senso-motorischen Phase.

3.3 Stufen der kindlichen Entwicklung

Die kindliche Entwicklung verläuft nach PIAGET allgemein in vier Phasen. Diese sollen hier nur kurz erwähnt werden, eine ausführliche Darstellung entfällt aber aus Gründen der Schwerpunktsetzung der vorliegenden Arbeit. Die Altersangaben, entnommen aus GINSBURG und OPPER (vgl. GINSBURG et al. 1993, 43) sollen hier als ungefähre Anhaltspunkt und nicht als festgelegte Tatsachen verstanden werden.