Spektrum
AKADEMISCHER VERLAG
Sachbuch

Georg Glaeser

Wie aus der Zahl ein Zebra wird

Ein mathematisches Fotoshooting

Wie aus der Zahl ein Zebra wird

Georg Glaeser

Wie aus der Zahl ein Zebra wird

Ein mathematisches Fotoshooting

Spektrum
AKADEMISCHER VERLAG

Autor
Prof. Dr. Georg Glaeser
Institut für Kunst und Technologie / Geometrie
Universität für angewandte Kunst Wien
georg.glaeser@uni-ak.ac.at

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

Spektrum Akademischer Verlag ist ein Imprint von Springer

11 12 13 14 15 5 4 3 2 1

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Bianca Alton
Herstellung und Satz: Autorensatz
Umschlaggestaltung: wsp design Werbeagentur GmbH, Heidelberg
Titelfotografie: Zebra © Georg Glaeser

ISBN 978-3-8274-2502-7

Vorwort

Vorwort

Wie jedes Buch hat auch dieses seine eigene „Geschichte". Nach vielen Jahren Lehr- und Forschungstätigkeit und einigen Büchern über Mathematik, Geometrie, Computergrafik und neuerdings auch Fotografie sollte es als Resultat der langjährigen Erfahrungen in relativ kurzer Zeit entstehen. Es schien doch sehr viel Material vorhanden zu sein, das „nur noch" in den Kontext eingebunden werden musste. Wie immer war es viel mehr Arbeit als gedacht, und ich muss mich bei meiner Frau Romana und meiner Tochter Sophie für das große Verständnis und die Unterstützung bedanken, die dafür notwendig waren.

Meine Mitarbeiter Franz Gruber und Peter Calvache halfen mir weit über das jemals einforderbare Maß. Ohne Grubers anspruchsvolle Computersimulationen (erstellt mit der Software Open Geometry, die „hausintern" entwickelt worden war) und Calvaches bemerkenswertem Gespür für ein ansprechendes Layout hätte das Buch einfach nicht so werden können, wie es nun vorliegt. Eine weitere große Stütze war Rudolf Waltl. Er hat viele Ideen (vor allem physikalischer Art) eingebracht, einige (zumeist technische) Fotos beigesteuert und auch ausgezeichnete Recherche betrieben.

In der Endphase mussten wegen der Bandbreite der Anwendungen externe Spezialisten konsultiert werden, so etwa der Physiker Georg Fuchs und die Biologen Axel Schmid und Roland Albert, bei denen ich mich für viele Anregungen und Hinweise bedanken möchte. Dazu kam immer wieder das nützliche und wichtige Feedback des Verlags (Andreas Rüdinger und Bianca Alton).

In den letzten Monaten vor der Fertigstellung entwickelte sich eine erstaunliche Eigendynamik, bei der gesammeltes Material und neue Erkenntnisse in einem steten Mischvorgang an die geeignete Position gebracht wurden – eine positive Spirale sozusagen. Nachdem im Buch u. a. von Schraubung bzw. Spiralung die Rede sein wird, soll gleich ein Objekt dargestellt werden, das im Wesentlichen aus zwei Schraubkörpern besteht (der äußere ist linksgewunden, der innere rechtsgewunden). Solche Objekte eignen sich gut zum Durchmischen oder

Durchkneten, und das musste oft genug passieren ...

Fast symbolisch für die letzte Phase könnte auch das Schlüpfen eines Insekts aus seiner Larve bzw. Puppe sein. Die Bilder zeigen oben die verlassene Chitinhülle einer Zikade, auf der schon alle Details zu erkennen sind, unten das fertige „Imago". Das eigentliche Insektenleben spielt sich – oft über viele Jahre – unsichtbar unter der Oberfläche ab. Das Imago ist also nur eines von mehreren Stadien und hauptsächlich für die Reproduktion der Spezies verantwortlich.

Der Titel des Buchs hat auch eine erwähnenswerte Entwicklung: Irgendwie sollten ja Begriffe wie Mathematik, Fotografie und Biologie in Einklang gebracht werden. Als knapp die Hälfte des Buchs beisammen war, hielt ich vor Studierenden der Universität für angewandte Kunst Wien (Abteilung Werbegrafik) eine Präsentation, wobei ich die Anwesenden bat, mir nachträglich Titelvorschläge zu machen. Das Echo war enorm und es kamen viele Vorschläge, die durchaus brauchbar waren. In einem internen Auswahlverfahren kam dann jener Titel heraus, der heute auf dem Umschlag steht.

Es ist natürlich nicht gleichgültig, ob man formuliert: „Wie aus der Zahl ein Zebra wird" oder aber „Wie aus dem Zebra eine Zahl wird". Die erste Variante ist die größere Herausforderung. Die Natur war klarerweise vor der Mathematik da. Andererseits spielen sich in der Natur ununterbrochen Prozesse ab, die wir heute als „mathematisch" bezeichnen. Dementsprechend lautete ein anderer Titelvorschlag „Überall Mathematik". Das Doppelseiten-Prinzip, das in diesem Buch konsequent eingehalten wird, hat den Vorteil, dass man sich in leicht verdaubaren Häppchen das eine oder andere Thema zu Gemüte führen kann. Querverweise, insbesondere aber Literaturangaben und ausgewählte Internet-Links sollen ggf. zur Vertiefung dienen.

Aber ab sofort soll es heißen: Viel Spaß beim Lesen!

Wien, im Juli 2010
Georg Glaeser

Mathematik und Naturfotografie

Ich bin Mathematiker (mit Spezialgebiet Computergeometrie) und leidenschaftlicher Naturfotograf. Gibt es da einen echten Zusammenhang, oder muss man ihn an den Haaren herbeiziehen? Nun, wenn Sie dieses Buch durchgeblättert haben, werden Sie die Antwort, die ich hier gebe, nachvollziehen können: Es wimmelt in der Natur nur so vor Beispielen, die irgendwie mit Mathematik zu tun haben. Die Fotografie spielt eine wesentliche Rolle, dies zu erkennen.

