

Dario Graffi (Ed.)

Propagazione delle onde elettromagnetiche

Varenna, Italy 1956



 Springer

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

Dario Graffi (Ed.)

Propagazione delle onde elettromagnetiche

Lectures given at the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Varenna (Como), Italy,
August 24-September 1, 1956

 Springer



FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica “U. Dini”
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-10915-7 e-ISBN: 978-3-642-10917-1
DOI:10.1007/978-3-642-10917-1
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

©Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011
Reprint of the 1st Ed. C.I.M.E., Florence, 1956.
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C.I.M.E)

Reprint of the 1st ed.- Varenna, Italy, August 24-September 1, 1956

PROPAGAZIONE DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE

G. Toraldo Di Francia:	Lezioni sulla teoria della diffrazione elettromagnetica	1
C.J. Bouwkamp:	Theorie des multipoles, de l'antenne et de la diffraction des ondes.....	61
G. Eckart:	Sur le fading des ondes ultracourtes et son analyse	143
C. Agostinelli:	Sulla teoria delle guide d'onda.....	183
D. Graffi:	Guide d'onda con dielettrico eterogeneo.....	213

G. TORALDO DI FRANZIA

LEZIONI SULLA TEORIA

DELLA DIFFRAZIONE ELETTROMAGNETICA

Roma, Istituto Matematico dell'Università, 1957

I N D I C E

- I. Generalità
- II. Discussione introduttiva sulla teoria di Kirchhoff.
- III. Le formule di Larmor-Tedone.
- IV. Le soluzioni di Sommerfeld.
- V. Equazioni integrodifferenziali della diffrazione elettromagnetica e principio di Babinet.
- VI. Sezioni efficaci.
- VII. Metodo variazionale di Levine e Schwinger.
- VIII. Gli Schermi a conduttività unidirezionale.

LEZIONI SULLA TEORIA DELLA DIFFRAZIONE ELETTROMAGNETICA

I. Generalità -

§ 1. Le presenti lezioni non possono in alcun modo essere considerate come una trattazione esauriente della teoria della diffrazione elettromagnetica. Questo soggetto è oggi vastissimo e la copiosa letteratura che lo riguarda aumenta con ritmo molto rapido.

Ci si limiterà a lumeggiare alcuni argomenti di particolare interesse e attualità. E si tenterà di fornire una trattazione, per quanto possibile, complementare di quella fatta da Bouwkamp in questo stesso corso.

Verrà fatto via via riferimento alla bibliografia essenziale. Tuttavia è doveroso premettere in via generale che nella compilazione di queste lezioni l'autore ha largamente sfruttato il volume: B.B. PALMER e D.F. COLESON, Mathematical Theory of Huygens' Principle (Oxford, 1950), e le due monografie di C.J. BOUWKAMP: Diffraction Theory, a Critique of Some Recent Developments (New York Univ., Math. Res. Group, Rep. No. EM-50) e Diffraction Theory, Rep. Progr. Phys., 17, 35 (1954).

Come opera di riferimento adotteremo il volume dell'autore: On=
la elettromagnetica (Bologna, 1953), che verrà indicato brevemente con OEM. Le notazioni saranno quelle di OEM. In particolare, verrà fatto uso delle unità di misura del sistema Giorgi razionalizzato.

Si occuperemo esclusivamente di fenomeni monocromatici o stationari. Si avverte una volta per tutte che le grandezze (scalari o vettoriali) che caratterizzano i campi, salvo non sia detto il contrario, sono ampiezze complesse (OEM, p.109 e segg.). Si sottintenderà il fattore temporale $\exp(-i\omega t)$. Si noti che, poichè in OEM tale fattore è invece $\exp(i\omega t)$, tutte le volte che utilizzeremo le formule di OEM, dovremo cambiare i in -i.

II. Discussione introduttiva sulla teoria di Kirchhoff -

§ 2. Quantunque il campo elettromagnetico sia caratterizzato da vettori, è opportuno richiamare alcune nozioni sulla teoria della diffrazione scalare. Ciò si fa per più ragioni. Prima di tutto la teoria

scalare è ottima introduzione ai più complicati sviluppi della teoria vettoriale. In secondo luogo la teoria scalare costituisce un'approssimazione molto soddisfacente in alcune regioni spettrali (ottica). Infine vi sono alcuni problemi (bidimensionali) in cui il problema elettromagnetico si riduce rigorosamente a un problema scalare.

A parte gli ostacoli che provocano la diffrazione, supporremo sempre che il mezzo nel quale avviene la propagazione sia lo spazio vuoto. Il campo scalare $f(P)$, nelle regioni prive di sorgenti, soddisfa l'equazione delle onde

$$(II-1) \quad \nabla^2 f + k^2 f = 0$$

Consideriamo poi la funzione $G(P, Q)$ così definita

$$(II-2) \quad G(P, Q) = \frac{\exp(i k |P-Q|)}{4 \pi |P-Q|}$$

Questa funzione soddisfa l'equazione simbolica (OEM, p. 201)

$$(II-3) \quad \nabla_Q^2 G(P, Q) + k^2 G(P, Q) = -\delta(Q-P)$$

dove $\delta(Q-P)$ è la funzione di Dirac nello spazio.

