

Frauke Link

Problemlöseprozesse selbstständigkeitsorientiert begleiten

Kontexte und Bedeutungen strategischer
Lehrerinterventionen in der Sekundarstufe I

WISSENSCHAFT



Frauke Link

Problemlöseprozesse selbstständigkeitsorientiert begleiten

VIEWEG+TEUBNER RESEARCH

**Dortmunder Beiträge zur Entwicklung
und Erforschung des Mathematikunterrichts
Band 2**

Herausgegeben von:

Prof. Dr. Hans-Wolfgang Henn

Prof. Dr. Stephan Hußmann

Prof. Dr. Marcus Nührenbörger

Prof. Dr. Susanne Prediger

Prof. Dr. Christoph Selter

Technische Universität Dortmund

Eines der zentralen Anliegen der Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts stellt die Verbindung von konstruktiven Entwicklungsarbeiten und rekonstruktiven empirischen Analysen der Besonderheiten, Voraussetzungen und Strukturen von Lehr- und Lernprozessen dar. Dieses Wechselspiel findet Ausdruck in der sorgsam konzipierten Konzeption von mathematischen Aufgabenformaten und Unterrichtsszenarien und der genauen Analyse dadurch initiiert Lernprozesse.

Die Reihe „Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts“ trägt dazu bei, ausgewählte Themen und Charakteristika des Lehrens und Lernens von Mathematik – von der Kita bis zur Hochschule – unter theoretisch vielfältigen Perspektiven besser zu verstehen.

Frauke Link

Problemlöseprozesse selbstständigkeitsorientiert begleiten

Kontexte und Bedeutungen strategischer
Lehrerinterventionen in der Sekundarstufe I

Mit einem Geleitwort von Hans-Wolfgang Henn

VIEWEG+TEUBNER RESEARCH

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Dissertation Technische Universität Dortmund, 2011

Erstgutachter: Prof. Dr. Hans-Wolfgang Henn
Zweitgutachter: Prof. Dr. Werner Blum
Tag der Disputation: 19.01.2011

1. Auflage 2011

Alle Rechte vorbehalten

© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2011

Lektorat: Ute Wrasmann | Britta Göhrisch-Radmacher

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.

Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-1616-0

Geleitwort

Seit TIMSS und PISA ist das Umgehen von Schülerinnen und Schülern mit Aufgaben ein national und international zentrales Thema der didaktischen Diskussion geworden. Die Studien offenbarten wesentliche Defizite von Lehrerinnen und Lehrern bezüglich diagnostischer und methodischer Handlungskompetenz im normalen Mathematikunterricht. In den letzten Jahren wurden und werden Bildungsstandards entwickelt, die Frau Link zur Beschäftigung mit ihrem Thema angeregt haben: Wie kann man den Kompetenzbegriff für den Unterricht konkretisieren und wie kann man im Unterricht förderliche Bedingungen zum Kompetenzerwerb schaffen? Die wesentliche Frage, die sich Frau Link stellte und zu deren Beantwortung die vorliegende Arbeit beiträgt, war, wie das für den Kompetenzerwerb unerlässliche selbstständigkeitsorientierte Arbeiten von Lernenden durch sach- und situationsadäquate Interventionen der Lehrenden unterstützt werden kann. Neben den Schülerinnen und Schülern studiert Frau Link also insbesondere das Verhalten der Lehrer und fokussiert diese Frage auf Lehrerinterventionen bei innermathematischen Problemlöseprozessen.

Mit ihrer Arbeit ist Frau Link einen weiteren Schritt auf dem Weg zu einer allgemeinen Theorie adaptiver Lehrerinterventionen gegangen. Als unterrichtsnahe Forschungsarbeit, die auf qualitativer Datenerhebung beruht, gehört die vorliegende Arbeit ohne Zweifel zur empirischen Unterrichtsforschung mit einem dezidiert qualitativen Fokus. Genauer ist sie der interpretativen Unterrichtsforschung, die auf Mikroebene empirische Zusammenhänge beschreibt, zuzuordnen. Über eine Klassifikation von Interventionen kann Frau Link durch ihre interpretative Analyse auf Aussagen über die Bedeutung und Auswirkung strategischer Interventionen in Interaktionsprozessen schließen. Neben der Erforschung des Mathematikunterrichts gibt die Arbeit auch Hinweise in Richtung Verbesserung des Mathematikunterrichts, wenn abschließend auf eine mögliche und wünschenswerte Verwendung ihrer Erkenntnisse in Lehrerbildung und Schule hingewiesen wird.

Hans-Wolfgang Henn, TU Dortmund

Vorwort

Zu Beginn meines Mathematikstudiums im Jahr 1999 durfte ich im universitär begleiteten Teilprojekt des PriMa-Projekts¹ in Hamburg, unter der Leitung von Prof. Dr. Marianne Nolte, mit mathematisch besonders begabten Grundschulkindern arbeiten. Das Projekt kann an dieser Stelle nicht ausführlich beschrieben werden. Ich denke aber, dass der Aufgabentypus, an dem die Kinder gearbeitet haben, kurz als reichhaltiges, mathematisches Problem beschrieben werden kann, in dem Sinne, in dem ich diesen Begriff auch in der vorliegenden Arbeit nutzen werde. Meine damalige Aufgabe als Moderatorin, Leiterin, Beobachterin, Protokollantin oder Unterstützerin dieser Gruppe von Kindern war, die Kinder eine Aufgabe eigenständig bearbeiten zu lassen, ihnen zuzuhören, ihre Ideen und Ansätze zu verstehen und die Kinder gegebenenfalls zum Weitermachen zu motivieren und sie in ihrer inhaltlichen Beschäftigung zu unterstützen.

