Mathematik im Kontext

Martina R. Schneider

Zwischen zwei Disziplinen

B. L. van der Waerden und die Entwicklung der Quantenmechanik

Springer

Mathematik im Kontext

Herausgeber:
Prof. Dr. David E. Rowe
Prof. Dr. Klaus Volkert

Martina R. Schneider

Zwischen zwei Disziplinen

B. L. van der Waerden und die Entwicklung der Quantenmechanik

Springer

Dr. Martina R. Schneider
Johannes Gutenberg Universität Mainz
Fachbereich 8
Institut für Mathematik
Staudinger Weg 9
55099 Mainz
Deutschland
mschneider@mathematik.uni-mainz.de

ISSN 2191-074X e-ISSN 2191-0758
ISBN 978-3-642-21824-8 e-ISBN 978-3-642-21825-5
DOI 10.1007/978-3-642-21825-5
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2010): 01A02, 20C03, 81R03

Einbandentwurf: deblik, Berlin (Portrait von B. L. van der Waerden (ca. 1931), Quelle: Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach)

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

„Die Menschen können nicht sagen,
wie sich eine Sache zugetragen,
sondern nur wie sie meinen,
daß sie sich zugetragen hätte.“

(Georg Christoph Lichtenberg,
Sudelbuch C, 375)

Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde im Oktober 2009 in leicht modifizierter Form als Dissertation an der Bergischen Universität Wuppertal eingereicht und von dem Förderverein der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig mit dem Nachwuchsförderpreis 2010 ausgezeichnet. Die vielschichtige Themenstellung verdanke ich meinem Betreuer Erhard Scholz. Er schlug vor, die Beiträge des jungen van der Waerden zur gruppentheoretischen Methode in der Quantenmechanik aus mathematikhistorischer Perspektive zu untersuchen. Dies war eine große, aber zugleich sehr lohnenswerte Herausforderung. Denn zum einen bedeutete dies für mich als Mathematikerin und Mathematikhistorikerin, mich mit Physik auseinanderzusetzen, und zum anderen eröffneten sich damit für mich neue und fruchtbare Fragestellungen. Die Gestaltung der Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik begleiteten mich dann nicht nur in meiner Dissertation, sondern ab 2006 auch im Rahmen meiner Arbeit in einem Projekt der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. So ergaben sich manche Synenergien. Mein Leipziger Arbeitskollege Karl-Heinz Schlote war mir stets ein wichtiger Diskussionspartner. Er hat einen nicht unerheblichen Anteil daran, dass die vorliegende Arbeit ihren Abschluss fand.

So gilt mein Dank an erster Stelle Erhard Scholz und Karl-Heinz Schlote, die diese Arbeit über Jahre hinweg mit Interesse, Geduld und vielen Anregungen begleiteten. Aber sie waren nicht die einzigen, welche mich beim Verfassen dieser Arbeit auf mannigfache Weise unterstützten. Für die Möglichkeit, mein Thema in Fachkreisen (Berlin, Budapest, Edinburgh, Leipzig, Mainz, Oberwolfach, Paris, Utrecht, Wien, Wuppertal, Xi'an) vorstellen und diskutieren zu können, bedanke ich mich bei all jenen, die mich zu einem Vortrag einluden. Ebenfalls geht mein Dank an die Teilnehmerinnen und Teilnehmer dieser Tagungen oder Kolloquien und an all die Kolleginnen und Kollegen, deren Fragen und Interesse mich zu weiterem Nachdenken anregten, die mir Hinweise gaben oder auf konstruktive Weise weiterhalfen: Gerard Alberts, Tom Archibald, Charlotte Bigg, Arianna Borrelli, Henk Bos, Karine Chemla, Leo Corry, Yvonne Dold-Samplonius, Moritz Epple, José Ferreirós, Della Fenster, Domenico Giulini, Catherine Goldstein, Hubert Gönner, Jeremy Gray, Niccolò Guicciardini, Uta Hartmann, Tom Hawkins, Wiebke Herr, Marijn Hollestelle, Tinne Hoff Kjeldsen, Christoph Lehner, Birgit Petri, Qu Anjing, Gerhard Rammer,

Volker Remmert, Jim Ritter, Laura Rodríguez, David Rowe, Tilman Sauer, Norbert Schappacher, Gregor Schiemann, Joachim Schwermer, Skuli Sigurdsson, Reinhard Siegmund-Schultze, Silke Slembeck, Friedrich Steinle, Michael Stöltzner, Klaus Volkert, Scott Walter, Gerlinde und Hans Wußing. Die „Novembertagungen“ zur Geschichte der Mathematik und die interdisziplinären Leipziger „Kneipenseminare“ waren zudem für mich wichtige Foren des informellen Gedankenaustausches. Herzlichen Dank an alle, die zu dieser offenen und intellektuell fruchtbaren Atmosphäre beitrugen. Da diese Arbeit zu einem nicht unerheblichen Teil auf der Auswertung von Korrespondenzen und Universitätsakten beruht, geht mein herzlicher Dank auch an die vielen ungenannten Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter in den Archiven, welche mir bei meiner Suche behilflich waren. Ihre Arbeit wird zu selten gesehen.

Dass die Arbeit so schnell erscheinen konnte, verdanke ich dem Springer-Verlag, insbesondere Clemens Heine, sowie den beiden Initiatoren der neuen mathematikhistorischen Reihe *Mathematik im Kontext* David Rowe und Klaus Volkert.

Meiner Familie, meinen Freundinnen und Freunden danke ich, dass sie mich in jeder Hinsicht unterstützten und Nachsicht mit mir hatten, wenn ich wieder einmal keine Zeit zu haben glaubte.

Last but not least: Auch der Bergischen Universität Wuppertal gilt mein ausdrücklicher Dank, denn die Förderung durch das Graduiertenstipendium ermöglichte diese Arbeit.

Mainz, im März 2011 *Martina R. Schneider*

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Abkürzungen

AHQP	Archives for the History of Quantum Physics
AIP	American Institue for Physics
BBG	Gesetz zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums
BPM	Bataafsche Petroleum Maatschappij (heute Shell)
CERN	European Organization for Nuclear Research
CPH	Communistische Partij in Holland
CWI	Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam
DM	Deutsches Museum, München
DMV	Deutsche Mathematiker-Vereinigung
ENB	Ehrenfest Notebooks
ESC	Ehrenfest Scientific Correspondence
ETH	Eidgenössische Technische Hochschule
ETHZH	ETH-Bibliothek Zürich, Spezialsammlungen, Nachlässe
GA	Groninger Archieven
GAA	Gemeentearchief Amsterdam
HBS	Hogere Burgers School
IEB	International Education Board
IEBvdW	Rockefeller Archive Center, Rockefeller Foundation Archives, Rockefeller Related Special Collection, International Education Board, Series I Appropriations, Sub-Series 3, Box 61, Folder 1027 „Bartel Leendert van der Waerden, 1925–1933 (mathematics)“
MB	Museum Boerhaave, Leiden
MC	Mathematisch Centrum, Amsterdam
MI	Mathematisches Institut, Göttingen
MPI	Max-Planck-Institut
NSDAP	Nationalsozialistische Deutsche Arbeiterpartei
NSUB	Niedersächsische Landes- und Universitätsbibliothek, Handschriftenabteilung, Göttingen
NvdW	Nachlass B. L. van der Waerden, ETH-Bibliothek Zürich (Spezialsammlungen, Nachlässe, HS 652)
o. D.	ohne Datumsangabe