Detto V un volume tutto al finito, racchiuso dalla superficie Σ (normale esterna \underline{n}) e contenente il punto P , si ha, applicando la formula di Green e valendosi delle (II-1,3)

$$(II-4) \quad \iint_{\Sigma} \left[G(P, Q) \frac{\partial f(Q)}{\partial n} - f(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \right] d\Sigma_Q =$$

$$= \iiint_V \left[G(P, Q) \nabla_Q^2 f(Q) - f(Q) \nabla_Q^2 G(P, Q) \right] dV_Q =$$

$$= \iiint_V \left[G(\nabla_Q^2 f + k^2 f) - f(\nabla_Q^2 G + k^2 G) \right] dV_Q = f(P).$$

Se invece P è esterno a V , si ottiene un risultato nullo. La (II-4) è la formula di Helmholtz [Journ. f. Math., 57, 7 (1859)], che permette di esprimere il valore di f in un punto interno a V mediante i valori di f o di $\partial f / \partial n$ al contorno.

E' chiaro che per la validità della (II-4) è sufficiente che f sia continua insieme con le sue derivate prima e seconda in tutto V e su Σ .

Ma nulla si può dire se f presenta delle discontinuità. In ogni caso poi va escluso che vi siano sorgenti nel volume V , altrimenti non vale la (II-1).

§ 3. Occupiamoci ora dell'espressione del campo in un punto P esterno a Σ , togliendo la restrizione che f sia regolare all'interno di Σ . In generale, al di fuori di Σ saranno distribuite delle sorgenti e bisogna specificarne la natura. Ammettiamo, per semplicità, che si tratti di una sorgente puntiforme, collocata nel punto S . Essa emetta un'onda sferica che in un generico punto Q ha la forma

$$\exp(iK|Q-S|)/|Q-S|.$$

Applichiamo la (II-4) al volume delimitato esternamente dalla superficie sferica Σ_1 di centro P (Fig.1), il cui raggio faremo ten-

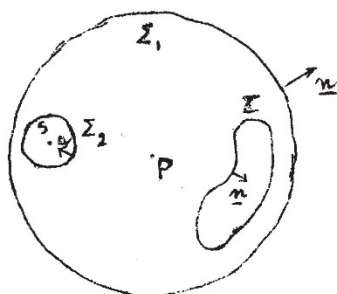


Fig.1

dere all'infinito, e internamente dalla superficie Σ e dalla sferetta Σ_2 con centro in S , il cui raggio faremo tendere a zero. Poichè $G(P;Q)$ è regolare per $Q = S$, mentre f presenta in S la sola singolarità dovuta alla sorgente, ci si convince con facili considerazioni che l'integrale superficiale della (II-4) esteso alla superficie Σ_2 , quando il raggio della sferetta tende a zero, dà semplicemente $\exp(iK|P-S|)/|P-S|$, cioè l'onda sferica generata dalla sorgente. Chiameremo quest'onda incidente e la indicheremo con f^i . Avremo dunque per la (II-4)

$$(II-5) \quad f(P) = f^i(P) + \iint_{\Sigma} \left[G \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial G}{\partial n} \right] d\Sigma_Q$$

dove è sottinteso che G dipenda da P e Q e f dipenda da Q . Ora, se indichiamo con r il raggio della sfera Σ_1 , si avrà per la (II-2)

$$(II-6) \quad \iint_{\Sigma} \left[G \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial G}{\partial n} \right] d\Sigma_a = \frac{\exp(iKr)}{4\pi r} \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial f}{\partial a} - ikf + \frac{f}{r} \right] r^2 d\Omega$$

dove $d\Omega$ rappresenta l'elemento di angolo solido sotto cui da P si vede $d\Sigma_Q$ e le altre notazioni sono evidenti. Condizioni sufficienti affinché l'integrale al secondo membro si annulli per $r \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$(II-7) \quad f \rightarrow 0, \quad r \left[\frac{\partial f}{\partial r} - ikf \right] \rightarrow 0$$

uniformemente per $r \rightarrow \infty$. Queste condizioni sono rispettivamente la condizione di finitezza e la condizione di radiazione di Sommerfeld [Jahresb. Deut. Math. Ver., 21, 309; 326 (1912)]. La seconda assicura in sostanza che il campo all'infinito si comporti come un'onda sferica divergente, anzichè convergente (cfr. anche OEM, p.92).

In definitiva, se valgono le (II-7), la (II-5) diviene

$$(II-8) \quad f(P) = f^i(P) + \iint_{\Sigma} \left[G \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial G}{\partial n} \right] d\Sigma_Q$$

dove, si badi bene, \underline{n} è la normale rivolta verso l'interno di Σ (Fig.1).

E' evidente, per il modo in cui l'abbiamo dedotta, che la (II-8) vale anche se vi sono più sorgenti puntiformi e f^i rappresenta il campo da esse generato. Al limite si potrà anche avere una distribuzione continua di sorgenti, o una sorgente puntiforme all'infinito (onda piana).

§ 4. Fin qui ci siamo attenuti a considerazioni puramente matematiche e rigorose. Passiamo all'applicazione fisica.

La (II-8) viene di solito applicata al caso in cui Σ sia la superficie di un corpo materiale (ostacolo), posto sul cammino della radiazione. La (II-8) permetterebbe di risolvere immediatamente il problema, qualora si conoscessero i valori di f o di $\partial f / \partial n$ su Σ .

Ma questo, di solito, non avviene.