In der Mathematik werden oft Formen der Natur modelliert, die eindeutig zuzuordnen sind. Das Kristallgitter eines Diamanten ist z. B. perfekt tetraedrisch. Allerdings ist das schwer fotografisch nachzuweisen. Einigermaßen geometrische Kristalle gibt's auch zuhauf, aber die sind, wenn zu sehen, nicht mehr so perfekt (Foto: Calcit-Kristalle, unter denen sich viele vierseitige Doppelpyramiden befinden).

In einem Vortrag habe ich einmal vereinfachend gesagt: Die Natur ist niemals perfekt, denn sonst gäbe es uns Menschen nicht. Das war eine Anspielung auf die Evolution und nicht etwa als Scherz gemeint (das Publikum sah es damals so).

Die Natur ist vielmehr pragmatisch und akzeptiert Lösungen, die sich durch Selektion oder zufällige Konstellation ergeben, wenn diese Lösung besser ist als eine vorher vorhandene. Sie ist gleichzeitig ununterbrochen bereit, neue Formen zu akzeptieren, die unter geänderten Umständen ein neues Optimum darstellen. Das gilt für die Entwicklung von Lebewesen genauso wie für die Ausbildung von Formen oder Mustern.

Das Computerzeitalter hat den Mathematikern ungeahnte Möglichkeiten eröffnet. Heute kann man Dinge visualisieren, die früher als unerreichbar galten. Insbe-

sondere kann man auch gezielt Vorgänge, die in der Natur stattfinden, simulieren. Hier erlaubt die computergestützte Mathematik das Experimentieren mit Parametern, und dies ist eine legitime, ja oft schlicht notwendige Methode geworden, schneller zu Ergebnissen zu gelangen.

Lösung eines Problems kann im konkreten Fall bedeuten: Begreifen, wie manche Vorgänge in der Natur vor sich gehen, welche Mechanismen ineinandergreifen und zusammenspielen. Bemerkenswert ist, dass einzelne Vorgänge lokal betrachtet eigentlich ganz einfach zu erklären sind, während sich die Komplexität und Vielfalt der Gesamterscheinung oft einer sofortigen Erklärung verschließt.

Dies mag bereits ein Teil des Erfolgsrezepts der Mathematik beim Versuch, die Natur zu verstehen, sein. In der Infinitesimalrechnung betrachtet man ja auch beliebig kleine Umgebungen, in denen diese oder jene Eigenschaft gilt. Durch „Integrieren" wird dann versucht, aufs Ganze zu schließen. Bei der Modellierung von dynamischen Prozessen kann jede auch noch so kleine Änderung im Kleinen das Gesamtergebnis maßgeblich beeinflussen. Niemand wird z. B. abstreiten, dass Wetterprognosen heute schon um ein Vielfaches besser geworden sind als noch vor wenigen Jahrzehnten. Dennoch sind zugegebenermaßen so viele Parameter im Spiel, dass es eben immer noch Ungenauigkeiten gibt.

Der Blitz oben hat wohl noch viel mehr Spielraum als Wolkenfelder, sich zu verästeln. Aber selbst hier arbeitet die Wissenschaft intensiv daran, das Phänomen zu verstehen. Ein erster Schritt dazu muss das präzise Erfassen des Phänomens sein, etwa mit Hochgeschwindigkeitskameras. Womit wir spätestens jetzt bei der Fotografie gelandet sind.

DIAMANT-STRUKTUR **Diamantstruktur** http://de.wikipedia.org/wiki/Diamantstruktur
ORF **Blitzforschung** http://salzburg.orf.at/magazin/leben/stories/53864/

Dieses Bild eines 6 mm kleinen Prachtkäfers Anthaxia nitidula passt gleich zu mehreren Themen: „Schillerfarben“ (s. S. 150), „Einfach Wegblenden“ (s. S. 242), „Phänomen Komplexauge“ (s. S. 42), „Zehnerpotenzen im Tierreich“ (s. S. 224) – man betrachte die zufällig mit aufgenommene 0,1 mm große weiße Milbe im roten Kreis, die, weil 50 Mal so klein, weniger als 1/100 000 des Käfers wiegt.

Dieses Buch bietet eine fotografisch-mathematische Reise in das Reich der Natur mit ihren Phänomenen und den faszinierenden Resultaten der Evolution. Selbst ohne höhere Mathematik, aber mit geschärftem mathematischem Hausverstand und einem fantasievollen Herangehen an die Dinge kann man viele Dinge, die zunächst „einfach nur da sind", besser verstehen und u. U. Schlüsse daraus ziehen. Den Einleitungstext zu den Kapiteln finden Sie hier im Inhaltsverzeichnis. Das Bild links stellt Zellstrukturen in einem Blatt dar, die man mathematisch gut modellieren kann.

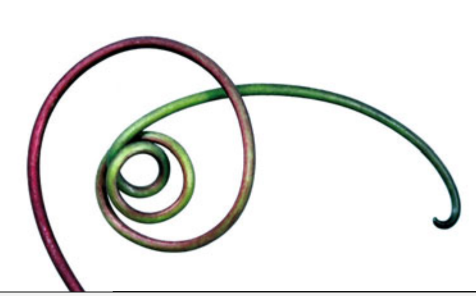
Mathematik ist mehr als nur „Rechnen". Sie ist ein vom Menschen künstlich geschaffenes Konstrukt mit strengen Regeln, in der es nur „Schwarz oder Weiß" bzw. „wahr oder falsch" gibt. Die Natur scheint da ganz anders zu sein, und dennoch hat die Mathematik wie keine andere Wissenschaft die Fähigkeit, natürliche Prozesse zu modellieren und dabei zu tieferen Einsichten in diese Prozesse zu gelangen. Das Titelbild zeigt eine stehende Welle beim Abfluss eines Teichs. Sogar die Interferenzen der Wellen änderten sich dabei kaum, das Bild war „wiederholbar" und könnte bei bekannten Parametern vom Computer „nachvollzogen" werden.