Immer wieder entstanden Situationen, in denen ich helfen wollte, weil ein Kind nicht weiter wusste und ich mich fragte: Welcher Impuls ist jetzt der richtige? Was kann ich zu diesem Kind sagen, so dass es weiterarbeiten kann, aber ohne dass ich ihm einen Lösungsweg verrate? Da wir uns außerhalb der Schule befanden, ging es im Rahmen dieser Kurse ganz sicher nicht ums Belehren. Aber wenn ein Kind überhaupt keine Idee hatte, so wollte ich doch Anregungen geben, die möglicherweise zu neuen Lösungsansätzen verhelfen würden. In der Dissertationsphase hatte ich Gelegenheit, mich ausgiebig und umfangreich auf der theoretischen und der empirischen Ebene mit dem Impulsgeben im Problemlöseprozess zu beschäftigen.

Die Beschäftigung am Dortmunder *Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts*, an dem ich seit 2005 tätig bin, hat meine Perspektive auf die Mathematikdidaktik noch einmal entscheidend geprägt. In Bezug auf meine Person haben zwei Perspektivwechsel stattgefunden. Zunächst führte meine Arbeit am *IEEM* zu der Einsicht, dass die Beschäftigung mit den mathematisch besonders begabten Schülerinnen und Schülern im Kontext der mathematikdidaktischen Forschung relativiert werden sollte. Ungeachtet der Tatsache, dass ich die Begabtenförderung (unter gewissen Rahmenbedingungen) für sinnvoll halte, scheinen mir doch Untersuchungen relevanter, die den regulären Schulunterricht

¹<http://www.mint-hamburg.de/PriMa/prima.html>, Stand: Oktober 2010

betreffen. Zum Zweiten führte die Auseinandersetzung mit der Betonung auf der *Entwicklung* von Mathematikunterricht im Namen des Instituts zu der Frage, was dieses im Rahmen der (eigenen) Forschung bedeuten kann. Auch diese Perspektive spiegelt sich in meiner Arbeit wider.

Eine Dissertation ist das Werk einer einzelnen Person. Für die Unterstützung und Begleitung habe ich dennoch zahlreichen weiteren Personen zu danken. Besonderer Dank gebührt Prof. Dr. Hans-Wolfgang Henn und Prof. Dr. Werner Blum für die Betreuung und Begutachtung meiner Arbeit. Darüber hinaus bin ich allen Kolleginnen und Kollegen am IEEM in Dortmund für die gute Arbeitsatmosphäre und den konstruktiven Dialog dankbar. Im Arbeitsprozess, der zu der vorliegenden Arbeit führte, haben mich zwei angehende Lehrerinnen und ein angehender Lehrer unterstützt, die die Interviews durchgeführt haben. Im vorliegenden Text habe ich sie Bettina, Sara und Robert genannt. Ohne ihren Einsatz und ihre Offenheit in Hinblick auf die eigene Weiterentwicklung und Fortbildung wäre die vorliegende Arbeit nicht zustande gekommen. An der Interpretation der Daten waren Anna Uvermann und Maike Dobbelstein beteiligt, auch denen bin ich zu Dank verpflichtet. Dank gebührt auch meiner Familie und meinen Freundinnen und Freunden, die ich hier nicht alle namentlich nennen kann. Letztendlich und an ganz besonderer Stelle bleibt meinem Mann und meinen Kindern zu danken für die Organisation des Alltags während meiner geistigen Abwesenheit.

Frauke Link

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
I	Theoretische Grundlagen	9
2	Problemlösen	11
2.1	Mathematisches Problemlösen nach Polya	11
2.2	Abgrenzungen der Begriffe Wissen und Kompetenz	14
2.2.1	Wissen	14
2.2.2	Kompetenz	16
2.3	Problemlösen und Modellieren	20
2.4	Mathematik treiben und verstehen	25
2.5	Problemlösen in der Begabtenförderung	27
2.6	Problemlösen im Schulalltag	30
2.6.1	Argumente gegen und für Problemlösen im Unterricht	30
2.6.2	Problemlösen im Rahmen der Bildungsstandards	32
2.6.3	Kompetenzmessung in der Schule	34
2.6.4	Lehrerfortbildungen zum Problemlösen	35
2.7	Charakterisierung des Problemlösens über Aufgaben	38
2.8	Zusammenfassung	40
3	Problemlöseprozesse als Erkenntnisprozesse	43
3.1	Lerntheoretische Betrachtungen	43
3.2	Lernstrategien im Lernprozess	45
3.3	Metakognition im Lernprozess	47
3.4	Heuristiken in Problemlöseprozessen	49
3.5	Begriffsentwicklung in Problemlöseprozessen	52
3.6	Lernen und Interaktion	54
3.7	Epistemologische Analyse von Lernprozessen	57
3.8	Zusammenfassung	59