Si può usare con Kirchhoff [Vorlesungen über math. Physik, 2. (Leipzig, 1894)] un criterio approssimato per la scelta dei valori al contorno, nel caso che Σ sia la superficie di un corpo opaco non riflettente. Egli ammise che f e $\partial f / \partial n$ fossero uguali rispet-

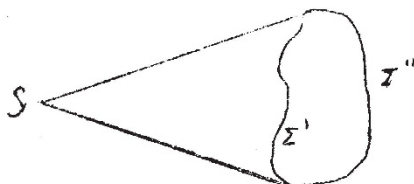


Fig.2

tivamente a f^i e a $\partial f^i / \partial n$ sulla parte illuminata Σ' di Σ (Fig.2) e che fossero identicamente zero sulla parte oscura Σ'' .

Con questa ammissione la (II-8) si scrive

$$(II-9) \quad f(P) = f^i(P) + \iint_{\Sigma'} \left[G \frac{\partial f^i}{\partial n} - f^i \frac{\partial G}{\partial n} \right] d\Sigma_Q.$$

In pratica questa formula approssimata dà ottimi risultati quando il corpo diffrangente è molto grande rispetto alla lunghezza d'onda.

§ 5. Nel seguito ci occuperemo quasi esclusivamente del caso in cui il corpo diffrangente è rappresentato da uno schermo piano Σ , infinitamente sottile.

Riferendoci agli assi cartesiani x, y, z di vettori $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$, stabiliremo una volta per tutte che lo schermo giaccia sul piano xy e che le sorgenti si trovino nel semispazio $z < 0$. La faccia illuminata di Σ sarà allora $z = 0$ e nella (II-9) avremo $\underline{n} = \underline{k}$.

Si ottiene così

$$(II-10) \quad f(P) = f^i(P) + \iint_{\Sigma} \left[G(P, Q) \frac{\partial f^i(Q)}{\partial z_Q} - f^i(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial z_Q} \right] d\Sigma_Q$$

Diremo complementare del caso fin qui considerato quello in cui Σ rappresenta un'apertura in uno schermo Σ' che occupa tutto il resto del piano xy . Applicando la (II-10) avremo in questo caso

$$(II-11) \quad f(P) = f^i(P) + \iint_{\Sigma} \left[G \frac{\partial f^i}{\partial z_Q} - f^i \frac{\partial G}{\partial z_Q} \right] d\Sigma_Q =$$

$$= f^i(P) + \left\{ \left\{ \int_{\Sigma+\Sigma'} - \int_{\Sigma} \right\} \left[G \frac{\partial f^i}{\partial z_q} - f^i \frac{\partial G}{\partial z_q} \right] d\Sigma_q \right.$$

Ora $\Sigma+\Sigma'$ non è altro che l'intero piano xy e, completato con una semisfera di raggio infinito [che per le (II-7) dà contributo nullo], rappresenta una superficie chiusa, al di dentro della quale f è regolare. Allora ricordando quanto detto al § 2 e notando che \underline{k} è qui normale interna, si ha che l'integrale esteso a $\Sigma+\Sigma'$ nella (II-11) è eguale a $-f^i(P)$ per $z_p > 0$ ed è nullo per $z_p < 0$.

Pertanto avremo

$$(II-12) \quad f(P) = - \int_{\Sigma} \left[G(P, Q) \frac{\partial f^i(Q)}{\partial z_q} - f^i(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial z_q} \right] d\Sigma_q$$

per $z_p > 0$, e

$$(II-13) \quad f(P) = f^i(P) - \int_{\Sigma} \left[G(P, Q) \frac{\partial f^i(Q)}{\partial z_q} - f^i(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial z_q} \right] d\Sigma_q$$

per $z_p < 0$.

Confrontando le (II-10) e (II-12) si vede che per $z > 0$, a prescindere dal campo incidente, i campi diffritti dallo schermo e dall'apertura complementare sono sostanzialmente eguali (dato che il segno non influisce sull'intensità). E' questo il principio di Babinet per la diffrazione scalare.

§ 6. Al metodo di Kirchoff si possono muovere serie obiezioni di carattere matematico.

Prima di tutto, abbiamo già notato che, per applicare correttamente la formula di Green, la f dovrebbe essere regolare anche su Σ . Invece, nel metodo di Kirchoff tanto f che $\partial f / \partial n$ subiscono una discontinuità al limite fra la zona illuminata e quella oscura di Σ .

Si può mostrare che il metodo di Kirchoff è incongruente dal punto di vista matematico, in quanto che, quando P tende a divenire un punto del piano xy , i valori limite che si ottengono sono, in generale, diversi dai valori al contorno originariamente assegnati. Infatti, si consideri l'integrale

$$(III-14) \quad - \int_{\Sigma} f^i(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial z_q} d\Sigma_q = \int_{\Sigma} f^i(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial z_p} d\Sigma_q$$

che compare nella (II-10) [per il passaggio dal primo al secondo membro cfr. OEM, formula (M2,41)]. Nel secondo membro si può invertire l'integrazione con la derivazione, ottenendosi con uno sviluppo in serie di $G(P, Q)$

$$(II-15) \quad \frac{\partial}{\partial z_P} \iint_{\Sigma} \frac{f^i(Q)}{4\pi|P-Q|} d\Sigma_Q + \frac{\partial}{\partial z_P} \iint_{\Sigma} \frac{ik}{4\pi} f^i(Q) d\Sigma_Q - \\ - \frac{\partial}{\partial z_P} \iint_{\Sigma} \frac{k^2}{8\pi} f^i(Q)|P-Q| d\Sigma_Q + \dots$$