Die womöglich Jahrtausende alte Felszeichnung wurde von den San (Ureinwohner des südlichen Afrikas) angefertigt und illustriert eine Jagd mit Pfeil und Bogen. Die beim Pfeilflug auftretenden Wurfparabeln wurden (und werden) von den San mit unglaublicher Präzision einkalkuliert, ohne jemals eine Berechnung durchgeführt zu haben. In diesem Kapitel sollen exemplarisch Themen angeschnitten werden, bei denen sich ein Mathematiker vielleicht mehr denkt als ein Nicht-Mathematiker. So geht es z. B. um vermeintliche, aber auch erklärbare Ähnlichkeiten.

In der Nahaufnahme eines hübschen Schmetterlings sind dunkle Punkte in den Komplexaugen zu sehen (Pseudopupillen), die von den Kristallprismen, die in jeder Facette eingebaut sind, erzeugt werden. Das Tier sieht auf kurze Distanzen ausgezeichnet dreidimensional. Warum das so ist, wie Stereo-Sehen und Vergleichbares funktioniert, aber auch sonst einige Regeln über perspektivisches und dreidimensionales Erfassen sind Thema dieses Kapitels. Man erkennt auch, dass wir recht leicht optisch verwirrt werden können, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind.

Der Blick ins Weltall war immer schon ein menschlicher Traum. Wir müssen uns hier auf unsere Sonne, unseren Mond und das eine oder andere markante Sternbild begrenzen. Viele Phänomene, die mit den Gestirnen zusammenhängen, erwecken das Interesse des Mathematikers. Ein recht einfacher geometrischer Satz über den rechten Winkel gibt uns z. B. Auskunft über durchaus nicht-triviale Fragen zum exakten Frühlingsbeginn bzw. der vermeintlich falschen Mondneigung. Letztere ist auch in dem abgebildeten mittelalterlichen Fresco der St. Laurentzkirche in Požega (Kroatien) „verewigt".

Noch bevor wir verschiedene Typen von Kurven und Flächen betrachten, wollen wir die Schraubung und Spiralung unter die Lupe nehmen. Erstere spielt in vielen technischen Anwendungen eine zentrale Rolle (als Symbol dafür ist ein Schraubengewinde samt Schraubenmutter abgebildet). Die Spiralung ist in der Kunst, vor allem aber in der Natur omnipräsent und besonders schön bei Schneckenhäusern, Muscheln (Foto links) und Tierhörnern manifestiert. Hier spielen exponentielles oder lineares Wachstum und Rotation zusammen.



Kurven wie z. B. die Kettenlinie können in einer Ebene liegen oder auch „echte Raumkurven" sein, wie der abgebildete Trieb einer Kletterpflanze, welche – ganz untypisch für unsere Vorstellung von Pflanzen – durch Drehen und Wippen versucht, ihre räumliche Umgebung zu erfassen und irgendwo Halt zu finden. Die Kegelschnitte sind zu Recht die berühmtesten Kurven: Sie finden sich in der Natur zuhauf (die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, die Wurfbahnen von Objekten sind Parabeln, Schatten und perspektivische Bilder von Kreisen sind oft Hyperbeln).

Noch viel größer als die Vielfalt der Kurven ist jene der gekrümmten Flächen. Die Kugel übt wegen ihrer unendlichfachen Symmetrie große Faszination auf uns aus. Ihre Oberfläche ist doppelt gekrümmt und damit nicht ohne Dehnungen und Stauchungen in die Ebene auszubreiten. Jene Flächenteile, welche bei der abgebildeten Lampe in Summe eine Kugel annähern, entstehen durch Verbiegen von ebenen rautenförmigen Streifen und sind damit nur einfach gekrümmt. Oberflächen, die sich in einem Spannungsgleichgewicht befinden, sind (doppelt gekrümmte) Minimalflächen.

Spiegelung und Brechung gehören eng zusammen: Wenn z. B. die Sonne an der Wasseroberfläche reflektiert, gelangt – je nach Einfallswinkel – ein Teil des Lichts in das Wasser. Die Umkehrung ist nicht mehr so selbstverständlich: Flach von unten auf die Wasseroberfläche treffendes Licht wird zur Gänze reflektiert. Der winzige Gecko auf der Glasscheibe erscheint doppelt reflektiert: einmal an der Oberseite der Scheibe, das andere Mal auf der Rückseite. Die dazwischen stattgefundene doppelte Brechung an der Vorderseite „hebt sich auf".

9 Verteilungsprobleme 161

Sehr oft tritt das Problem auf, möglichst viele Elemente auf möglichst kleinem Raum sinnvoll so zu verteilen. Die jungen Nilkrokodile am Bild sollen symbolisch dieses Problem veranschaulichen. Da ist etwa die vermeintlich einfache Frage, wie man eine vorgegebene Anzahl von Punkten auf einer Kugel verteilt. In der Natur will z. B. ein Seeigel seine Stacheln optimal auf seiner Kalkhülle verteilen. Hier gibt es mathematisch-physikalische Algorithmen, die das Problem durch Simulation von Abstoßung der einzelnen Teilchen hervorragend bewältigen.

10 Einfache physikalische Phänomene 183

Mathematik und Physik haben in vielen Teilen Überlappungen. Die Fragen, auf welchem Anlauf ein Schispringer zum besten Sprung ansetzt oder wie weit sich ein Motorrad in die Kurve legen muss, gehören zweifellos in so eine Nische. Schon deutlich physikalischer ist die Frage, warum Tiere wie die abgebildeten Enten oder aber Flugzeuge fliegen können oder welche Wellenformationen bei bewegten Erregerquellen entstehen.

11 Zellenanordnungen 207

Wenn ein Mathematiker die Anordnung der Schuppen auf einem Reptil wie dem abgebildeten jungen Nilkrokodil betrachtet, assoziiert er damit sofort sogenannte Voronoi-Diagramme. Inwieweit hier ein Zusammenhang besteht und ob womöglich auch das Stützgerüst in Libellenflügeln oder Blättern von Grünpflanzen oder gar die Risse in trocknendem Schlamm solche Strukturen enthalten, sind Themen dieses Kapitels, ebenso warum man auf Gänseblümchen, Sonnenblumen oder Pinienzapfen Spiralen zu erkennen glaubt.