4	Interaktion und Lehrerintervention im Mathematikunterricht	61
4.1	Sokratischer Dialog als Ursprung des mathematischen Lehr-Lern-Gesprächs	61
4.2	Interaktionsform und Unterrichtsform	64
4.3	Lehrerinterventionen nach Unterrichtsformen	65
4.3.1	Selbstständiges Lernen	66
4.3.2	Unterricht in Kleingruppen	66
4.3.3	Rolle der Lehrperson im Klassengespräch	69
4.3.4	Rolle der Lehrperson in Unterrichtssequenzen	70
4.4	Lehrerinterventionen in selbstständigkeitsorientierten Lernprozessen	72
4.4.1	Historisches zum Instruktionsdesign	72
4.4.2	Scaffolding und Tutoring	73
4.4.3	Lehrerinterventionen im Mathematikunterricht	75
4.5	Besonderheiten von Lehrerinterventionen in Problemlöseprozessen	76
4.6	Beispiele für Lehrerinterventionen in Problemlöseprozessen	82
4.7	Interventionsarten	87
4.8	Strategische Lehrerinterventionen	91
4.9	Zusammenfassung	93
5	Lehrerinterventionen in Problemlöseprozessen	95
5.1	Problemlösen aus epistemologischer Perspektive	95
5.2	Interventionen aus konstruktivistischer und epistemologischer Sicht	98
5.3	Interventionen im Rahmen des Interaktionismus	101
5.4	Zusammenfassung der theoretischen Überlegungen	104
II	Untersuchungsdesign, Methoden der Datenauswertung und methodologische Überlegungen	109
6	Richtungsweisende Voruntersuchungen	111
6.1	Aufgabenauswahl	111
6.2	Interventionen ohne Anleitung	113
6.3	Analyse der Aufgaben	114
6.3.1	Aufgabe Steinplatten	115
6.3.2	Aufgabe Turm	116
6.3.3	Aufgabe Tangram	121
6.3.4	Aufgabe Rasen mähen	124
6.3.5	Aufgabe Eis aussuchen	129
6.3.6	Zusammenfassende Analyse	133

7	Untersuchungsdesign	135
7.1	Beobachtung im Einzelgespräch	135
7.2	Auswahl der Lehrpersonen	136
7.3	Fortbildung	136
7.4	Supervision	139
7.5	Auswahl der Schülerinnen und Schüler	139
7.6	Materialeinsatz	140
7.7	Zusammenfassender Überblick über den Studienaufbau	141
8	Methoden der Datenauswertung	143
8.1	Transkription	143
8.2	Interpretation der Transkripte	145
8.2.1	Identifikation der Lernmomente	145
8.2.2	Zuordnung der Lehrerinterventionen	147
8.3	Entwicklung einer Grounded Theory	147
9	Methodologische Überlegungen	151
III	Ergebnisse	157
10	Begriffsbildungen bei der Bearbeitung mathematischer Probleme	159
10.1	Empirisch erfasste Begriffsbildungen	159
10.1.1	Aufgabe Steinplatten	160
10.1.2	Aufgabe Turm	161
10.1.3	Aufgabe Tangram	161
10.1.4	Aufgabe Rasen mähen	164
10.1.5	Aufgabe Eis aussuchen	166
10.2	Zusammenfassung	168
11	Strukturen der Dialoge	171
11.1	Zeichen und Lernmomente	172
11.2	Interventionen und Lernmomente	174
11.3	Mehrstufige strategische Interventionen	175
11.4	Gespräch zeitlich strukturieren	177
11.5	Zum Reflektieren anregen	181
11.5.1	Vergangene Lösungswege reflektieren	182
11.5.2	Zukünftiges Vorgehen erfragen	185

11.6	Über potentielle Fehler und Irrwege sprechen	188
11.6.1	Probleme im Aufgabenverständnis beheben	188
11.6.2	Fehler im bisherigen Lösungsverlauf thematisieren	192
11.6.3	Weg als mögliche Sackgasse bewerten	195
11.7	Zum Validieren anregen	200
11.8	Zum Aufschreiben anregen	204
11.9	Kontexte und Bedeutungen strategischer Interventionen	208
12	Zusammenfassung und Ausblick	215
12.1	Zusammenfassung	215
12.2	Ausblick auf praktischen Nutzen	221
12.3	Ausblick auf weitere Forschungsfragen	222
	Anhang	227
	Literaturverzeichnis	227