Si faccia ora tendere z_P a zero. Tutti i termini dopo il primo hanno limite nullo. Quanto al primo termine, il suo limite risulta subito dalla nota teoria del potenziale di strato semplice (cfr. FERRICCO, Fisica Matematica (Bologna, 1941) p.93). Precisamente, quando P tende a divenire un punto dello schermo Σ , il limite vale $-f^i(P)/2$ per $z_P \rightarrow +0$, e $+f^i(P)/2$ per $z_P \rightarrow -0$. Tenendo allora conto delle (II-14, 15), si ha dalla (II-10)

$$(II-16) \quad f(P) = \frac{1}{2} f^i(P) + \iint_{\Sigma} G(P, Q) \frac{\partial f^i(Q)}{\partial z_Q} d\Sigma_Q \quad \text{per } z_P \rightarrow +0,$$

$$(II-17) \quad f(P) = \frac{3}{2} f^i(P) + \iint_{\Sigma} G(P, Q) \frac{\partial f^i(Q)}{\partial z_Q} d\Sigma_Q \quad \text{per } z_P \rightarrow -0.$$

Poichè si era stabilito come valore al contorno $f(P) = 0$ per $z_P \rightarrow +0$, e $f(P) = f^i(P)$ per $z_P \rightarrow -0$, dalle (II-16, 17) seguirebbe identicamente

$$(II-18) \quad \frac{1}{2} f^i(P) + \iint_{\Sigma} G(P, Q) \frac{\partial f^i(Q)}{\partial z_Q} d\Sigma_Q = 0$$

quando P è un punto dello schermo. Ma questa condizione è assurda, perchè ha forma arbitraria; essa dovrebbe continuare a valere anche se a Σ si togliesse una qualsiasi porzione finita non contenente P . Pertanto l'integrale della (II-18) esteso a questa porzione dovrebbe essere sempre nullo, il che impone identicamente $\partial f^i / \partial z = 0$ sullo schermo. E ciò, in generale, non può essere.

In modo analogo ci possiamo occupare del valore al contorno di $\partial f / \partial n$. Dalla (II-10) si ha facilmente

$$(II-19) \quad \frac{\partial f(P)}{\partial z_P} = \frac{\partial f^i(P)}{\partial z_P} + \frac{\partial}{\partial z_P} \iint_{\Sigma} G \frac{\partial f^i}{\partial z_Q} d\Sigma_Q + \frac{\partial^2}{\partial z_P^2} \iint_{\Sigma} f^i G d\Sigma_Q$$

Il secondo termine al secondo membro ha la forma già discussa con le (II, 14, 15) ed ha per limite $\mp \partial f^i / \partial z$ per $z_P \rightarrow \pm 0$. Il terzo termine, poichè l'integrale è evidentemente una soluzione dell'equazione delle onde (II-1), può essere espresso mediante derivate rispetto a x e a y (eliminando quelle rispetto a z). E poichè il potenziale di strato semplice e le sue derivate tangenziali sono continui attraverso lo strato (cfr. PERSICO, l.c.), si avrà dalla (II-19):

$$(II-20) \quad \frac{\partial f(P)}{\partial z_P} = \frac{1}{2} \frac{\partial f^i(P)}{\partial z_P} - \left[\frac{\partial^2}{\partial x_P^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_P^2} + k^2 \right] \iint_{\Sigma} f^i(Q) G(P, Q) d\Sigma_Q$$

per $z \rightarrow +0$, e

$$(II-21) \quad \frac{\partial f(P)}{\partial z_P} = \frac{3}{2} \frac{\partial f^i(P)}{\partial z_P} - \left[\frac{\partial^2}{\partial x_P^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_P^2} + k^2 \right] \iint_{\Sigma} f^i(Q) G(P, Q) d\Sigma_Q$$

per $z_P \rightarrow -0$. Poichè avevamo imposto $\partial f / \partial z = \partial f^i / \partial z$ per $z_P \rightarrow -0$, e $\partial f / \partial z = 0$ per $z_P \rightarrow +0$, si dovrebbe avere identicamente

$$(II-22) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f^i(P)}{\partial z_P} - \left[\frac{\partial^2}{\partial x_P^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_P^2} + k^2 \right] \iint_{\Sigma} f^i(Q) G(P, Q) d\Sigma_Q = 0$$

il che è assurdo, data l'arbitrarietà di Σ .

§ 7. Dunque, abbiamo dimostrato che la teoria di Kirchhoff non fornisce la soluzione di un problema di valori al contorno. Tuttavia essa è suscettibile di un'altra interpretazione, che è rigorosa dal punto di vista matematico e che fu data da Kottler [Ann. der Phys., 70, 405 (1923)]. Secondo Kottler la (II-10) non risolve un problema di valori al contorno, ma un problema di salto. Precisamente la (II-10) rappresenta una funzione che soddisfa l'equazione delle onde (II-1) e le condizioni di finitezza e radiazione (II-7) all'infinito, è regolare ovunque tranne che sulle sorgenti prescritte e su Σ ; al passaggio attraverso Σ la funzione stessa e la sua derivata rispetto a z sono discontinue; l'entità del salto è assegnata ed è indicata rispettivamente con $f^i(Q)$ e $\partial f^i(Q) / \partial z_Q$ nell'integrale (II-10). La verità di questa affermazione è stata dimostrata al paragrafo precedente.

Tutto ciò è rigoroso. Ma quale interpretazione fisica si può dare alla soluzione di questo singolare problema? Kottler ha suggerito

che si tratti della soluzione della diffrazione da parte di uno schermo nero. Precisamente uno schermo nero infinitamente sottile sarebbe, per definizione, proprio quello che provoca le dette discontinuità nella funzione del campo. Tuttavia questa definizione è piuttosto gratuita e non soddisfa molto. Alcuni studiosi pensano addirittura che uno schermo nero infinitamente sottile sia un assurdo dal punto di vista fisico.