Dieses Kapitel widmet sich der spannenden Frage, warum Dinge, die man im Großen beobachtet, in der Welt der Kleinstlebewesen ganz anders sind (die beiden Fotos eines Elefanten und einer Ameise sind stellvertretend dafür zu sehen) . So scheint bei den Insekten die Schwerkraft kaum eine Rolle zu spielen, die Tiere scheinen verhältnismäßig viel mehr Kraft zu besitzen und können fast alle fliegen. Dafür gibt es eine ganz einleuchtende mathematische Erklärung: Bei ähnlichen Objekten ist das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen von der absoluten Größe abhängig.

Verästelungen wie bei Bäumen (im Bild eine Schirmakazie) und Flüssen treten auch bei kleinen Gebilden wie Korallen oder Wurzeln kleiner Pflanzen auf. Oft ist die Auflösung eines klaren Umrisses so weit fortgeschritten, dass wir von einem Fraktal sprechen. Wolkenfelder, Farne, Schichtenlinien von Landschaften (insbesondere auch Umrisse von Inseln) sind typische Beispiele. Weil sich die Computergrafik naturgemäß viel mit Baumstrukturen und rekursiven Algorithmen beschäftigt, gibt es hier eine besonders schöne Überschneidung mit Strukturen aus der Natur.

Wie können und sollen sich die winzigen Raupen auf einem Blatt bewegen, damit sie in möglichst großer Anzahl möglichst rationell ein Blatt in ihren Mägen verschwinden lassen können? Kann ein Affe seinen Sprung von einem Baum auf den anderen nach dem Absprung noch beeinflussen? Solchen Überlegungen stehen viele schöne Anwendungen aus der sogenannten Kinematik (Geometrie der Bewegung) gegenüber, von denen einige in diesem Kapitel erörtert werden.

1 Das Wechselspiel mit der Mathematik

Zebrastreifen und Zahlencodes

Mathematik ist eine sehr strenge Wissenschaft und wohl die einzige, in der nur „wahr oder falsch", „0 oder 1" gilt (umgangssprachlich „schwarz oder weiß"). Wenn die Aussage „alle Panther sind schwarz" nicht gilt, dann heißt das natürlich nicht „alle Panther sind weiß", sondern: „Nicht alle Panther sind schwarz". Im übrigen sind Panther beim genauen Hinsehen ohnehin gefleckt, lediglich der üblicherweise gelbe Hintergrund ist fast schwarz. Die Biologen sagen, dass das Zebra wohl aus mehreren Gründen gestreift ist: Tarnung, Irritation der Tse-Tse-Fliege, bessere Wärmeregulierung, aber auch Wiedererkennung von Artgenossen.

Ein Naturwissenschaftler wird dazu wiederholbare Versuchsreihen machen, die statistisch belegen, dass große Raubtiere oder Tse-Tse-Fliegen vom Streifenmuster verwirrt werden oder dass die Oberflächentemperatur eines nicht gestreiften Tiers bei intensiver Sonnenbestrahlung höher ist als die eines Zebras. Solche „Beweise" haben oft einen erwünschten Nebeneffekt in der Bionik, und man kann neue Technologien entwickeln. Die Naturwissenschaften verwenden mathematische Methoden mit großem Erfolg. Meist ist es „angewandte Mathematik" oder speziell Statistik (manche Aussagen lassen sich nur statistisch „beweisen"). Die Altersbestimmung einer Mumie mit der Radio-Carbon-Methode mag als typisches Beispiel genannt werden: Für den Mathematiker ein klassisches Beispiel für exponentielle Abnahme eines „y-Werts", bei dem auch das „Gesetz der großen Zahlen" schlagend wird: Niemand kann voraussagen, wann ein bestimmtes ^{14}C-Atom zerfällt, aber bei Abermilliarden von Kandidaten stellt man fest, dass in Summe die Abgabe proportional zu der Anzahl der vorhandenen Atome ist.

Reine Mathematiker stehen statistischen Beweisen skeptisch gegenüber. Dass ein Stein, wenn man ihn fallen lässt, in Richtung Erdmittelpunkt fällt, ist noch nie widerlegt worden, aber es fehlt der exakte Beweis, den der Mathematiker verlangt. Hingegen kann ein Zahlentheoretiker rasch erklären, warum es für eine Zikade mit einem mehrjährigen Entwicklungszyklus besser ist, wenn die Anzahl der Jahre eine Primzahl (z. B. wie tatsächlich bei manchen Arten 17 Jahre) ist. Potentielle Fressfeinde mit kürzeren Zyklen können sich dann nicht auf das in diesen Zikaden-Jahren vorhandene Überan-

gebot an Nahrung einstellen, weil oft viele Räuber-Generationen vergehen, bis es wieder zu einem Aufeinandertreffen von Räuber und Zikade kommt.

Zebras haben stets individuell verschiedene Muster. Die Aneinanderreihung von schwarzen Balken auf weißem Hintergrund ist von der Mathematik genau durchforstet worden. Schließlich sind alle Waren in den Supermärkten mit einem solchen individuellen Muster gekennzeichnet, das einer 13-stelligen Zahl entspricht – dem EAN-Strichcode. Jeder Ziffer entspricht ein genormtes Muster, und damit lassen sich nahezu unbegrenzt viele Muster erzeugen. Der Code wird von einem Laser-Scanner eingelesen. Unser erst einen Tag altes Zebra-Baby erkennt die Mutter nicht nur am Geruch, sondern auch – statistisch nachweisbar – an ihrem Muster. So nahe liegen Mathematik und Natur beisammen, obwohl es vielleicht gar nicht die Absicht der Mathematiker war, sich ausschließlich an der Natur zu orientieren!