Abbildungsverzeichnis

1.1	Einflüsse auf die Umsetzung des Problemlösens im Unterrichtsalltag nach Wälti-Scolari (2001)	5
2.1	Problemlöseplan von Mason et al. (2006)	13
2.2	Modellierungskreislauf nach Blum (2006)	20
2.3	Prozess des Mathematisierens nach Klieme et al. (2001)	23
2.4	Selbstregulatorisches Modell zum Problemlösen nach Bruder et al. (2002)	24
3.1	Handlungen, Phasen, Schlüsselbegriffe, Prozesse und Zustände des Problemlösens nach Mason et al. (2006)	50
3.2	Epistemologisches Dreieck nach Steinbring	58
4.1	Idealtypischer Interventionsprozess nach Leiss (2007)	87
5.1	Ein theoretisches Modell zur Beschreibung mathematischer Dialoge	107
6.1	Aufgabe Steinplatten	116
6.2	Aufgabe Turm	117
6.3	Notizen von Schüler B zur Turm-Aufgabe	118
6.4	Notizen von Schülerin E zur Turm-Aufgabe	119
6.5	Notizen von Schüler F zur Turm-Aufgabe	120
6.6	Aufgabe Tangram	122
6.7	Notizen von Schülerin A zur Tangram-Aufgabe	122
6.8	Notizen von Schüler B zur Tangram-Aufgabe	122
6.9	Notizen von Schülerin C zur Tangram-Aufgabe	123
6.10	Notizen von Schüler D zur Tangram-Aufgabe	123
6.11	Aufgabe Rasenmähen	125
6.12	Skizze von Schülerin A zur Rasen-Aufgabe	126
6.13	Rechnung von Schülerin A zur Rasen-Aufgabe	126
6.14	Notizen von Schülerin B zur Rasen-Aufgabe	127
6.15	Notizen von Schülerin E zur Rasenaufgabe	128
6.16	Notizen von Schüler F zur Rasen-Aufgabe	128

6.17	Aufgabe Eis aussuchen	129
7.1	Material: Spielsteine	140
7.2	Material: Tangram	140
7.3	Material: Faltpapier	141
7.4	Material: Holzwürfel	141
8.1	Entwicklung einer Grounded Theory	149
11.1	Notizen eines Schülers zur Turm-Aufgabe	185
11.2	Zeichnung einer Schülerin zur Steinplatten-Aufgabe	189
11.3	Steuerungsmöglichkeiten durch strategische Interventionen	209
11.4	Zeitliche und inhaltliche Gestaltungsmöglichkeiten eines Gesprächs	212

Tabellenverzeichnis

1.1	Schwerpunkte der Problemlöseforschung und ihrer Methoden . . .	2
2.1	Fähigkeiten guter Problemlöserinnen und Problemlöser	29
2.2	Anforderungsbereiche im Problemlösen nach den Bildungsstandards der KMK	33
3.1	Drei unterschiedliche Formen des Lernens nach Miller (1986) . .	55
4.1	Zuordnung ausgewählter Unterrichtsformen zu vier Interaktionsformen	65
4.2	Einordnung von Unterrichtsgesprächen nach Mortimer und Scott (2003)	71
4.3	Beispiele für Hilfestellungen nach Zech (1998)	84
6.1	Übersicht der erhobenen Einzelgespräche im Rahmen der Vorstudie	113
7.1	Gründe spezifischer Gesprächsführung in klinischen Interviews und in Problemlösesituationen	138
7.2	Übersicht über alle analysierten Gespräche	142
10.1	Vergleich der Begriffsbildungsmöglichkeiten zur Steinplatten-Aufgabe	160
10.2	Vergleich der Begriffsbildungsmöglichkeiten zur Turm-Aufgabe .	162
10.3	Vergleich der Begriffsbildungsmöglichkeiten zur Tangram-Aufgabe	163
10.4	Vergleich der Begriffsbildungsmöglichkeiten zur Rasen-Aufgabe .	164
10.5	Vergleich der Begriffsbildungsmöglichkeiten zur Eis-Aufgabe . .	167
11.1	Differenzierung der strategischen Interventionen in drei Ebenen .	176
11.2	Gespräch zeitlich strukturieren	180
11.3	Zum Reflektieren anregen – Vergangene Lösungswege reflektieren lassen	184
11.4	Zum Reflektieren anregen – Zukünftiges Vorgehen erfragen	187

11.5	Zum Reflektieren anregen – Probleme im Aufgabenverständnis beheben	190
11.6	Über potentielle Fehler und Irrwege sprechen – Fehler im bisherigen Lösungsverlauf thematisieren	194
11.7	Über potentielle Fehler und Irrwege sprechen – Weg als mögliche Sackgasse bewerten	197
11.8	Zum Validieren anregen	202
11.9	Zum Aufschreiben anregen	206

1 Einleitung

Problemlösen ist schon seit langem ein mathematikdidaktisches Forschungsthema. In den 1980er Jahren erreichte die Forschungsintensität zum Problemlösen ihren vorläufigen Höhepunkt (vgl. Schoenfeld 1992; Burkhardt 1988; Lester 1982; Lester 1994; Pehkonen 1991). Seit Mitte der 90er Jahre ist die Forschung in diesem Bereich etwas in den Hintergrund gerückt. Neben politischen Gründen nennt Lester (1994) die neu aufkommende Popularität des Konstruktivismus, den Forschende vielfach zunächst mit Problemlösen gleichsetzen und die sich durchsetzende Erkenntnis, dass Problemlösen komplexer und vernetzter ist, als man vielfach angenommen hatte, als mögliche Erklärungen für den Rückgang von veröffentlichten Artikeln zum Problemlösen in der Mathematikdidaktik. Tabelle 1.1 enthält eine Übersicht der genutzten Forschungsmethoden zu wissenschaftlichen Untersuchungen zum Problemlösen in den Jahren 1970-1994.