III. Le formule di Larmor-Tedone.

§ 9. Passiamo ora alla teoria vettoriale della diffrazione elettromagnetica. Ad essa si possono dare varie forme, fra le quali è molto istruttiva quella dovuta a Larmor [Proc.Lond.Math. Soc., 1, 1 (1903)] e a Tedone [Rend.Linc., 26, 286 (1917)].

Proponiamoci di trovare l'analogo vettoriale della formula (II-4). Si abbia una superficie chiusa Σ , di normale esterna \underline{n} , attorno al volume V . Il campo elettromagnetico $\underline{E}(P)$, $\underline{H}(P)$ sia continuo insieme con le sue derivate prime nel volume V (compreso il contorno Σ), dove soddisfa le equazioni di Maxwell (OEM, p.151)

$$(III-1) \quad \text{rot } \underline{H} = - \frac{i k}{Z} \underline{E}$$

$$(III-2) \quad \text{rot } \underline{E} = i k Z \underline{H}$$

essendo Z l'impedenza intrinseca dello spazio. Naturalmente da queste equazioni consegue

$$(III-3) \quad \text{div } \underline{E} = 0$$

$$(III-4) \quad \text{div } \underline{H} = 0$$

Si vuole costruire un'integrale di superficie dipendente dal punto P , che rappresenti $\underline{E}(P)$ se P è interno a Σ , e zero se P è esterno. E altrettanto per $\underline{H}(P)$.

Il campo da rappresentare vale dunque $\underline{E}(P)$, $\underline{H}(P)$ all'interno di Σ e zero al di fuori. Esso presenta una discontinuità attraverso a Σ e il salto in un punto Q di Σ vale proprio $\underline{E}(Q)$, $\underline{H}(Q)$. Viene subi

to in mente che una discontinuità di questo genere può essere generata da opportune correnti e cariche superficiali distribuite su Σ . Precisamente, se con \underline{I} e σ indichiamo rispettivamente la densità di corrente elettrica e la densità di carica elettrica superficiali, le discontinuità volute per il campo magnetico tangenziale e per il campo elettrico normale si avranno se

$$(III-5) \quad \underline{I} = \underline{H}(Q) \wedge \underline{n}$$

$$(III-6) \quad \sigma = - \epsilon \underline{E}(Q) \cdot \underline{n}$$

(cfr. OEM, p. 72) essendo ϵ la costante dielettrica dello spazio.

Similmente, dette \underline{K} e τ le densità di corrente e di carica magnetiche, si avrà osservando il diverso senso di circolazione delle due equazioni di Maxwell

$$(III-7) \quad \underline{K} = - \underline{E}(Q) \wedge \underline{n}$$

$$(III-8) \quad \tau = - \mu \underline{H}(Q) \cdot \underline{n}$$

Si noti che le cariche e le correnti superficiali così definite soddisfano l'equazione di continuità. Per esempio, per quelle elettriche deve aversi

$$(III-9) \quad \text{div } \underline{I} - i\omega\sigma = 0$$

dove la divergenza va presa nello spazio bidimensionale Σ (ovvero, sul piano tangente). Sostituendo nella (III-9) le espressioni (III-5, 6) e notando che, come si prova subito, è $\text{div } (\underline{H} \wedge \underline{n}) = \underline{n} \cdot \text{rot } \underline{H}$, si ha

$$(III-10) \quad \underline{n} \cdot \text{rot } \underline{H} + i\omega\epsilon \underline{E} \cdot \underline{n} = 0$$

Sostituendo $\text{rot } \underline{H}$ con la (III-1) e notando che $k/\omega = \omega\epsilon$, si trova un'identità.

§ 9. Introduciamo ora il potenziale vettore \underline{A} e il potenziale scalare φ , dai quali i vettori del campo si deducono con le equazioni

$$(III-11) \quad \underline{H} = \text{rot } \underline{A}$$

$$(III-12) \quad \underline{E} = - \text{grad } \varphi + i\omega \underline{N} \underline{A}$$

Si noti che la definizione di \underline{A} è diversa da quella data in OBM (si è diviso per μ). Dette ρ e \underline{J} le densità spaziali di carica e di corrente elettrica, i potenziali obbediscono alle equazioni

$$(III-13) \quad \nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = - \underline{J}$$

$$(III-14) \quad \nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = - \frac{1}{\epsilon} \rho$$

$$(III-15) \quad \text{div } \underline{A} - \frac{ik}{Z} \varphi = 0$$

come si può verificare sostituendo le (III-11,12) nelle equazioni di Maxwell e imponendo la (III-15).