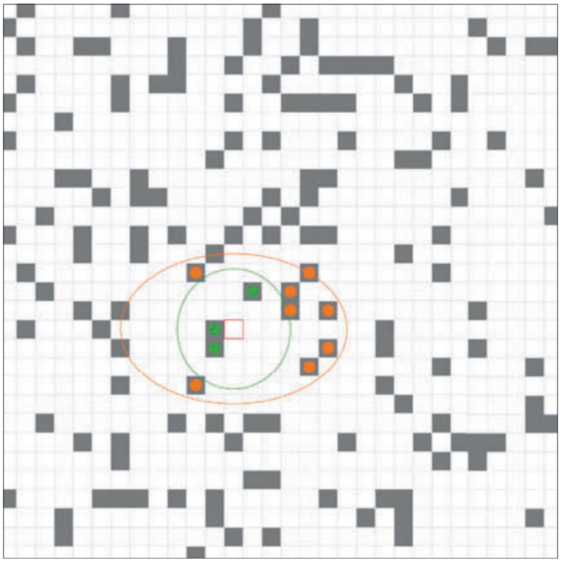
Kein Wunder, wenn man als Mathematiker die Fotokamera zur Hand nimmt und Dinge fotografiert, von denen man insgeheim hofft, dass sie sich mathematisch gut erklären lassen – auch wenn man im Moment nicht immer die Lösung weiß.

In diesem Buch ist dies hundertfach geschehen. Damit soll das Wechselspiel zwischen Mathematik und den Naturwissenschaften, zwischen Zahl und Zebra, „belichtet" werden.

WIKIPEDIA **European Article Number** http://de.wikipedia.org/wiki/European_Article_Number
C. ROHDE, C. SURULESCU **Mathematische Modellierung und Analyse von biologischen Prozessen**
http://preprints.ians.uni-stuttgart.de/downloads/2008/2008-003.pdf

Wie aus der Zahl ein Zebra wird

Lassen wir uns einmal auf folgendes mathematisches Modell ein: Wir wählen ein Raster von meinetwegen 500 x 500 Punkten und malen willkürlich eine Anzahl von Pixeln schwarz („Pixel" steht für Picture-Element, also ein kleines Quadrat im Raster). Jetzt wandern wir unser Raster systematisch, also Pixel für Pixel, ab (im Bild rechts ist jeweils ein solches Testpixel rot markiert). Um das Testpixel denken wir uns zwei (ellipsen- oder kreisförmige) Ringe, wobei der äußere (orange) in etwa doppelt so groß sein soll wie der innere (grüne). Nun beginnt ein simpler Zählvorgang: Wir zählen jene schwarzen Pixel, die sich in jener Fläche befinden, die von innerem und äußerem Ring begrenzt wird (orange markiert, Anzahl n) und jene schwarzen, die in der kleineren Fläche liegen (grün markiert, Anzahl m). Ist nun z. B. $n > 3 \cdot m$ (oder $n - 3 \cdot m > 0$), wird das Testpixel temporär schwarz. Nachdem man alle Pixel durchtestet, hat sich das Muster verändert. Wiederholt man den Vorgang, entsteht ein neues Bild, aber siehe da: Das



Muster nähert sich rasch einem endgültigen Aussehen, das schon nach 5 bis 10 Iterationen erkennbar wird. Die Gewichtung (Multiplikation) mit dem Faktor 3 kommt daher, dass es maximal etwa dreimal so viele orange Pixel („Inhibitoren") wie grüne Pixel („Aktivatoren") geben kann. Überwiegen die gewichteten Aktivatoren, wird das Testpixel schwarz. Die vier computergenerierten „Zebra-Muster", die auf der rechten Seite zu sehen sind, entstanden auf die beschriebene Art. Über die Form der Muster entscheiden überraschenderweise nicht Anzahl oder Position der Ausgangspunkte, sondern vielmehr die Gestalt der beiden Ringe (um Zebra-Muster zu erhalten, wählt man zwei Ellipsen so wie in der Skizze oben links: die Hauptachsen sind um 90° verdreht).

Im großen Foto rechts sieht man eine Zebramutter mit Baby. Vergleicht man die Muster am Kopf, erkennt man aufgrund der nahen Verwandtschaft starke Ähnlichkeiten. Vergleichbare Muster findet man nicht nur bei Tierfellen oder Tierhäuten (Tiger, Tigerhai), sondern auch bei Sandrippen im Flachwasser, was das Foto links illustrieren soll.

M. Frame **How the zebra gets its stripes** http://classes.yale.edu/fractals/Panorama/Biology/Leopard/Leopard.html

Die Henne und das Ei

Die Frage, ob die Henne oder das Ei zuerst da war, lässt sich als Metapher auf viele Dinge im Alltag umlegen. Mathematisch liegt ein Henne-Ei-Problem vor, wenn sich Beziehungen nicht „topologisch sortieren" lassen. In der Evolution gab es wohl nie eine „erste Henne" oder ein „erstes Ei".

Abgesehen von diesen philosophischen Fragestellungen verdienen Hühner und Eier durchaus andere mathematisch / physikalisch / biologische Fragestellungen:

Wieso sind z. B. Hühnereier zwar Drehkörper, aber keine Kugeln oder zumindest symmetrische Ellipsoide? Antwort: je symmetrischer, desto eher rollen die Eier „auf Nimmerwiedersehen" davon. Besser, sie „eiern herum". Bei manchen felsenbrütenden Vogelarten (z. B. die isländischen Trottel- und Dickschnabellummen) sind Eier aus diesem Grund nicht einmal mehr Drehkörper.

Warum kann man sich am höchsten Berggipfel kein Frühstücksei mehr kochen? Antwort: Weil der Luftdruck so klein ist, dass das Wasser schon bei viel niedrigeren Temperaturen kocht, was dann u. U. nicht mehr ausreicht, um das Ei hart werden zu lassen.

Warum brauchen größere Eier mehr Wärme zum Ausbrüten bzw. wieso dauert es länger, größere Eier hartzukochen? Antwort: Weil größere Eier eine im Verhältnis zum Inhalt kleinere Oberfläche haben, über welche die Wärme einwirken kann.