Der Begriff des Problemlösens ist kulturell geprägt und hat seine Bedeutung mitunter auch innerhalb einer Kultur geändert (Törner et al. 2007). In Bezug auf das Problemlösen habe ich für diese Arbeit Literatur von Autorinnen und Autoren aus Deutschland, den USA, Australien und dem UK und in einer Auswahl schweizerischer, schwedischer und niederländischer Autorinnen und Autoren herangezogen. Der japanische Ansatz des *open-ended-approach* (Hino 2007; Becker und Shimada 1997) kann aufgrund seiner, insbesondere im Schulalltag sichtbaren, kulturellen Verschiedenheit in dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden.

Eine grundsätzliche Schwierigkeit im Umgang mit Literatur zum Problemlösen ist die Verwendung des Begriffes selbst. Während sich im deutschsprachigen Raum „Problemlösen“ als eigenständiger Begriff durchgesetzt hat, ist in der englischsprachigen Literatur „problem-solving“ kein eindeutig auf Problemlösen spezifizierter Begriff. Vielmehr kann „problem-solving“ auch schlicht Aufgabenlösen bedeuten. Die Bedeutung ist nur aus einer konkreteren Beschreibung der Interpretation des Begriffs durch die jeweiligen Autorinnen und Autoren ersichtlich.

Im Vereinigten Königreich (UK, 1976) und in Australien (um 1990) war Problemlösen in den Curricula schon zentral verankert worden. Missverständnisse in der Umsetzung, mangelnde Lehrerbildung im Problemlösen, Schwierigkeiten, Problemlösen in Prüfungsaufgaben umzusetzen und insbesondere die Einführung normierter, zentraler Tests für alle Schülerinnen und Schüler (UK 1987) führten allerdings im UK dazu, dass das Problemlösen aus dem Unterrichtsalltag weitge-

Tabelle 1.1 Überblick über Schwerpunkte der Problemlöseforschung und ihrer Methoden (Lester 1994, S. 664)

An Overview of Problem-Solving Research Emphases and Methodologies: 1970-1994

Dates*	Problem-solving research emphases	Research methodologies used
1970-1982	Isolation of key determinants of problem difficulty; identification of characteristics of successful problem solvers; heuristics training	Statistical regression analysis; early ‚teaching experiments‘
1978-1985	Comparison of successful and unsuccessful problem solvers (experts vs. novices); strategy training	Case studies; ‚think aloud‘ protocol analysis
1982-1990	Metacognition; relation of affects/beliefs to problem solving; metacognition training	Case studies; ‚think aloud‘ protocol analysis
1990-1994	Social influences; problem solving in context (situated problem solving)	Ethnographic Methods

*Of course, the dates shown are only approximate. However, the chronology is reasonably accurate.

hend wieder verschwand (Burkhardt und Bell 2007). Auch in Australien wurde und wird die Problematik der Bewertung des Problemlösens im Schulalltag und in Prüfungen diskutiert (Stacey 1995; Stacey 2005; Clarke et al. 2007). In den USA gab es nach der ersten Empfehlung der NCTM¹ zum Problemlösen (1980) zunächst Probleme bei der Umsetzung in den Schulalltag (Schoenfeld 2007a). Die NCTM führten ihre Ideen jedoch in der Veröffentlichung der kompetenzorientierten „Standards“² 1989 fort. Seit Mitte der 90er Jahre wird deren Umsetzung in die Curricula der Länder allerdings durch politische Debatten, genannt „Math wars“ gestoppt. Vorläufig hat dies zur Folge, dass in vielen Staaten wieder Curricula bevorzugt werden, die das Training von mathematischen Basisfertigkeiten betonen (Schoenfeld 2007a; Lesh und Zawojewski 2007).

In Deutschland wurde das Problemlösen 2003 aus den Präambeln der Lehrpläne hin zu den zentral zu vermittelnden mathematischen Inhalten gerückt. Die allge-

¹National Council of Teachers of Mathematics

²Originaltitel: Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics

meine Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“³ ist seither als Unterrichtsziel gleichwertig zu den inhaltlichen Kompetenzen in den Bildungsstandards verankert, die die Kultusministerkonferenz (KMK) veröffentlicht hat (vgl. KMK 2003; KMK 2004). Die verpflichtende Umsetzung des Problemlösens im Schulalltag erfolgt daher mit zeitlichem Abstand zu den ersten schulrelevanten Forschungsergebnissen und laut Reiss und Törner (2007) weniger euphorisch als in den oben genannten Beispielen, was Anlass zur Hoffnung gibt, dass das Problemlösen tatsächlich sinnvoller und regulärer Bestandteil des Schulalltags wird. Die Relevanz der Forschung in diesem Bereich bleibt also aktuell, insbesondere in Hinblick auf schulpraktische Dimensionen.

Auch in der Psychologie und in der Pädagogik sowie in den benachbarten Fachdidaktiken spielt das Thema Problemlösen eine Rolle, wobei jedoch die Vorstellung davon, was unter Problemlösen zu fassen sei, unterschiedlich ist. Die Auffassung über den Sinn des Problemlösens und die Art der Ausprägung der Probleme ist z. B. in der Medizin anders als in der Mathematik. Ich beschränke mich hier auf das mathematische Problemlösen.