Dalla corrente (III-5) e dalla carica (III-6) si dedurranno i potenziali con

$$(III-16) \quad \underline{A}(P) = \iint_{\Sigma} \underline{J}(Q) G(P,Q) d\Sigma_Q = \iint_{\Sigma} G(P,Q) \underline{H}(Q) \wedge \underline{n} d\Sigma_Q$$

$$(III-17) \quad \varphi(P) = \frac{1}{\epsilon} \iint_{\Sigma} \rho(Q) G(P,Q) d\Sigma_Q = - \iint_{\Sigma} G(P,Q) \underline{E}(Q) \cdot \underline{n} d\Sigma_Q$$

dove $G(P,Q)$ è definito dalla (II-2). Allora, mediante le (III-11,12), si trova che la carica e la corrente elettrica danno luogo a un campo \underline{E}^e , \underline{H}^e espresso da

$$(III-18) \quad \underline{E}^e(P) = \text{grad}_P \iint_{\Sigma} G(P,Q) \underline{E}(Q) \cdot \underline{n} d\Sigma_Q + ikZ \iint_{\Sigma} G(P,Q) \underline{H}(Q) \wedge \underline{n} d\Sigma_Q$$

$$(III-19) \quad \underline{H}^e(P) = \text{rot}_P \iint_{\Sigma} G(P,Q) \underline{H}(Q) \wedge \underline{n} d\Sigma_Q.$$

Similmente potremo definire un potenziale vettore \underline{B} e un potenziale scalare ψ magnetici, dai quali il campo si calcola con

$$(III-20) \quad \underline{E} = - \text{rot } \underline{B}$$

$$(III-21) \quad \underline{H} = - \text{grad } \psi + \frac{ik}{Z} \underline{B}$$

Dettono ρ e \underline{L} le densità spaziali di carica e di corrente magnetica, i potenziali obbediranno alle equazioni

$$(III-22) \quad \nabla^2 \underline{B} + k^2 \underline{B} = - \underline{L}$$

$$(III-23) \quad \nabla^2 \psi + k^2 \psi = - \frac{1}{\mu} \rho$$

$$(III-24) \quad \text{div } \underline{B} - ikZ \psi = 0$$

che si verificano sostituendo le (III-20,21) nelle equazioni di Maxwell e imponendo la (III-24).

Dalla corrente (III-7) e dalla carica (III-8) si dedurranno i potenziali con

$$(III-25) \quad \underline{E}(P) = \iint_{\Sigma} \underline{E}(Q) G(P,Q) d\Sigma_Q = - \iint_{\Sigma} G(P,Q) \underline{E}(Q) \wedge \underline{n} d\Sigma_Q$$

$$(III-26) \quad \underline{\psi}(P) := \frac{1}{\kappa} \iint_{\Sigma} \underline{r}(Q) G(P,Q) d\Sigma_Q = - \iint_{\Sigma} G(P,Q) \underline{H}(Q) \cdot \underline{n} d\Sigma_Q$$

Da questi, per le (III-20,21), deriva un campo \underline{E}^m , \underline{H}^m dato da

$$(III-27) \quad \underline{E}^m(P) = \text{rot}_P \iint_{\Sigma} G(P,Q) \underline{E}(Q) \wedge \underline{n} d\Sigma_Q$$

$$(III-28) \quad \underline{H}^m(P) = \text{grad}_P \iint_{\Sigma} G(P,Q) \underline{E}(Q) \cdot \underline{n} d\Sigma_Q - \frac{ikZ}{Z} \iint_{\Sigma} G(P,Q) \underline{E}(Q) \wedge \underline{n} d\Sigma_Q$$

In definitiva, il campo totale sarà la somma di quelli prodotti dagli elementi elettrici e dagli elementi magnetici

$$(III-29) \quad \underline{E}(P) = \text{grad}_P \iint_{\Sigma} G(P,Q) \underline{E}(Q) \cdot \underline{n} d\Sigma_Q + ikZ \iint_{\Sigma} G(P,Q) \underline{H}(Q) \wedge \underline{n} d\Sigma_Q + \text{rot}_P \iint_{\Sigma} G(P,Q) \underline{E}(Q) \wedge \underline{n} d\Sigma_Q$$

$$(III-30) \quad \underline{H}(P) = \text{grad}_P \iint_{\Sigma} G(P,Q) \underline{H}(Q) \cdot \underline{n} d\Sigma_Q - \frac{ikZ}{Z} \iint_{\Sigma} G(P,Q) \underline{E}(Q) \wedge \underline{n} d\Sigma_Q + \text{rot}_P \iint_{\Sigma} G(P,Q) \underline{H}(Q) \wedge \underline{n} d\Sigma_Q$$

Queste sono le formule di Larmor - Fedone. Per ora sappiamo solo che esse garantiscono le volute discontinuità del campo attraverso a Σ . Ma ora proveremo che, effettivamente, il campo è quello voluto all'intorno di Σ ed è nullo all'esterno.

§ 10. Per la dimostrazione basterà riferirsi alla (III-29), della quale esamineremo successivamente i tre integrali. Per il primo si ha

$$(III-31) \quad \iint_{\Sigma} G(P,Q) \underline{E}(Q) \cdot \underline{n} d\Sigma_Q = \iiint_V \text{div}_Q(G\underline{E}) dV_Q = \iiint_V (G \text{div}_Q \underline{E} + \underline{E} \cdot \text{grad}_Q G) dV_Q = - \iiint_V \underline{E} \cdot \text{grad}_P G dV_Q = - \iiint_V \text{div}_P(G\underline{E}) dV_Q = - \text{div}_P \iiint_V G\underline{E} dV_Q$$

dove si è fatto uso della (III-3). Il secondo integrale della (III-29) può così trasformarsi

$$\begin{aligned}
 \text{(III-32)} \quad & \iint_{\Sigma} G(P, Q) \underline{H}(Q) \wedge \underline{n} \, d\Sigma_Q = - \iiint_V \text{rot}_Q(G\underline{H}) \, dV_Q = \\
 & = - \iiint_V (G \text{rot}_Q \underline{H} + \text{grad}_Q G \wedge \underline{H}) \, dV_Q = \\
 & = \frac{ik}{k} \iiint_V (G\underline{E}) \, dV_Q + \text{rot}_P \iiint_V (G\underline{H}) \, dV_Q
 \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della (III-1). Infine il terzo integrale della (III-29) può subire una trasformazione analoga alla (III-32) e si ottiene, usando la (III-2),

$$\begin{aligned}
 \text{(III-33)} \quad & \iint_{\Sigma} G(P, Q) \underline{E}(Q) \wedge \underline{n} \, d\Sigma_Q = \\
 & = - ikZ \iiint_V (G\underline{H}) \, dV_Q + \text{rot}_P \iiint_V (G\underline{E}) \, dV_Q
 \end{aligned}$$