Die Frage, wer zuerst das Ei gekonnt öffnen konnte (der Mensch oder das Küken) ist eindeutig zu beantworten (im Bild rechts unten ist jenes Ei zu sehen, das eines der beiden Küken auf der rechten Seite geöffnet hat). Auf jeden Menschen kommen weltweit etwa zwei Hühner, wobei das Haustier Huhn mit dem Haustier Rind (ca. 1,3 Milliarden) bei der Biomasse nicht mithalten kann.

Wikipedia **Henne-Ei-Problem** http://de.wikipedia.org/wiki/Henne-Ei-Problem
W. Wunderlich **Zur Geometrie der Vogeleier**
Sitzungsber., Abt. II, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl. 187 (1978), 1-19
M. Gleich, D. Maxeiner, M. Miersch **Life Counts. Eine globale Bilanz des Lebens.** Berlin Verlag, 2000

Das Schildkröten-Paradoxon

Die abgebildete Schildkröte läuft bei einer Körpergröße von18 cm notfalls etwa eine Körperlänge pro Sekunde. Der griechische Held Achilles war vielleicht zehnmal so groß und konnte sicher in voller Rüstung zehnmal so schnell marschieren. Nur, wenn es nach Zenon von Elea, einem griechischen Philosophen, der vor ca. 2500 Jahren lebte, ginge, könnte er das Reptil nie einholen, auch wenn dieses nur 10 Meter Vorsprung hätte:

Wenn nämlich der Unbesiegbare an der Stelle angelangt ist, wo sich die Schildkröte beim Start befunden hat, ist diese schon 1 Meter weiter gehastet. Nachdem Achilles eben diesen Meter durchschritten hat, ist das Panzertier 10 cm voran. Wenn der Grieche auch diese 10 cm weiter ist, trennt ihn trotzdem noch 1 Zentimeter vom Gleichstand, usw. usw. Klar, dass da etwas nicht stimmen kann, aber was genau ist es?

Auch wenn die Erzählung in alle Ewigkeit fortsetzbar ist, beschreibt sie doch unendlich langatmig nur jenen wohldefinierten Zeitraum, der nötig ist, um gleichauf zu sein. Zenon's Paradoxon (scheinbarer Widerspruch) ist berühmt geworden. Hier sieht selbst der Laie bald, dass etwas nicht stimmen kann.

WIKIPEDIA **Achilles und die Schildkröte** http://de.wikipedia.org/wiki/Achilles_und_die_Schildkröte
WIKIPEDIA **Ziegenproblem** http://de.wikipedia.org/wiki/Ziegenproblem

Ein viel „hinterhältigeres" Paradoxon ist folgendes: Jemand versteckt eine Erbse unter einem von drei Hütchen A, B und C und lässt Sie gegen eine Siegesprämie raten, unter welchem Hütchen das Kügelchen steckt. Sie zeigen z. B. auf A. Nun lüftet der andere eines der beiden anderen Hütchen (z. B. B) und zeigt Ihnen, dass dort keine Erbse ist. Jetzt gibt er Ihnen die Möglichkeit, Ihre Wahl zu ändern, also in diesem Fall auf C zu tippen.

Ein Großteil der Befragten wird sagen: „Das Ändern hat keinen Sinn, ist es doch gleichwahrscheinlich, ob ich jetzt noch ändere oder nicht". Falsch! Sie sollten auf jeden Fall ändern, wenn Sie die Wettsumme mit größerer Wahrscheinlichkeit haben wollen (Ihre Chancen sind dann von 33% auf 67% gestiegen, also von „eher nicht erraten" auf „eher schon erraten").

Wenn Sie's nicht glauben, spielen Sie das Spiel in beiden Varianten je 100 Mal und vergleichen Sie, wo Sie öfter gewinnen. Das Paradoxon ist unter dem Namen „Ziegenproblem" bekannt und die Diskussion darüber belebt nicht wenige Internet-Foren ...

Herauslesen aus Fotos

Fotos dominieren unsere Welt. Abertausende Bücher sind voll mit Fotos, die Anzahl der Fotografien, die über das Internet verbreitet werden, ist nicht mehr überschaubar. Mit Fotos kann viel Schindluder getrieben werden und man kann alles Mögliche damit „beweisen".

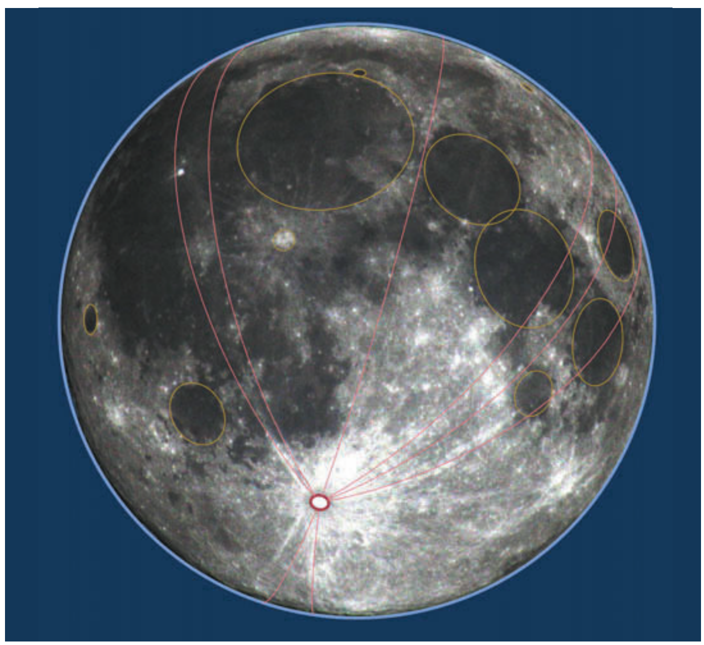
Es ist vom Standpunkt der Geometrie aus möglich, viele der Tricks zu entlarven, und zwar umso leichter, je weniger mathematisch-geometrisches Wissen der Fälscher besitzt. Wenn man sich darauf verlassen kann, dass ein Foto „im Originalzustand" ist, etwa weil man es selbst gemacht hat, und man auch die Eckdaten bei der Fotografie (z. B. die verwendete Brennweite) kennt, kann man ein Foto durchaus zum Gewinnen einer neuer Erkenntnis heranziehen.