o. O.	ohne Ortsangabe
RAC	Rockefeller Archive Center, New York
RACTisdale	Rockefeller Archive Center, Rockefeller Foundation, Record Group 12.1, Officer's Diaries, Wilbur E. Tisdale
RANH	Rijksarchief Noordholland (Haarlem)
RuGA	Rijksuniversiteit Groningen Archief
SA	Sturmabteilung (Bis 1933 paramilitärische Kampforganisation der NSDAP, danach vorübergehende staatliche „Hilfspolizei")
SDAP	Sociaal Democratische Arbeiterspartij
SDP	Sociaal Democratische Partij
SS	Sommersemester
UAG	Universitätsarchiv Göttingen
UAL	Universitätsarchiv Leipzig
ULA	Universiteit Leiden Archief
WG	Wiskundig Genootschap
WS	Wintersemester

Einleitung

Ein Kennzeichen der Anfang des 20. Jahrhunderts entstandenen „modernen“ physikalischen Theorien, der Relativitätstheorie und der Quantenmechanik, ist ihre starke Durchdringung mit abstrakten mathematischen Konzeptionen. Letztere sind für ein physikalisches Verständnis grundlegend, jedoch führten und führen sie durch ihre ‚Unanschaulichkeit‘ zum Teil zu fundamentalen Deutungsschwierigkeiten. In der Relativitätstheorie bilden im Fall der speziellen der Minkowskiraum (ein semi-euklidischer vierdimensionaler reeller Raum) und im Fall der allgemeinen eine Riemannsche Mannigfaltigkeit die mathematische Basis. In der Quantenmechanik kommt einem Hilbertraum von quadratintegrierbaren Funktionen eine zentrale Stellung zu. Aber auch weitere mathematische Konzeptionen fanden Eingang in diese physikalischen Theorien. Für die Quantenmechanik sind hier beispielsweise die Wahrscheinlichkeitstheorie (für eine – nicht unumstrittene – Interpretation) oder die Gruppen- und Darstellungstheorie (für das Erfassen von Symmetrien) zu nennen. Physik und Mathematik gehen also in den genannten physikalischen Theorien eine sehr enge Verbindung ein, so dass eine Analyse des Wechselverhältnisses der beiden Disziplinen äußerst vielversprechend erscheint.

Die vorliegende Untersuchung möchte am Beispiel des Engagements des niederländischen Mathematikers Bartel L. van der Waerden (1903–1996) auf dem Gebiet der gruppentheoretischen Methode in der Quantenmechanik einige Dynamiken dieser Wechselbeziehungen aufzeigen und so zu einer differenzierten Erfassung des Gesamtprozesses beitragen. Es zeigt sich auch hier, dass dieser Prozess keine disziplinäre Einbahnstraße ist, sondern dass beide Disziplinen, Mathematik und Physik, von dem Austausch profitieren. Van der Waerden agierte dabei „zwischen“ den beiden Disziplinen im folgenden Sinn: Er stand Physikern als mathematischer Berater zur Verfügung und versuchte auf deren Wünsche einzugehen, selbst wenn dies ab und an bedeutete, auf die, seiner Meinung nach, mathematisch sachgemäßeste Darstellung zu verzichten und einfache, konkret nachrechnenbare Ansätze zu wählen. Er scheute aber auch nicht davor zurück, neue Konzepte der modernen Algebra in seinen physikalischen Arbeiten zu benutzen, falls er dies für angebracht hielt. Die Offenheit für die Interessen der Physiker sowie die pragmatische Haltung in Hinblick auf die Mathematik sind für van der Waerdens frühe quantenmechanische

Beiträge charakteristisch. Gerade im Vergleich mit den Arbeiten der beiden anderen Pioniere der gruppentheoretischen Methode in der Quantenmechanik, dem Physiker Eugen Wigner und dem Mathematiker Hermann Weyl, wird deutlich, dass alle drei Wissenschaftler unterschiedlich an diese Thematik herangingen. So eröffnet sich ein breites Spektrum in der Ausgestaltung der Wechselbeziehungen zwischen den beiden Disziplinen.

Während die Geschichte der Relativitätstheorie in den letzten Jahren sowohl physikhistorisch als auch mathematikhistorisch verstärkt aufgearbeitet wurde, gilt dies für die sich anschließende Entwicklung der Quantenmechanik nur für den physikhistorischen Zugang.[1] Eine mathematikhistorische Erforschung der Quantenmechanik steht jedoch im Wesentlichen noch aus, auch wenn einzelne Teilaspekte bereits ansatzweise untersucht wurden.[2] Hier setzt die vorliegende Untersuchung an. Sie analysiert und kontextualisiert die Publikationen van der Waerdens zur Quantenmechanik bis Mitte der 30er Jahre des letzten Jahrhunderts. Als historiographische Detailstudie stellt sie damit einen weiteren Schritt zur Erforschung der Geschichte der Quantenmechanik aus mathematikhistorischer Perspektive dar.

Für den Bereich der gruppentheoretischen Methode in der Quantenmechanik, also den Bereich der Quantenmechanik, welchen van der Waerdens Arbeiten berühren, liegen bereits erste wissenschaftshistorische Analysen vor.[3] Von physikhistorischer Seite ermöglichen Mehra und Rechenberg einen zusammenfassenden Überblick für den Zeitraum von ca. 1926 bis 1933.[4] Der jüngst erschienene Artikel von Borrelli bietet einen detaillierten Einblick zur Entwicklung der gruppentheoretischen Methode durch E. Wigner aus derselben Perspektive.[5] Borrelli zeigt auf, wie Wigner zu diesem Ansatz kam, wie er Methoden aus seinen Studien mit H. Mark und K. Weissenberg zur Kristallographie zur Ableitung von Auswahlregeln in der Quantenmechanik nutzbar machte, wie er diese auf weitere quantenmechanische Fragestellungen adaptierte und welchen Einfluss der Mathematiker und Freund Wigners J. von Neumann auf die Entstehung der diesbezüglichen Arbeiten hatte. Borrelli ergänzt damit eine frühere, eher chemiehistorisch angelegte Studie zur gleichen Thematik von Chayut und korrigiert einige der dort geäußerten Ein-

[1] Es sei dazu auf die sechsbändige Abhandlung von Mehra und Rechenberg (1982–2000) sowie auf Beller (1999); Darrigol (2003); Hendry (1984) und auf die biographischen Werke zu W. Heisenberg (Cassidy, 2001) und P. A. M. Dirac (Kragh, 1990) verwiesen. Zudem wird derzeit am Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte in Berlin ein Projekt zur Geschichte der Quantenmechanik durchgeführt.