In conclusione, sostituendo le (III-31, 32, 33) nella (III-29) si ottiene

$$\begin{aligned}
 \text{(III-34)} \quad \underline{E}(P) & = (-\text{grad}_P \text{div}_P + k^2 + \text{rot}_P \text{rot}_P) \iiint_V G(P, Q) \underline{E}(Q) \, dV_Q = \\
 & = - (\nabla_P^2 + k^2) \iiint_V G(P, Q) \underline{E}(Q) \, dV_Q
 \end{aligned}$$

Da, in virtù della (II-3), si vede che si ottiene proprio $\underline{E}(P)$ o $\underline{H}(P)$, a seconda che P è interno o esterno a Σ .

§ 11. Le (III-29, 30) sono equivalenti alle formule di Stratton e Chu [Phys. Rev., 56, 99; 56, 316 (1939)], che si deducono nel modo seguente.

Sia \underline{a} un vettore costante qualsiasi e si consideri l'identità [OEM, formula (M1, 37)]

$$\begin{aligned}
 \text{(III-35)} \quad & \iiint_V [G(P, Q) \underline{a} \cdot \text{rot}_Q \text{rot}_Q \underline{E}(Q) - \underline{E}(Q) \cdot \text{rot}_Q \text{rot}_Q G(P, Q) \underline{a}] \, dV_Q = \\
 & = \iint_{\Sigma} [\underline{E}(Q) \wedge \text{rot}_Q G(P, Q) \underline{a} - G(P, Q) \underline{a} \wedge \text{rot}_Q \underline{E}(Q)] \cdot \underline{n} \, d\Sigma_Q
 \end{aligned}$$

Ora, ricordando la (II-3) e OEM (M1, 26) si ha

$$\begin{aligned}
 \text{(III-36)} \quad & \text{rot}_Q \text{rot}_Q (G\underline{a}) = \text{grad}_Q \text{div}_Q (G\underline{a}) - \nabla_Q^2 G\underline{a} = \\
 & = \text{grad}_Q (\underline{a} \cdot \text{grad}_Q G) + \underline{a} \delta(Q-P) + k^2 \underline{a} G = \\
 & = \underline{a} \cdot \text{grad}_Q \text{grad}_Q G + \underline{a} \delta(Q-P) + k^2 \underline{a} G
 \end{aligned}$$

D'altra parte, poiché $\text{grad grad } G$ è tensore simmetrico e $\text{div}_Q \underline{E} =$

= 0, ricordando la formula [OFM (M2, 32)]

$$(III-37) \quad \text{div}(\underline{u} \underline{v}) = \underline{u} \text{ div } \underline{v} + (\text{grad } \underline{u}) \cdot \underline{v}$$

si trova

$$(III-38) \quad \underline{E} \cdot \underline{a} \cdot \text{grad}_Q \text{grad}_Q G = \underline{a} \cdot (\text{grad}_Q \text{grad}_Q G) \cdot \underline{E} = \underline{a} \cdot \text{div}_Q [(\text{grad}_Q G) \underline{E}]$$

Da questa e dalla (III-36) si ha

$$(III-39) \quad \underline{E} \cdot \text{rot}_Q \text{rot}_Q (G \underline{a}) = \underline{a} \cdot \text{div}_Q [(\text{grad}_Q G) \underline{E}] + \underline{a} \cdot \underline{E} \delta(Q-P) + \underline{a} \cdot k^2 G \underline{E}$$

Infine, in virtù delle (III-1,2), si ha

$$(III-40) \quad \text{rot}_Q \text{rot}_Q \underline{E} = k^2 \underline{E}$$

Sostituendo le (III-39, 40) e la (III-2) nella (III-35), si ottiene per il teorema della divergenza

$$(III-41) \quad \begin{aligned} & - \underline{a} \cdot \iint_{\Sigma} \underline{E} \cdot \underline{n} \text{grad}_Q G \, d\Sigma_Q - \underline{a} \cdot \underline{E}(P) = \\ & = \iint_{\Sigma} [\underline{E} \wedge (\text{grad}_Q G \wedge \underline{a}) - ikZ G \underline{a} \wedge \underline{E}] \cdot \underline{n} \, d\Sigma_Q = \\ & = \underline{a} \cdot \iint_{\Sigma} [(\underline{n} \wedge \underline{E}) \wedge \text{grad}_Q G - ikZ G \underline{H} \wedge \underline{n}] \, d\Sigma_Q \end{aligned}$$

Ma, poichè \underline{a} è un vettore arbitrario, si ottiene subito

$$(III-42) \quad \underline{E}(P) = - \iint_{\Sigma} [\underline{n} \cdot \underline{E} \text{grad}_Q G + (\underline{n} \wedge \underline{E}) \wedge \text{grad}_Q G + ikZ G \underline{n} \wedge \underline{H}] \, d\Sigma_Q$$

Si constata facilmente che questa equazione è equivalente alle (III-39).