Innerhalb des mathematischen Problemlösens ist noch nicht geklärt, ob und inwieweit sich Problemlöseprozesse in den verschiedenen mathematischen Fachrichtungen wie beispielsweise Geometrie, Stochastik oder Analysis unterscheiden lassen. Auch die Frage, inwieweit die Kompetenz Problemlösen und das Fachwissen der Problemlöserin oder des Problemlösers miteinander vernetzt sind, ist offen.

In der Unterrichtspraxis gibt es Lehrpersonen, die berichten, dass Kinder, die Problemlöseaufgaben erfolgreich bearbeiten, nicht immer diejenigen sind, die im Mathematikunterricht allgemein gute Leistungen zeigen. Gründe für diese Diskrepanz können bislang nur vermutet werden. Insgesamt ist relativ wenig darüber bekannt, wie Problemlöseprozesse ablaufen.

Als Problemlöseprozess bezeichnen Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker die kognitive Verarbeitung während der Problemlösung, aber ebenfalls das, was sichtbar wird. Das Sichtbare ist einfach beschreibbar, gibt jedoch wenig Auskunft über singuläre kognitive Prozesse. Der Zugriff auf das Denken ist im Rahmen der Methoden der Mathematikdidaktik⁴ beschränkt, auch wenn sich Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker psychologischer Methoden wie z. B. *lautes Den-*

³Außerdem werden als allgemeine mathematische Kompetenzen „mathematisch Modellieren“, „mathematische Darstellungen verwenden“, „Kommunizieren“, „mathematisch Argumentieren“ und „mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ genannt (vgl. KMK 2003; KMK 2004).

⁴In Experimenten im Rahmen der psychologischen Disziplin werden vergleichsweise ausgeklügelte Versuchsanordnungen installiert, um Zugriff auf Denkprozesse zu erhalten.

ken⁵, *recall*⁶, *stimulated recall*⁷ oder *klinisches Interview*⁸ bedienen, um wenigstens einen kleinen Einblick in Gedankenstrukturen im Arbeitsprozess zu erhalten (vgl. Wagner et al. 1977; Lester 1982).

Auch Modellieren gehört zu den allgemeinen Kompetenzen, die in den Bildungsstandards als relevant festgehalten wurden (vgl. KMK 2003; KMK 2004). Da sich die Tätigkeiten Modellieren und Problemlösen in einigen Punkten unterscheiden, in etlichen Facetten aber ähneln, werde ich die Möglichkeiten der Abgrenzungen in Kapitel 2.3 vertiefen und mathematikdidaktische Forschungsarbeiten zum Modellieren dort heranziehen, wo es sinnvoll erscheint.

Dem geringen Wissen darüber, was genau beim Problemlösen passiert, steht gegenüber, dass sich Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker weitgehend einig darüber zu sein scheinen, wie ein Problemlöseprozess ablaufen soll: Frei von Zwängen, kreativ, motiviert und beharrlich. Die Rolle der Lehrperson in diesem Prozess bleibt allerdings eine zentrale Frage, die von den Forschenden immer wieder gestellt wird (Lester 1994; Pehkonen 1991; Mason 1991).

Im Schulalltag geht es der Lehrperson darum, Probleme zu stellen und geeignet zu unterrichten. Dabei üben eine ganze Reihe von Faktoren Einflüsse auf die Umsetzung des Problemlösens durch die Lehrperson und die Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler aus. Auch die Frage danach, was „gute“ Probleme sind, stellt sich in der Schulpraxis. Wälti-Scolari (2001, S. 17) beschreibt die Abhängigkeit zwischen den von ihm wahrgenommenen Einflussgrößen mit einem Diagramm (Abb. 1.1). Hier stehen die Rahmenbedingungen im Zentrum. Die Lehrpersonen bestimmen die Aufgaben. Die oder der Problemlösende profitiert von ihrer bzw. seiner persönlichen Einstellung zum Problemlösen. Kompetent sind schließlich die Lernenden. Sie werden kompetent durch die Arbeit an sorgfältig ausgewählten mathematischen Problemen.

Abbildung 1.1 zeigt die komplexen und umfangreichen Abhängigkeiten, die im Unterrichtsalltag bestehen, wenn Lehrpersonen Problemlösen in ihren Unterricht integrieren wollen. Einige dieser Probleme werden im weiteren Verlauf aufgegrif-

⁵Beim lauten Denken wird die Probandin bzw. der Proband zu Beginn des Gespräches aufgefordert, die Untersucherin bzw. den Untersucher durch das Aussprechen dessen, was ihr oder ihm durch den Kopf geht, teilhaben zu lassen.

⁶Beim *recall* wird der Probandin bzw. dem Probanden die eben von ihr bzw. von ihm aufgenommene Szene noch einmal vorgespielt. Die Person äußert sich dabei zu ihren Erinnerungen über das, was sie im Moment der Szene dachte.

⁷Beim *stimulated recall* versucht die Beobachterin bzw. der Beobachter die beobachtete Person dazu zu bewegen, an bestimmten Stellen genauere Auskünfte über ihre Gedanken zu geben.