[2] Zu letzteren zählen beispielsweise die Axiomatisierung der Quantenmechanik durch D. Hilbert, J. von Neumann und P. Jordan (Lacki, 2000; Rédei und Stöltzner, 2001) und die Förderung der quantenmechanischen Forschung in Göttingen durch Hilbert (Schirrmacher, 2003b).

[3] Die Geschichte der Gruppen- und Darstellungstheorie vgl. beispielsweise Wußing (1984); Curtis (1999); Hawkins (2000), zu ihren historischen Bezügen zur Kristallographie und anderen anwendungsbezogenen Bereichen siehe Scholz (1989).

[4] Mehra und Rechenberg (2000, Abschn. III.4).

[5] Borrelli (2009).

schätzungen.[6] Von mathematikhistorischer Seite wurde für den Zeitraum von 1926 bis 1930 das Panorama der vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten der gruppentheoretischen Methode in der Quantenmechanik durch Scholz beleuchtet.[7] In einem weiteren Artikel wandte sich Scholz vertiefend H. Weyl zu.[8] Er zeichnete Inhalt und Entstehungskontext von Weyls erster quantenmechanischer Arbeit, einem Aufsatz mit dem Titel „Quantenmechanik und Gruppentheorie", nach.[9]

Mit Wigner und Weyl sind bereits zwei wichtige Akteure für die Entwicklung und Verbreitung von gruppentheoretischen Methoden in der Quantenphysik genannt. Ihre jeweiligen Rollen in dem Prozess der Mathematisierung der Quantenmechanik wurden, wenngleich nicht in jeder Facette, durchaus plastisch herausgearbeitet.[10] Scholz' und Borrellis Analysen geben zu einer Modifikation der von Mackey aufgestellten These von zwei distinkten „Programmen" der beiden Wissenschaftler Anlass – auch wenn dies in ihren Arbeiten nicht explizit angesprochen wird.[11] Nach Mackey zielte Wigners Vorgehen stärker auf die konkrete Anwendung der Gruppentheorie in der Quantenmechanik, während Weyls Zugang konzeptioneller und auf die Fundierung der Quantenmechanik hin ausgerichtet gewesen sei. Die beiden jüngeren Analysen zeigen jedoch, dass sich beide Aspekte sowohl in den Arbeiten von Weyl als auch in denen von Wigner nachweisen lassen. Hier spiegelt sich die Komplexität des Wechselverhältnisses wider.

Die vorliegende Untersuchung knüpft an diese wissenschaftshistorischen Beiträge an und erweitert die bisherige Forschungsperspektive um eine mathematikhistorische Analyse zu van der Waerdens frühen quantenmechanischen Arbeiten. Van der Waerden begründete in zwei Arbeiten den Spinorkalkül für die Erfassung der Diracschen Wellengleichung des Elektrons im Kontext der speziellen und, zusammen mit L. Infeld, der allgemeinen Relativitätstheorie (1929, 1933) und publizierte 1932 eine Monographie mit dem Titel „Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik".[12] Diese Beiträge werden zwar in der Fachliteratur erwähnt,[13] wurden jedoch bisher nicht näher erörtert. Sie bilden den Fokus der vorliegenden Untersuchung, welche die folgenden drei Forschungskomplexe ins Zentrum stellt:

Der erste zentrale Forschungskomplex behandelt das Verhältnis van der Waerdens zur Physik. Während nämlich der Mathematiker Weyl sich bereits durch sein Buch „Raum Zeit Materie"[14] in der theoretischen Physik einen Namen erworben hatte, hatte der junge van der Waerden bis 1929 noch keinen Forschungsbeitrag zur

[6] Chayut (2001). Vgl. weitere diesbezügliche, chemiehistorisch ausgerichtete Arbeiten, beispielsweise Gavroglu (1995); Karachalios (2000); Schweber (1990); Simões (2003).

[7] Scholz (2006b).

[8] Scholz (2008).

[9] Weyl (1928a).

[10] Neben den bereits erwähnten Arbeiten von Scholz (2006b, 2008) und Borrelli (2009) sind zu nennen: Mackey (1988a); Sigurdsson (1991); Speiser (1988).

[11] Mackey (1988a,b, 1993).

[12] van der Waerden (1929); Infeld und van der Waerden (1933); van der Waerden (1932).

[13] Beispielsweise in Scholz (2006b) oder Mehra und Rechenberg (2000, Abschn. III.4).

[14] Weyl (1918).

Physik publiziert. Die bisherige biographische und autobiographische Literatur zu van der Waerden liefert zur Beantwortung dieses Themenkomplexes nur sehr wenige Anhaltspunkte.[15] Durch die Einbeziehung von umfangreichem Archivmaterial gelang eine zum Teil äußerst detailreiche Rekonstruktion der Entstehungskontexte seiner frühen quantenmechanischen Arbeiten sowie seiner Kontakte zur Physik, zu Physikern wie auch zu einigen zur mathematischen Physik arbeitenden Mathematikern bis Mitte der 1930er Jahre. Es zeigt sich zum einen, dass van der Waerden bereits seit seiner Studienzeit an physikalischen Fragestellungen interessiert war – seine erste, in den gängigen Bibliographien[16] unberücksichtigte Publikation beschäftigte sich populärwissenschaftlich mit der Relativitätstheorie – und zum anderen, dass seine wissenschaftlichen Netzwerke für seine frühen Publikationen zur Physik entscheidend waren. Insbesondere wird die tragende Rolle eines niederländischen Netzwerks um den Leidener Physikprofessor P. Ehrenfest herausgearbeitet. Im Rahmen der Archivstudien konnten zudem einige Lücken geschlossen sowie mehrere teilweise widersprüchliche Angaben in der bisherigen biographischen und autobiographischen Literatur zu van der Waerden aufgeklärt werden. So leistet die vorliegende Arbeit auch einen Beitrag zu einer umfassenden wissenschaftlichen Biographie van der Waerdens.