Ein simples Beispiel: Angenommen, wir wären noch nicht in der Lage, zum Mond zu fliegen. Aufgrund von Teleobjektiv-Aufnahmen ließen sich natürlich trotzdem viele Schlüsse ziehen. Wie könnte man z. B. beweisen, dass der Mond kugelförmig ist? Nun, zunächst ist der Umriss bei der Teleaufnahme ein Kreis, so wie der Umriss jeder Kugel bei Normalprojektion bzw. auch bei Zentralprojektion, wenn man den Mittelpunkt der Kugel anvisiert. Weiters könnte man die Eigenschattengrenze des Monds bei Beleuchtung durch die Sonne verfolgen und würde feststellen, dass es sich um dieselben Ellipsen handelt, welche auf einer Kugel auftreten.

Man könnte aufgrund der vorhandenen, aber nicht extrem ausgebildeten Schlagschatten feststellen, dass die Oberfläche wohl gebirgig, aber relativ zum Radius nicht allzu sehr zerfurcht ist. Allerdings müsste man feststellen, dass wir die Rückseite des Monds niemals sehen können und daher nicht wüssten, ob diese vergleichbar aussieht.

Theoretisch könnte der Mond auf der uns zugewandten Seite immer noch ein eiförmiges Drehellipsoid sein (das gäbe keinen Unterschied bei der Eigenschattengrenze) und auf der Rückseite völlig anders aussehen. Auf dem Mond gibt es aber Krater, die offensichtlich von Meteor-Einschlägen stammen. Solche Krater sind annähernd

Der Mond ist kugelförmig – ein fotografischer Beweis



kreisförmig. In der mit einer Fotografie des Vollmonds hinterlegten Computergrafik rechts sind solche Kreise abgebildet. Und – siehe da – die Kreisbilder passen gut ins Foto. Kreise in dieser Bandbreite gibt es aber nur auf einer Kugel, nicht aber auf einem Ellipsoid. Mit der Computersimulation hat man dann auch gleich die Radien der Krater im Griff. Auffällig ist, dass man beim Vergleich mit dem Computerbild erkennt, dass es vom rot markierten Krater im südlichen Bereich ausgehend einige hunderte Kilometer lange helle Streifen gibt, welche recht genau die Form von Großkreisen auf der Kugel haben. Auch von anderen Kratern gehen solche „Spuren" aus. Sie weisen auf die enorme Einwirkung solcher Einschläge im Oberflächenbereich hin.

Der Mond ist nicht immer gleich weit von der Erde entfernt. Minimalabstand und Maximalabstand sind jeweils mehr als 5% größer oder kleiner als der durchschnittliche Abstand von 384 000 km. Hat eine Kugel den 1,1-fachen Durchmesser einer anderen Kugel, erscheint ihr Volumen gleich wesentlich größer, nämlich $1{,}1^3$ Mal, also etwa 1/3 größer (vgl. dazu die beiden Bilder auf der linken Seite). In diesem Fall handelt es sich also um keine Täuschung, wenn man sagt: „Der Mond erscheint heute besonders groß". Einer echten Täuschung erliegt man allerdings, wenn man glaubt, der gerade auf- oder untergehende Mond habe eine größeren Durchmesser. Das Doppelbild unten zeigt links eine unverfälschte Fotografie eines Sonnenuntergangs über dem Wiener Kahlenberg. Der mitabgebildete Fernsehsender, von dem man weiß, dass er sehr hoch ist, lässt die Sonne in der Tele-Aufnahme riesig erscheinen.

Das rechte Bild ist eine Fotomontage, bei der statt der Sonne der Vollmond platziert wurde. Theoretisch wäre so ein Bild möglich, denn Sonne und Mond haben nahezu den gleichen Durchmesser am Firmament: Diesmal würde der Mond im Größenvergleich mit dem Turm riesig erscheinen.

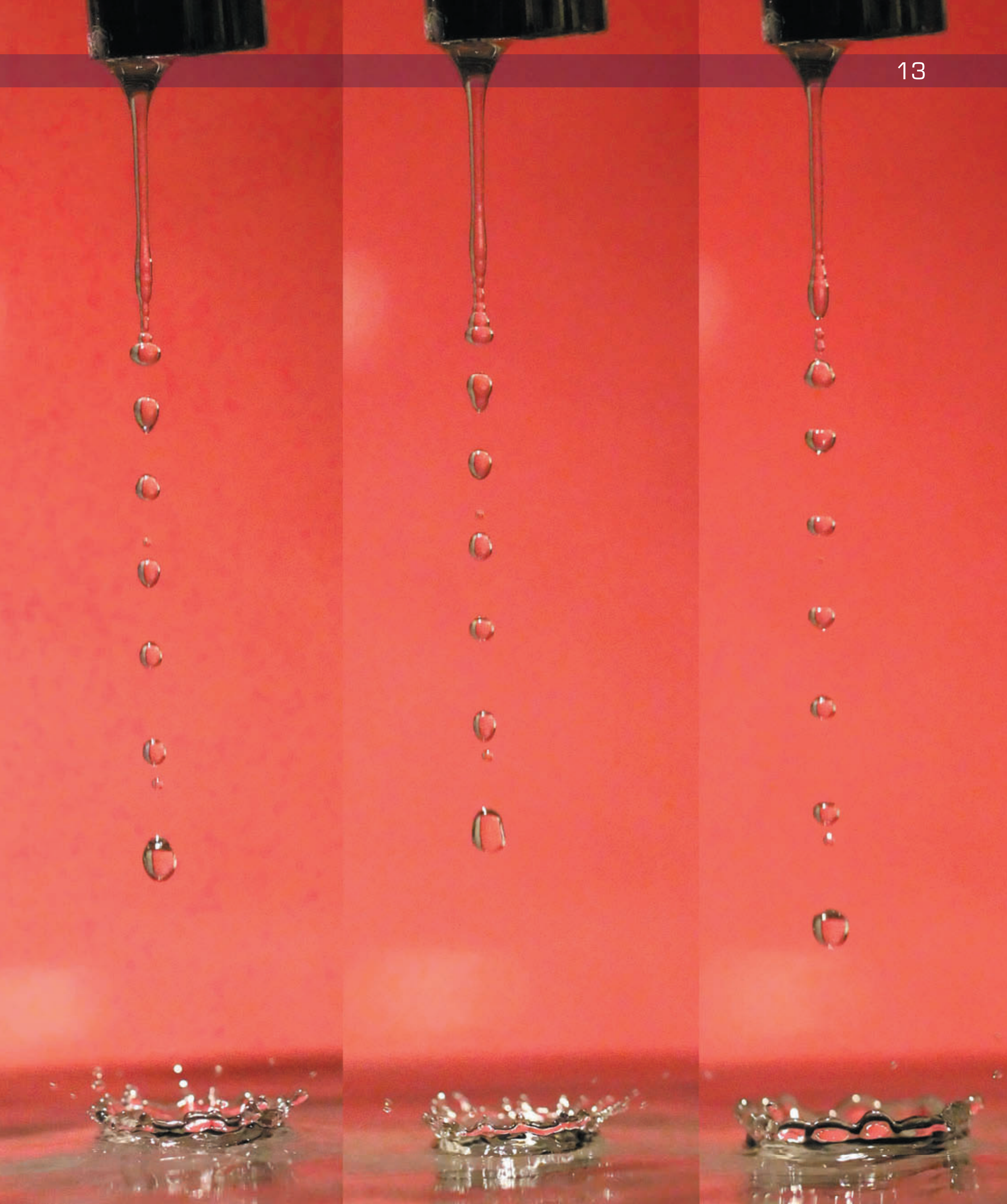
W. Stegmüller **Die Mondtäuschung** www.afw2000.de/Elemente/2008_AT_03.pdf