⁸Das *klinische Interview* ist eine Methode, die auf Piaget zurückgeht. Es wird versucht, die beobachtete Person durch einen zurückhaltenden, fragenden Beobachtenden möglichst wenig zu beeinflussen und trotzdem gezielt nach Gedanken und Vorgehensweisen des Beobachteten zu fragen (vgl. Kapitel 7.3).

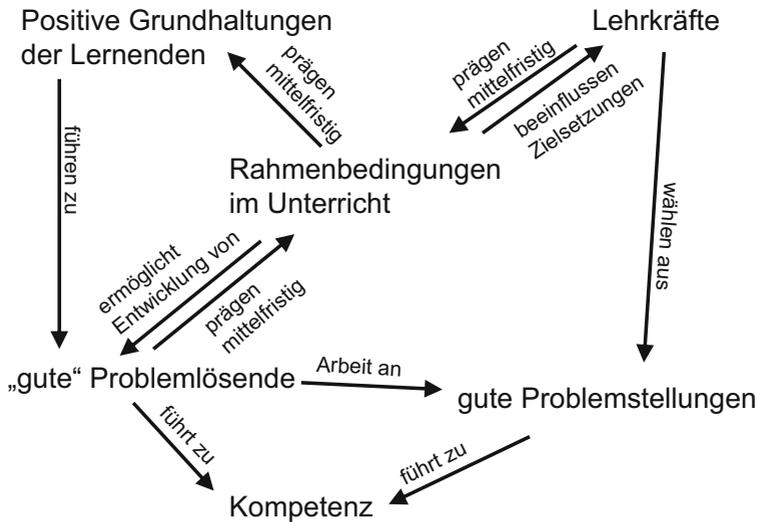


Abbildung 1.1 Einflüsse auf die Umsetzung des Problemlösens im Unterrichtsalltag nach Wälti-Scolari (2001)

fen (vgl. Kap. 2.6.1), um die Problematik der Rahmenbedingungen des Problemlösens im Schulalltag zu beschreiben. Kern meiner Arbeit ist jedoch die Auseinandersetzung mit dem direkten Einfluss der Lehrperson mit der oder dem Problemlösenden.

Wenn eine Lehrperson also mathematische Probleme im Unterricht bearbeiten lässt, bleibt die Frage nach einer geeigneten Interaktion zwischen ihr und den Schülerinnen und Schülern offen. Probleme lösen ist eine Kompetenz, die man nicht im klassischen Sinne „lehren“ kann, soweit man davon unter konstruktivistischer Perspektive noch sprechen darf.

Anschaulich gesprochen sind „Impulse“ der Lehrperson wünschenswert, die die Schülerinnen und Schüler beispielsweise dazu anregen, weiterzuarbeiten oder neue Ideen zu entwickeln. Grundsätzlich sollen Schülerinnen und Schüler über den Problemlöseprozess (ohne Hilfe) zum Ziel gelangen. Wenn die Lehrperson allerdings helfen muss, dann soll diese Hilfe minimal sein, sich am besten am Vorwissen der Schülerin bzw. des Schülers orientieren und auf keinen Fall das Ergebnis vorweg nehmen oder über einen Lösungsweg belehren. Das Wort Impuls macht zudem deutlich, dass es sich nur um eine kurze Intervention handeln soll, nach der die Schülerin bzw. der Schüler selbstständig weiterarbeitet.

Zech (1977) schlägt mit seiner „Taxonomie der Interventionen“ ein konkretes Verfahren vor, welches seiner Meinung nach geeignete Interventionen bei Problemlöseprozessen beschreibt (vgl. Kap. 4.6). Die Taxonomie sieht vor, die folgenden Interventionen in der genannten Reihenfolge vorzunehmen, da sie in der Stärke ihres Einflusses auf den Inhalt des Gesprächs wachsen: (1) Motivation, (2) Antworten auf Fragen, (3) allgemein-strategische Hilfen, (4) inhaltsorientierte strategische Hilfen, (5) inhaltliche Antworten (vgl. Tabelle 4.3 auf Seite 84). In diesem Kategoriensystem sind Impulse auf nicht-inhaltlicher Ebene nur über Motivation oder strategische Hilfen möglich. Während ich klare Assoziationen habe, wie Motivation sprachlich angeregt werden könnte, war mir zu Beginn der Arbeit weniger deutlich, was strategische Hilfen sprachlich konkret sein könnten. Strategische Interventionen erscheinen mir somit als Untersuchungsgegenstand reizvoll. In Untersuchungen wurde allerdings wiederholt deutlich, dass selbst besonders kompetent erscheinende Lehrpersonen sehr selten *strategisch* intervenieren (Leiss 2007; Webb et al. 2006). Dieses Phänomen wird in Kapitel 4.5 genauer beschrieben.

Es stellt sich die Frage, ob Lehrpersonen überhaupt in der Lage sind, strategisch zu intervenieren. Ob ein solcher Impuls möglich und wirkungsvoll ist, kann ich erst feststellen, wenn jemand tatsächlich so vorgeht. Falls dies der Fall sein sollte, steht die Frage im Raum, ob strategische Interventionen die zentrale Rolle, die Zech (1977) ihnen in seiner Taxonomie zuweist, im Gespräch tatsächlich einnehmen und wenn ja, warum.