Der zweite zentrale Forschungskomplex besteht in der inhaltlichen Analyse und weiteren Kontextualisierung von van der Waerdens frühen quantenmechanischen Arbeiten. Aus mathematikhistorischer Perspektive stehen hier Fragen bezüglich der ‚Verwendung' von Mathematik im Mittelpunkt: Welche mathematischen Konzepte nutzte van der Waerden explizit und implizit? Wie führte er sie ein und wie modifizierte er diese? Was leisteten sie? In welchem Verhältnis stehen sie zu van der Waerdens eigenen mathematischen Arbeiten und zum Stand der mathematischen Forschung insgesamt? Da van der Waerden ein Vertreter der in den 1920er Jahren von E. Noether und E. Artin entwickelten sogenannten „modernen" Algebra war, wird hier insbesondere der Frage nachgegangen, inwiefern van der Waerden moderne algebraische Konzepte und Methoden in seinen gruppentheoretischen Beiträgen zur Quantenmechanik einsetzte. Die vorliegende Analyse zeigt, dass van der Waerden sehr differenziert vorging. Nur selten griff er auf die moderne algebraische Vorgehensweise zurück, die er dann gegebenenfalls den – von ihm beobachteten oder vermuteten – Bedürfnissen des physikalischen Kontexts und der Physiker anzupassen versuchte. Eine ähnliche Flexibilität in der Wahl seiner Methoden konnte bereits für van der Waerdens Beiträge zur algebraischen Geometrie dargelegt wer-

[15] In den biographischen Arbeiten (Thiele, 2009, 2004; Schappacher, 2007) und (Soifer, 2009, Kapitel 36 bis 39), die sich alle auf Teilaspekte von van der Waerdens Leben konzentrieren, den Würdigungen (Gross, 1973; Frei, 1993), den Nachrufen (Scriba, 1996a,b; Dold-Samplonius, 1997; Frei, 1998) und den autobiographischen Werken (Dold-Samplonius, 1994; van der Waerden, 1997(1979)) werden zwar häufig van der Waerdens Publikationen zur Physik erwähnt, aber es wird nur selten auf die Thematik näher eingegangen. Meist findet das Leipziger, seltener das Göttinger Umfeld eine kurze Erwähnung, beispielsweise bei Dold-Samplonius (1994, S. 137 f.), Scriba (1996a, S. 14), Frei (1998, S. 136) und van der Waerden (1997(1979), S. 22). Die Arbeiten von Eisenreich (1981) und Schlote (2008) gehen inhaltlich etwas ausführlicher auf die in Leipzig entstandenen van der Waerdenschen Publikationen ein.

[16] Gross (1973); Top und Walling (1994).

den.[17] Durch den Vergleich mit anderen Arbeiten, insbesondere denen von Weyl und Wigner, wird versucht, das Spezifische an van der Waerdens Vorgehensweise aufzuzeigen. Neben der Einbettung in den mathematikhistorischen Kontext findet auch der quantenmechanische Berücksichtigung. Ebenso wird der Rezeption von van der Waerdens Arbeiten in der Quantenmechanik bis Ende der 1930er Jahre nachgegangen.

Damit wird der dritte, bereits eingangs erwähnte Forschungskomplex der vorliegenden Untersuchung berührt: die Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik in der Quantenmechanik. In der vorliegenden Untersuchung gelang es am Beispiel des Engagements von van der Waerden auf dem Gebiet der gruppentheoretischen Methode in der Quantenmechanik, einige Dynamiken dieser Wechselbeziehungen zu erfassen. So konnte herausgearbeitet werden, dass die häufig getroffene Einteilung[18] der Quantenphysiker in Befürworter und Gegner der gruppentheoretischen Methode irreführend ist, da damit die Gruppe der an dieser Methode interessierten Wissenschaftler unberücksichtigt bleibt. Es war nämlich ein Vertreter dieser Gruppe, Ehrenfest, der einige wichtige Impulse für die Entwicklung der gruppentheoretischen Methode gab, und z. B. van der Waerdens Arbeit zum Spinorkalkül anregte. Da Ehrenfest den späteren Kampfbegriff der Gegner der Gruppentheorie prägte („Gruppenpest"), wird er zudem manchmal fälschlich dem Lager der Gegner zugerechnet.[19]

Ein weiteres Ergebnis der vorliegenden Arbeit sei hier vorweg genommen, es betrifft van der Waerdens Motivation für sein quantenmechanisches Engagement. Beide Artikel zum Spinorkalkül gehen auf Anfragen von Physikern (Ehrenfest, Infeld) zurück. Damit können sie als eine Art von Serviceleistung gesehen werden. Außerdem verweist das Bedürfnis der Physiker nach einem Kalkül, einem „Rechenmechanismus"[20] (Ehrenfest), nicht nur auf Schwierigkeiten mit der mathematischen Theorie, sondern auch auf die Bedeutung von einfach zu handhabenden sowie im gewissen Sinne vertrauten Notationsformen für darstellungstheoretische Zusammenhänge, die, Werkzeugen gleich, flexibel einsetzbar sind. Damit sind einige Dynamiken aufgezeigt, welche meines Wissens nach in wissenschaftshistorischen Untersuchungen zu den Wechselbeziehungen bisher nicht zur Geltung kamen.

Schließlich wurde die Entstehung des sogenannten Casimiroperators und dessen Verwendung im Beweis der vollständigen Reduzibilität der Darstellungen halbeinfacher Liegruppen analysiert und damit eine Rückwirkung der quantenmechanischen auf die mathematische Forschung herausgearbeitet. Zwar ist dieses Beispiel bekannt,[21] jedoch konnte der physikalische Hintergrund der Beweise von H. B. G. Casimir und van der Waerden (1935) sowie von G. Racah (1950) deutlicher aufgezeigt werden.[22] Auch wenn einige der hier skizzierten Aspekte nicht

[17] Schappacher (2007).

[18] Beispielsweise in Sigurdsson (1991, S. 235-238) oder Mehra und Rechenberg (2000, Abschn. III.4(e)).

[19] Kragh (1990, S. 43).

[20] Ehrenfest an Epstein, 20.10.1929, MB, ESC 4, S.1, 21.

[21] Borel (1986, 1998, 2001); von Meyenn (1989).

[22] Casimir und van der Waerden (1935); Racah (1950).