Wiederholbarkeit von Versuchen

Eine der Grundsäulen von Naturwissenschaft ist die Forderung, dass Experimente wiederholbar sind. Besonders wichtig ist auch das exakte Beschreiben von Grundvoraussetzungen sowie die unverfälschte Darstellung des Ergebnisses. Die einzelnen Momentanaufnahmen eines tropfenden Wasserhahns (linke Seite) sind keine Stroboskop-Aufnahmen. Wir sehen also nicht einen einzelnen Tropfen zu verschiedenen Zeitpunkten, sondern Tropfenserien. Beim Betrachten dieser Serien fällt auf, dass sich die einzelnen Tröpfchen in nahezu konstantem Abstand aneinanderreihen (ein einzelner Tropfen würde, in konstanten Zeitintervallen fotografiert, die Abstände deutlich sichtbar von Lage zu Lage vergrößern). Offensichtlich lösen sich erst während des Fallens immer wieder Teiltröpfchen, die dann „nachhinken". Die Fotos sind beliebig wiederholbar und sehen einander täuschend ähnlich.

Die Aufnahme eines Tropfens, der sich ganz langsam vom Blütenblatt einer Sonnenblume löst, hat eher einen ästhetischen Wert. Man könnte sich auch überlegen, wie die Zerrbilder im Tropfen zustandekommen (s. S. 140) ...

WIKIPEDIA **Abreißen eines Tropfens** http://de.wikipedia.org/wiki/Tropfen



Seerosen-Vermehrung

Folgende Fragestellung läuft auf eine Exponentialgleichung hinaus: In einem Teich wachsen Seerosen, die sich immer mehr ausbreiten. Die von ihnen bedeckte Fläche nehme täglich um 10% zu. Nach 30 Tagen ist der Teich völlig bedeckt. Wie groß war die Fläche am Anfang? Wann war der Teich zur Hälfte bedeckt?

Sei S die von den Seerosen am ersten Tag bedeckte Fläche und A die Fläche des Teichs. Am zweiten Tag bedecken die Seerosen die Fläche $1{,}1 \cdot S$, am n-ten Tag die Fläche $1{,}1^n \cdot S$.

Aus $1{,}1^{30} \cdot S = A$ ergibt sich $S = A \,/\, 17{,}5$ – d. h., der Teich war anfänglich nur zu weniger als 6% bedeckt.

Nun ist der Wert von n aus $1{,}1^n \cdot S = 0{,}5\ A$ zu ermitteln: $1{,}1^n \cdot S = 0{,}5 \cdot 1{,}1^{30} \cdot S \rightarrow 1{,}1^{n\text{-}30} = 0{,}5 \rightarrow n = 30 + \log 0{,}5 \,/\, \log 1{,}1 = 22{,}73$.

Der Teich war also am 23. Tag zur Hälfte bedeckt. Die Seerosen-Problematik steht stellvertretend für exponentielles Wachstum, das in der Natur auch bei Bakterienvermehrung zu finden ist. Solches Wachstum muss zwangsläufig irgendwann kollabieren oder ein anderes Ende finden, weil sonst alle Grenzen überschritten würden. Im Fall eines Teichs gilt: Mehr als zuwachsen kann er nicht (Bild unten: Schon fast geschlossener Schilfgürtel am Neusiedlersee).

Folgende Strategie im Casino kann daher fatale Folgen haben: Man setzt einen gewissen Geldbetrag G auf Rot. Kommt Rot, hat man gewonnen (Gewinn G). Kommt Schwarz, verdoppelt man den Einsatz und setzt wieder auf Rot. Kommt Rot, bekommt man das Doppelte des aktuellen Einsatzes ($4G$) und hat in Summe den Gewinn G. Kommt wieder Schwarz, verdoppelt man den Einsatz und setzt wieder auf Rot, usw.

Der Haken an der Sache ist: Der Gewinn ist immer nur G. Irgendwann überschreitet aber der doppelte Einsatz den maximalen Rahmen, und die Bank wird die Wette ablehnen. Dann ist ungleich mehr verspielt als man je gewinnen kann.

MATHE-ONLINE **Exponentialfunktion und Logarithmus** www.mathe-online.at/mathint/log/i.html