Im Rahmen der Vorarbeiten zu diesem Forschungsprojekt ergab sich die Schwierigkeit, dass strategische Interventionen seitens der Lehrpersonen in einer Vorstudie tatsächlich nur in sehr kleiner Anzahl gefunden wurden (vgl. Kap. 6.2). Die Frage, welche Rolle strategische Interventionen in einem Problemlöseprozess spielen, kann allerdings nur beantwortet werden, wenn diese tatsächlich wesentlicher Bestandteil des Gespräches sind. Die an der Studie beteiligten Lehrpersonen wurden daher in das Forschungsthema eingeweiht und in Bezug auf ihre allgemeine Gesprächskompetenz fortgebildet. Die Beschreibung und Diskussion dieses Ansatzes findet sich in den Kapiteln 6 und 5.4.

Diese Arbeit soll neue Erkenntnisse darüber sichern, ob und inwiefern strategische Interventionen geeignete „Impulse“ im Problemlöseprozess für Schülerinnen und Schüler darstellen. Die mich antreibenden Forschungsfragen lauten:

1. Welche Rolle spielen strategische Interventionen in Problemlöseprozessen?
 - Auf welche Weise setzen Lehrpersonen strategische Interventionen in Problemlöseprozessen ein?

- Welche Bedeutung haben strategische Interventionen im Problemlöse-Gespräch?
2. Wie sehen Gesprächsstrukturen (unter Berücksichtigung strategischer Interventionen) aus, die konstruktiv in Hinblick auf den Problemlöseprozess erscheinen?

Theoretische Grundlage zur Beantwortung dieser Fragen ist in dieser Arbeit eine Auffassung von Gesprächen im Sinne des symbolischen Interaktionismus nach Blumer (vgl. Kap. 5.3). Unter diesem Blickwinkel lassen sich Gespräche besonders umfassend deuten – sowohl in Hinblick auf Strukturen von Interventionen, als auch in Hinblick auf dabei ablaufende Lernprozesse und Bedeutungskonstruktionen (vgl. Bauersfeld 1994). Die in dieser Arbeit beobachteten Lernstrukturen zu mathematischen Problemaufgaben und die gefundenen Strukturen strategischer Interventionen sowie die Klärung der Rolle, die diese einnehmen, finden sich in den Kapiteln 10 und 11.

Die vollständigen Transkripte sind auf Anfrage bei der Autorin⁹ erhältlich.

⁹Die Autorin ist erreichbar über die Email-Adresse: ieem@mathematik.tu-dortmund.de

Teil I

Theoretische Grundlagen

2 Problemlösen

Das Wort „Problem“ wird im Duden als eine „schwierige, zu lösende Aufgabe“ bzw. eine „unentschiedene Frage“ beschrieben (Scholze-Stubenrecht 1997, Duden, S. 658; Stichwort: Problem). Da sich diese Arbeit auf die Mathematikdidaktik bezieht, wäre ein mathematisches Problem damit zunächst einmal eine unentschiedene mathematische Frage bzw. eine schwierige Mathematikaufgabe. Üblicherweise wird aber mathematisches Problemlösen in der Mathematik und in der Mathematikdidaktik noch genauer charakterisiert. Schoenfeld betont zudem, dass die Anzahl der vorliegenden Publikationen zum Thema Problemlösen sehr groß ist und die Vorstellungen vom Problemlösen international traditionell variieren (vgl. Schoenfeld 1992, S. 334). Es ist also mehr denn je wichtig, genau zu benennen, auf welchen Aspekt die oder der Forschende seine Fragen bezieht und welche Grundvorstellung er oder sie vom Problemlösen hat (vgl. Schoenfeld 1992, S. 364). In den folgenden Kapiteln wird der Begriff „Problemlösen“ aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet. Neben Forschungsergebnissen spielen dabei auch die schulpraktischen und bildungspolitischen Rahmenbedingungen eine Rolle. Abschließend wird eine aufgabenorientierte Charakterisierung mathematischen Problemlösens vorgenommen.

2.1 Mathematisches Problemlösen nach Polya

Der Begriff des mathematischen Problemlösens wurde für Mathematikerinnen und Mathematiker gleichermaßen wie für Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktiker im deutsch- und englischsprachigen Raum ursprünglich maßgeblich durch Polya geprägt.

Polya charakterisiert das Lösen von Aufgaben¹ als Suche nach einem „Ausweg aus einer Schwierigkeit“, nach einem „Weg um ein Hindernis herum“ bzw. als „Weg um ein Ziel zu erreichen, das nicht unmittelbar erreichbar war“ (Polya 1966, S. 9).

¹Aufgabe wird in den zitierten Ausgaben seines Werkes als Ausdruck für das benutzt, was in dieser Arbeit als „mathematisches Problem“ oder „Problemlöseaufgabe“ bezeichnet wird. Das, was in dieser Arbeit als „Aufgabe“ bezeichnet wird, würde Polya demgegenüber „Hilfsaufgabe“ oder „Routineaufgabe“ nennen.