unbedingt als typisch für das Wechselverhältnis zwischen Mathematik und Physik in der Quantenmechanik erachtet werden können, so demonstrieren sie doch die Vielschichtigkeit des noch weiter zu erforschenden Prozesses.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in vier Teile. Im ersten, an die Untersuchungsthematik heranführenden Teil wird der Hintergrund für van der Waerdens Arbeiten zur Quantenmechanik relativ breit bis ins Jahr 1928 dargestellt. Dabei wird auf darstellungstheoretische und quantenmechanische Entwicklungen eingegangen sowie van der Waerdens Werdegang skizziert. Die drei nächsten Teile sind chronologisch nach van der Waerdens Wirkungsstätten angeordnet. Im zweiten Teil wird sein Einstieg in die quantenmechanische Forschung in Groningen (1928–1931) beschrieben und Entstehungskontexte, Inhalt und Struktur seiner ersten Arbeit zum Spinorkalkül untersucht. Der dritte Teil zu van der Waerdens Zeit in Leipzig (1931–1945) ist bei Weitem der umfangreichste, denn in diese Zeit fallen seine anderen beiden frühen Beiträge zur Quantenmechanik sowie sein Beweis der vollen Reduzibilität der Darstellung von halbeinfachen Liegruppen. An eine Skizze van der Waerdens wissenschaftlichen Umfelds an der Universität Leipzig schließt sich ein Exkurs über sein Verhältnis zum Nationalsozialismus an. Dies trägt zum Verständnis von van der Waerdens Karriere in den Nachkriegsjahren in Holland und damit auch seiner Hinwendung zur angewandten Mathematik bei. Der Schwerpunkt des dritten Teils liegt mit sechs Kapiteln auf der Analyse seiner Monographie zu den gruppentheoretischen Methoden in der Quantenmechanik. Je ein weiteres Kapitel ist der Analyse und Kontextualisierung der gemeinsamen Arbeit mit Infeld zum allgemein-relativistischen Spinorkalkül und dem Casimiroperator gewidmet. Ein Ausblick auf van der Waerdens wissenschaftliche Karriere in den Niederlanden (1945–1951) und in Zürich (ab 1951) sowie auf seine Beschäftigung mit der Physik nach 1945 bilden den vierten und letzten Teil der vorliegenden Untersuchung. In diesen Zeitraum fallen weitere Veröffentlichungen van der Waerdens auf dem Gebiet der Quantenmechanik während der 1960er Jahre, die zweite veränderte Auflage seiner Monographie in englischer Sprache 1974 und einige wissenschaftshistorische Abhandlungen zur Geschichte der Quantenmechanik.[23] Diese Entwicklungen können jedoch nur angedeutet werden, weil der Kontext der Quantenmechanik jener Jahre ein völlig anderer und wissenschaftshistorisch noch unzureichend erschlossener ist. Den Abschluss dieser Arbeit bildet die Analyse eines Vortrags über das Wechselverhältnis zwischen Mathematik, Physik und Astronomie, den van der Waerden anlässlich seiner Emeritierung 1972 hielt.[24]

Die oben angesprochenen Forschungskomplexe werden, wie aus der Gliederung der Arbeit hervorgeht, nicht nacheinander abgearbeitet, sondern sind in der Untersuchung eng miteinander verwoben. Auf diese Weise werden Mikroebene und Makroperspektive verzahnt. Dies scheint für eine Erfassung von historischen – und damit von zeitlich komplex strukturierten – Prozessen durchaus angemessen. Die Vorgehensweise hat den Nachteil, dass die Darstellung unübersichtlich zu werden droht.

[23] Physikalische Arbeiten: van der Waerden (1963, 1965, 1966, 1974); physikhistorische Arbeiten: van der Waerden (1960, 1967, 1973b).

[24] van der Waerden (1973a).

Die Verfasserin hat versucht dem entgegenzuwirken, u. a. dadurch, dass den Teilen kurze Überblicksdarstellungen vorangestellt sowie die jeweiligen lokalen wissenschaftlichen Rahmenbedingungen in Hinblick auf van der Waerden in einleitenden Kapiteln zusammengestellt wurden. Weiterhin ist zu beachten, dass die Untersuchung Grundkenntnisse der Darstellungstheorie und der Quantenmechanik voraussetzt. Auch wenn an vielen Stellen zum Teil sogar Elementares aus diesen Bereichen erläutert wird, so kann die Abhandlung in der vorliegenden Form nicht als Einführung in diese Fachgebiete dienen.

Der in dieser Untersuchung thematisierte Mathematisierungsprozess beschränkte sich im 20. Jahrhundert nicht nur auf die Physik, sondern erfasste auch andere Disziplinen, wie beispielsweise die Chemie, die Wirtschaftswissenschaften oder die Soziologie. Natürlich verlief dieser Prozess in den verschiedenen Disziplinen sehr unterschiedlich in Bezug auf Zeitpunkt bzw. Zeitraum sowie auf Art und Umfang der Mathematisierung.[25] Eine genaue Analyse der Wechselbeziehungen am Beispiel der Quantenmechanik birgt dennoch das Potential, auch für das Verständnis anderer Mathematisierungsprozesse aufschlussreich zu sein und damit zugleich einen bescheidenen Beitrag zur Entwicklung der Wissenschaft im 20. Jahrhundert im Allgemeinen zu liefern.

[25] Für die gruppentheoretische Methode in der entstehenden physikalischen Chemie klingt dies im Kap. 14 an.

Teil I
Hintergrund: Die Entwicklung bis ca. 1928

In den folgenden Kapiteln werden einige Entwicklungen skizziert, die den Kontext für van der Waerdens frühe Beiträge zur Quantenmechanik bilden. Dies umfasst sowohl die Beschreibung des in den für das Thema relevanten Teilgebieten der Mathematik und Physik erreichten Kenntnisstandes wie auch die wissenschaftliche Karriere van der Waerdens. Insbesondere wird ein Überblick gegeben über die Entwicklung der Quantenmechanik, die Herausbildung der Darstellungstheorie und das Auftauchen gruppentheoretischer Methoden in der Quantenmechanik. Die Notwendigkeit für diese Auswahl ergibt sich aus dem Untersuchungsgegenstand: van der Waerdens physikalische Beiträge beschäftigen sich allesamt mit gruppentheoretischen Methoden in der Quantenmechanik. Mathematisch gesehen verbirgt sich hinter den „gruppentheoretischen Methoden" der damaligen Quantenmechanik im Wesentlichen die Darstellungstheorie von Gruppen. So könnte man präziser von „darstellungstheoretischen Methoden" sprechen – ein Ausdruck, der sich aber im Sprachgebrauch nicht eingebürgert hat.

Gemeinsam ist diesen einführenden Überblickskapiteln, dass die Darstellung meist um das Jahr 1928 endet – und damit kurz vor der Publikation von van der Waerdens erster physikalischer Abhandlung im Jahre 1929. In manchen Fällen werden die Entwicklungslinien etwas über diesen Zeitpunkt hinaus weiter gezogen, um keine künstlichen Brüche zu erzeugen. Die Anfangszeitpunkte variieren dagegen thematisch bedingt stark. Die Kapitel wurden chronologisch nach diesen Anfangszeitpunkten angeordnet: Dem Überblick zur Geschichte der Darstellungstheorie (Kap. 1) schließt sich ein Kapitel zur Entwicklung der Quantenmechanik (Kap. 2) und ein weiteres zum Aufkommen gruppentheoretischer Methoden in der Quantenmechanik an (Kap. 3). Abschließend wird van der Waerdens wissenschaftlicher Werdegang bis 1928 nachgezeichnet (Kap. 4). Durch diese Anordnung wird der Lesende systematisch an den Kern der Untersuchung herangeführt. Zu Beginn des zweiten Teils stehen damit wesentliche fachspezifische wie biographische Hintergrundinformationen zur Verfügung, die für ein tieferes Verständnis der frühen physikalischen Arbeiten van der Waerdens und deren kontextuelle Einordnung erforderlich sind.

Während die hier gegebenen Zusammenfassungen zur Geschichte der Darstellungstheorie und zur Geschichte der Quantenmechanik nur grob einige wenige grundlegende Entwicklungen wiedergeben können, gehen die Darstellungen zur gruppentheoretischen Methode und zu van der Waerdens Biographie stärker ins Detail. Hierbei wurden auch in der bisherigen Forschung unberücksichtigt gebliebene Aspekte einbezogen und in Einzelfällen Unbekanntes ans Tageslicht gebracht. Im dritten Kapitel betrifft dies insbesondere die Analyse der Rezeption der gruppentheoretischen Methode, im vierten das Herausarbeiten von van der Waerdens Verhältnis zur Physik und zu Physikern bis 1928.

Kapitel 1
Zur Geschichte der Darstellungstheorie

Die Darstellungstheorie von Gruppen hat ihre Wurzeln in vielen verschiedenen Teilgebieten der Mathematik des 19. Jahrhunderts. Sie wurde berührt und/oder (weiter-)entwickelt zur Beantwortung von Fragen und Problemen der Lieschen Transformationsgruppen, der Invariantentheorie, der Theorie der Differentialgleichungen, der Geometrie, der Arithmetik oder der Algebra – dem Bereich, dem sie heute zugerechnet wird –, aber auch in der Auseinandersetzung mit Grundlagenfragen der theoretischen Physik. In allen diesen Gebieten wurden Erkenntnisse gewonnen, welche sich für die Darstellungstheorie als fundamental herausstellten. Dies geschah nicht selten beiläufig, da das eigentliche Forschungsinteresse in eine andere Richtung ging. Daher können diese Forschungsergebnisse nicht ohne weiteres der Geschichte der Darstellungstheorie zugerechnet werden. Retrospektiv betrachtet, konstituieren sie vielmehr in diesen Fällen ihre Vorgeschichte, denn die Ergebnisse waren noch nicht das Produkt einer systematischen, an darstellungstheoretischen Fragestellungen orientierten Forschung. Die eigentliche Geschichte der Darstellungstheorie beginnt erst mit den Arbeiten von Frobenius und Burnside um die Jahrhundertwende vom 19. zum 20. Jahrhundert. Frobenius und Burnside entwickelten zunächst unabhängig voneinander fundamentale Konzepte der Darstellungstheorie für endliche Gruppen. Von einer Darstellungstheorie für Liegruppen kann man im engeren Sinne erst seit Weyls Arbeiten von 1925/26 sprechen. Weyl hob seinen integrativen Ansatz explizit hervor: „Hier sollen alle diese Fäden zu einem einheitlichen Ganzen verwoben werden.“[26]

Die Vielfalt der Gebiete, in denen darstellungstheoretische Einsichten formuliert wurden, hatte zur Folge, dass die beteiligten Wissenschaftler die Beiträge der anderen oft gar nicht oder erst spät wahrnahmen. Daher wurden nicht selten Ergebnisse, die aus heutiger Sicht äquivalent sind, mehrfach formuliert und zwischen solchen, die aus heutiger Sicht zusammengehören, wurden selten oder erst spät Bezüge hergestellt. Diese Ignoranz gegenüber anderen Teilgebieten der Mathematik als den eigenen Forschungsgebieten stand nicht nur im Zusammenhang mit dem enormen

[26] Weyl (1925, S. 275). Die „Fäden“ verweisen auf Arbeiten von Frobenius, Schur, Young, Schouten und Cartan (s. u.).

M.R. Schneider, *Zwischen zwei Disziplinen*, Mathematik im Kontext,
DOI 10.1007/978-3-642-21825-5_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

Wachstum mathematischen Wissens, der Institutionalisierung der sich herausbildenden Disziplin der Mathematik und ihrer Ausdifferenzierung in viele Teildisziplinen sowie mit ihrer Professionalisierung – alles Entwicklungen, die während der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts begannen –, sondern auch mit spezifischen lokalen Forschungsmilieus. Verschiedene mathematische Stile, Schulen und Herangehensweisen verstärkten in manchen Fällen das Ausblenden ganzer Teilgebiete. Beispielsweise beschäftigte sich Frobenius, der von der Berliner Mathematik der strengen Begründung à la Weierstraß und Kronecker geprägt worden war und ein äußerst vielseitiger Mathematiker war, nicht mit der in seinen Augen sicher als ungenügend fundiert erscheinenden Theorie von Lie. Und damit nahm Frobenius auch nicht É. Cartans an die Liesche Schule anknüpfenden strukturtheoretischen Ergebnisse zu kontinuierlichen Gruppen zur Kenntnis, welche ganz im Sinne seiner Forschungsrichtung waren. Diese separaten Entwicklungen spiegeln sich in der Gliederung des Abschnittes in einen zur Entwicklung der Darstellungstheorie von Gruppen endlicher Ordnung (1.1) und einen zu der von Liealgebren und Liegruppen (1.2) wider.

Eine umfassende Geschichte der Darstellungstheorie inklusive ihrer Vorgeschichte zu erarbeiten, ist allein schon aufgrund der Diversität der Forschungsgebiete, welche bei ihrer Herausbildung eine Rolle spielten, eine äußerst anspruchsvolle Aufgabe. Thomas Hawkins zeichnet in seiner Monographie *The emergence of the theory of Lie groups. An essay in the history of mathematics 1869–1926* ein detailreiches Bild der Geschichte der Liegruppen als Ergebnis seiner jahrezehntelangen Forschungen.[27] Dazu gehört ganz wesentlich die Vorgeschichte und Geschichte der Darstellungstheorie vor allem in Bezug auf Liegruppen. Hawkins beschreibt, wie zwei disparate Entwicklungslinien – die Darstellungstheorie endlicher Gruppen von Frobenius und Lies Theorie der Transformationsgruppen – letztlich in Weyls bahnbrechenden Arbeiten zur Darstellung von Liealgebren 1925/26 zusammenfließen. Hawkins berücksichtigt und analysiert dabei die verschiedenen Entstehungskontexte, wobei der Fokus auf der Entwicklung der Transformationsgruppen liegt. Neben Hawkins umfassender Monographie sei auch auf das Buch von Charles W. Curtis *Pioneers of representation theory: Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer* hingewiesen. Curtis fokussiert stärker auf den Kontext der Gruppen endlicher Ordnung, in welchem die Darstellungstheorie im heutigen Sinne entstand. Die untersuchte zeitliche Spanne reicht bis in die 1940er Jahre. Curtis stellt dabei häufig Bezüge zur jüngeren Forschung her und bezieht die Geschichte der polynomialen und modularen Darstellung mit ein. Seine Darstellung ist stärker mathematisch orientiert.[28]

Im Folgenden wird ein kurzer Abriss der Entwicklung der Darstellungstheorie bis Ende der 1920er Jahre gegeben, der sich im Wesentlichen auf die bereits erwähnte Sekundärliteratur stützt. Der Schwerpunkt liegt dabei auf solchen Entwicklungen, Konstruktionen und Konzepten, welche für die ersten Anwendungen der gruppentheoretischen Methode in der Quantenmechanik von Bedeutung waren, vgl. Kap. 3, oder/und für van der Waerdens Arbeiten, vgl. Teile II und III. Das sind u. a. die Konzepte der Darstellung einer Gruppe sowie der (vollständigen) Zerleg-

[27] Hawkins (2000). Vgl. Hawkins (1971, 1972, 1974, 1982, 1998, 1999).

[28] Curtis (1999). Weitere Arbeiten in dieser Richtung sind: Lam (1998a,b); Slodowy (1999); Borel (2001).

barkeit einer Darstellung in irreduzible, das Schursche Lemma, die Konstruktion der (irreduziblen) Darstellungen der Permutationsgruppe S_n, der Drehungsgruppe $SO_3(:= SO_3(\mathbb{R}))$ und der $SL_2(\mathbb{R})$, die Konstruktion von Spindarstellungen, Weyls Beweis der vollen Reduzibilität der endlich-dimensionalen Darstellung von komplexen halbeinfachen Liegruppen und der Satz von Peter und Weyl.[29] Die vielfältigen Entstehungskontexte werden nur angedeutet, da sie in der Sekundärliteratur ausführlich dargestellt sind. Diese Verkürzung hat leider zur Folge, dass nur in wenigen Fällen die Notation der Originalarbeiten aufgegriffen sowie ausführlich auf die zugrundeliegenden zeitgenössischen Konzepte eingegangen werden kann. Auch dafür sei auf die Sekundärliteratur verwiesen.[30] An dieser Stelle sei ebenfalls der physikalische Hintergrund von einigen darstellungstheoretischen Arbeiten Cartans und Weyls hervorgehoben. So ist bereits die frühe Entwicklung der Darstellungstheorie mit physikalischen Fragestellungen eng verknüpft – eine Verbindung, die bis heute immer wieder auftaucht und für die Darstellungstheorie durchaus fruchtbringend war und ist.

1.1 Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Die grundlegenden Konzepte der Darstellungstheorie von Gruppen, wie vollständige Reduzibilität von Darstellungen oder Charaktere von Darstellungen, wurden von Georg Frobenius Ende der 1890er Jahren in Berlin entwickelt. Dies geschah nur in Bezug auf endliche Gruppen und im Kontext von arithmetischen Fragestellungen. Vorausgegangen war dem die Ausarbeitung einer Theorie der Charaktere. Um die Jahrhundertwende übertrugen William Burnside und Issai Schur Frobenius' Ansatz in andere mathematische Zusammenhänge der Invariantentheorie und erweiterten ihn um neue Konzepte und Erkenntnisse. 1905 entwickelte Schur die Darstellungstheorie systematisch ausschließlich im Rahmen der linearen Algebra. Damit lag erstmals eine umfassende, relativ einfache und eigenständige, d. h. von den Zusammenhängen zu ihren Entstehungskontexten befreite, Präsentation der Darstellungstheorie vor. Während Frobenius kontinuierliche Gruppen nicht in seine Untersuchungen einschloss, erkundeten Burnside und Schur durchaus einige Zusammenhänge zwischen den Darstellungen endlicher und kontinuierlicher Gruppen. Beide interessierten sich zunächst jedoch nicht für den Aufbau einer Darstellungstheorie kontinuierlicher Gruppen, vielmehr sahen sie darin eher eine Anwendungsmöglich-

[29] Die Bezeichnung der Gruppen folgt hier der Konvention, dass eine abstrakte Gruppe beispielsweise die Gruppe der Drehungen im dreidimensionalen reellen Raum durch $SO_3(\mathbb{R})$ (bzw. SO_3) bezeichnet wird, die zugehörige Matrizengruppe durch $SO(3,\mathbb{R})$ und die zugehörige Liealgebra durch Kleinbuchstaben.

[30] Hawkins (2000) erfasst die diversen konzeptionellen Kontexte in ihrem historischen Zusammenhang und führt auch die zeitgenössische Notation ein. Allerdings wechselt er nicht selten in eine dem heutigen Leser geläufige Darstellung und nutzt heutige Konzepte. Dies fördert meines Erachtens die Verständlichkeit. Durch eine entsprechende Kommentierung versucht Hawkins, den Lesenden vom Ziehen voreiliger Schlüsse abzuhalten.

keit der Darstellungstheorie endlicher Gruppen, welche deren Leistungsfähigkeit zeigen sollte.

1.1.1 Frobenius

Frobenius war ein vielseitiger Mathematiker. Er studierte in Berlin bei Kronecker und Weierstraß und wurde 1870 dort promoviert. Nach einer Professur am Polytechnikum Zürich, dem Vorläufer der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, wurde er 1892 zum Nachfolger von Kronecker in Berlin berufen. Vier Jahre später veranlasste ihn ein Problem zur Faktorisierung von „Gruppendeterminanten", das Richard Dedekind ihm gestellt hatte, dazu, eine Theorie von Gruppencharakteren und Darstellungen zu kreieren.[31] Die Gruppendeterminante Θ ist ein Polynom, dessen Zerlegung in (irreduzible) Faktoren in gewisser Weise die Struktur der betreffenden Gruppe wiedergibt. Frobenius untersuchte diesen Zusammenhang. Er verallgemeinerte den Dedekindschen Begriff von Gruppencharakter. Er zeigte, dass die von ihm für eine Gruppe $\mathfrak{G}$ (von endlicher Ordnung) definierten Gruppencharaktere $\psi^{(\lambda)}$ auf den Nebenklassen von $\mathfrak{G}$ konstant sind und die Orthogonalitätsrelation

$$\sum_{r\in\mathfrak{G}} \psi^{(\lambda)}(r)\overline{\psi^{(\mu)}(r)} = g\cdot\delta_{\lambda\mu}$$

erfüllen, wobei g die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{G}$ und $\delta_{\lambda\mu}$ das Kroneckerdelta ist. Er wies nach, dass die Gruppendeterminante durch die Gruppencharaktere vollständig bestimmt war, und nannte letztere deshalb schlicht Charaktere. Er zeigte, dass die Anzahl der verschiedenen Charaktere gleich der Anzahl der Nebenklassen ist. Er bezeichnete $f_{\psi^{(\lambda)}} := \psi^{(\lambda)}(1)$, wobei 1 die Identität der Gruppe ist, als „Grad" des Charakters $\psi^{(\lambda)}$ und bewies

$$g = \sum_{\lambda} f^2_{\psi^{(\lambda)}}$$

Mit diesen Mitteln berechnete er Charaktertafeln einiger Familien von Gruppen.[32]

In sich anschließenden Arbeiten stellte er seine Theorie der Charaktere in den Rahmen von Matrizen und betonte die Bedeutung dieses Schritts.[33] Er führte den Begriff „Darstellung" einer endlichen Gruppe durch Matrizen ein und entwickelte grundlegende Konzepte der Darstellungstheorie, wie beispielsweise den Grad einer Darstellung oder die Äquivalenz zweier Darstellungen. Er zeigte, wie Darstellungen und Charaktere zusammenhängen. Die Charaktere sind die Spur von „primitiven" (d. h. irreduziblen) Darstellungen

$$\psi^{(\lambda)}(r) = SpurR = \sum r_{ii},$$

---

[31] Frobenius knüpfte an Arbeiten von Gauß, Dirichlet und Dedekind zu „Charakteren" von binären quadratischen Formen an.

[32] Frobenius (1896a,b). Vgl. Hawkins (1971, 1974); Curtis (1999).

[33] Frobenius (1897, 1898, 1899).

wobei $R = (r_{ij})$ die Darstellungsmatrix von $r \in \mathfrak{G}$ in der durch den Charakter $\psi^{(\lambda)}$ bestimmten Darstellung ist. Die Zuordnung von Charakter und irreduzibler Darstellung konstruierte Frobenius über die heute als reguläre Darstellung bezeichnete Darstellung bzw. deren Zerlegung.[34] Er zeigte, dass zwei irreduzible Darstellungen genau dann äquivalent sind, wenn ihre Charaktere bzw. Spuren gleich sind.

Er bewies den **Satz über die reguläre Darstellung**: Die Anzahl von inäquivalenten irreduziblen Darstellungen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ist gleich der Anzahl der Nebenklassen von $\mathfrak{G}$. Seien $\mu_1, \ldots, \mu_k$ die irreduziblen Darstellungen der Gruppe und f_λ der Grad von μ_λ, dann tritt μ_λ genau $f_\lambda -$mal in der vollständigen Zerlegung der regulären Darstellung auf.

Damit hatte Frobenius 1897 gezeigt, dass die reguläre Darstellung in irreduzible Darstellungen zerfällt. Dies war ein Vorläufer von dem 1899 von Heinrich Maschke bewiesenen Satz, der besagt, dass jede reduzible Darstellung einer Gruppe endlicher Ordnung vollständig reduzibel ist.[35] In Verbindung mit dem Konzept der irreduziblen Darstellung ergab sich daraus das **Theorem der vollständigen Zerlegbarkeit**, also dass für jede Darstellung $\phi : \mathfrak{G} \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ einer Gruppe endlicher Ordnung eine Matrix M existiert, so dass

$$M\phi(r)M^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1(r) & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \mu_2(r) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_m(r) \end{pmatrix}$$

ist, wobei μ_i irreduzible Darstellungen sind. Burnside formulierte dies 1902 explizit (s. u.).

Ein ähnlicher Satz für hyperkomplexe Zahlen (Algebren) war auch von dem estländischen Mathematiker Theodor Molien, der u. a. bei Felix Klein studiert hatte, aufgestellt und bewiesen worden.[36] Durch Eduard Study erfuhr Frobenius von Moliens Arbeiten kurz vor der Publikation seines Artikels (Frobenius, 1897). Beim weiteren Ausbau seiner Theorie der Darstellungen wandte er sich ebenfalls Algebren zu. Er definierte eine assoziative Algebra über $\mathbb{C}$, deren Basis die Gruppenelemente sind und welche heute als Gruppenalgebra bezeichnet wird. Er erwähnte in dieser Arbeit von 1899 die Ergebnisse von Molien.[37]

Frobenius studierte darüber hinaus die Relation zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen. Er konstruierte die heute als induzierte Darstellung bekannte Darstellung und bewies den heute nach ihm benannten Reziprozitätssatz.

---

[34] Der Ausdruck reguläre Darstellung wurde von Frobenius nicht gebraucht.

[35] Maschke (1899). Maschke hatte bei F. Klein studiert und lehrte seit Anfang der 1890er Jahre in Chicago bei E. H. Moore.

[36] Molien (1893, 1897).

[37] Zur Rolle von Algebren, sowie von Maschke und Molien bei der Entstehung der Darstellungstheorie vgl. Hawkins (1972).

Schließlich gelang es Frobenius, unter Zuhilfenahme kombinatorischer Methoden das schwierige Problem der Berechnung der Charaktere der Gruppe der Permutationen S_n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ zu lösen.[38] Dies diente seinem Doktoranden Schur als Grundlage, um in seiner Doktorarbeit die polynomialen Darstellungen von $GL_n(\mathbb{C})$ zu klassifizieren (s. u.). In einer weiteren Arbeit vereinfachte Frobenius die Berechnung der Charaktere mit Hilfe von Young-Tableaus.[39] Frobenius erkannte, dass man zur vollständigen Zerlegung einer Darstellung nicht mit rationalen Zahlen auskam. Deshalb führte er zu jedem Charakter $\psi^{(\lambda)}(r)$ eine primitive charakteristische Einheit $\varepsilon^{(\lambda)}(r)$ ein. Damit ließen sich Charaktere als Summe von primitiven charakteristischen Einheiten ausdrücken. Die vollständige Ausreduktion der regulären Darstellung konnte dann mit Hilfe einer Matrix geschehen, deren Einträge dem Körper der rationalen Zahlen, an den die kg primitiven charakteristischen Einheiten adjungiert werden (k die Anzahl der Nebenklassen bzw. der inäquivalenten irreduziblen Darstellungen; g die Gruppenordnung), entnommen waren. Zur Berechnung der primitiven charakteristischen Einheiten der S_n (und damit auch zur Berechnung der Charaktere) entwickelte Frobenius sehr einfache Formeln, welche auf einem invariantentheoretischen Ansatz (Young-Tableaus) des britischen Mathematikers Alfred Young beruhten. Dabei dienten die Zerlegungen von n in eine Summe von natürlichen Zahlen α_i

$$n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \qquad \text{mit } \alpha_i \geq \alpha_{i+1}$$

zur Charakterisierung der Nebenklassen und damit auch der Charaktere bzw. der irreduziblen Darstellungen von S_n.[40] Weyl übertrug mehr als 20 Jahre später diese Konstruktion auf Liegruppen. Diese Erweiterung war, wie Hawkins überzeugend argumentiert, damals außerhalb der Forschungsfragen von Frobenius.

1.1.2 Burnside

Etwa zur gleichen Zeit wie Frobenius forschte der britische Mathematiker William Burnside zu Gruppen endlicher Ordnung. Burnside hatte in Cambridge studiert und lehrte seit 1885 als Professor am Royal Navel College in Greenwich. Im Anschluss an Arbeiten zur Hydrodynamik und elliptischen Funktionen wandte er sich der Gruppentheorie zu, wobei er auch kontinuierliche Gruppen betrachtete. 1897 publizierte er die erste englischsprachige Monographie über die Theorie der Gruppen endlicher Ordnung.[41] Darin äußerte er sich noch zurückhaltend über den Nutzen von Matrizen. Burnside kannte die wichtigsten Arbeiten von Lie, Study, Killing und É. Cartan zur Lieschen Theorie der Transformationsgruppen und sah eine Möglichkeit, Frobenius' Arbeiten zu Gruppen endlicher Ordnung dort einzubringen. In drei

[38] Frobenius (1900). Vgl. Curtis (1999, Abschn. II.5).

[39] Frobenius (1903).

[40] Frobenius (1903, §10). Vgl. Hawkins (2000, S. 381 f.).

[41] Burnside (1897).