Con procedimento analogo si trova per il campo magnetico

$$(III-43) \quad \underline{H}(P) = - \iint_{\Sigma} \left[\underline{n} \cdot \underline{H} \text{grad}_Q G + (\underline{n} \wedge \underline{H}) \wedge \text{grad}_Q G - \frac{ikG}{Z} \cdot \underline{n} \wedge \underline{E} \right] \, d\Sigma_Q$$

equazione equivalente alle (III-30).

§ 12. Le (III-29,30) o le equivalenti (III-42, 43) esprimono il campo all'interno di Σ mediante integrali estesi alla superficie Σ .

Esse rappresentano in certo qual modo l'analogo vettoriale del (II-4) e, come è stato fatto al § 5, possono facilmente essere adattate al caso in cui si voglia esprimere il campo all'esterno di Σ togliendo la restrizione che il campo stesso sia regolare all'interno di Σ . Inoltre è evidente che esse possono venir applicate con il metodo approssimato di Kirchhoff, esposto al § § 4,5. Si tratta in sostanz

na di sostituire i valori esatti (ma incogniti) $\underline{E}(Q)$, $\underline{H}(Q)$ che compaiono negli integrali, con i valori \underline{E}^i , \underline{H}^i del campo incidente, estendendo poi l'integrazione a un'opportuna porzione finita di Σ , come nella (II-10) e nelle (II-12,13).

A questo procedimento si possono muovere, in primo luogo, critiche analoghe a quelle viste al § 6 per la teoria scalare. Le espressioni del campo ottenute non tendono, in generale, ai valori imposti su Σ . La cosa s'intuisce facilmente osservando che, quando Σ è una superficie chiusa, il campo all'interno è completamente determinato assegnando su Σ la distribuzione della forza elettrica (o magnetica) tangenziale (OEM, p.256). Pertanto, i valori assegnati al contorno con il metodo di Kirchoff sono ridondanti e, in generale, incompatibili.

Come si è detto al § 7, si può superare questa difficoltà con Kottler [Ann. der Phys., 71, 457 (1923)], dicendo che non si tratta della soluzione di un problema di valori al contorno, ma della soluzione di un problema di salto. In altre parole, i valori di $\underline{E}(Q)$ e $\underline{H}(Q)$ arbitrariamente assegnati su Σ rappresentano le discontinuità che il campo subisce passando attraverso Σ . Che questa interpretazione sia valida è dimostrato dalla discussione fatta al § 8. Kottler propone che il problema di salto corrisponde al problema fisico della diffrazione da parte di uno schermo nero.

Ma nel caso elettromagnetico vi è una difficoltà di più, che non si presentava nel caso scalare. Se si applica il metodo di Kirchoff con le (III-29, 30) o con le (III-42, 43), si trova un campo che non soddisfa le equazioni di Maxwell. E' facile comprendere il perchè di questo. Un campo generato da correnti e cariche (elettriche o magnetiche) e espresso mediante i potenziali vettore e scalare soddisfa le equazioni di Maxwell purchè le correnti e le cariche soddisfino l'equazione di continuità (OEM, p.93).

Cra, nel nostro caso, questo avviene all'interno della zona di integrazione Σ , come abbiamo dimostrato al § 8. Ma quando la zona di

integrazione non è un'intera superficie chiusa, come avviene nel metodo di Kirchoff, l'equazione di continuità è violata all'orlo Γ di Σ . Infatti all'orlo i valori del campo passano bruscamente da \underline{E}^i , \underline{H}^i a zero e altrettanto avverrà delle correnti date dalle (III-5,7). Le componenti delle correnti normali a Γ accumuleranno all'orlo delle cariche, di cui bisognerà tenere conto, se si vuole rispettata la conservazione della carica.

Per esempio, sia Σ un'apertura in uno schermo piano normale all'asse z. Applicando il metodo di Kirchoff, le (III-5, 7) danno

$$(III-44) \quad \underline{I} = \underline{k} \wedge \underline{H}^i, \quad \underline{K} = - \underline{k} \wedge \underline{E}^i$$

dato che la normale esterna (rivolta verso le sorgenti che stanno in $z < 0$) è $\underline{n} = -\underline{k}$. Le (III-44) valgono all'interno di Σ mentre si hanno correnti nulle sul resto del piano xy. Detto $d\underline{s}$ un elemento di linea di Γ (circolazione antioraria vista da z positiva), la carica elettrica accumulata su tale elemento avrà l'espressione

$$(III-45) \quad - \frac{1}{i\omega} \underline{I} \cdot d\underline{s} \wedge \underline{k} = \frac{1}{i\omega} \underline{H}^i \cdot d\underline{s}$$

Di conseguenza, al potenziale scalare (III-17) va aggiunto un termine φ_r dato da

$$(III-46) \quad \varphi_r(P) = \frac{1}{i\omega \epsilon_r} \int_{\Gamma} G(P,Q) \underline{H}^i(Q) \cdot d\underline{s}_Q = \frac{Z}{i\omega k} \int_{\Gamma} G(P,Q) \underline{H}^i(Q) \cdot d\underline{s}_Q$$

Similmente, si trova che al potenziale scalare magnetico (III-26) va aggiunto il termine ψ_r dato da

$$(III-47) \quad \psi_r(P) = - \frac{1}{i\omega k Z} \int_{\Gamma} G(P,Q) \underline{E}^i(Q) \cdot d\underline{s}_Q$$

Le formule (III-29,30) e le (III-42,43), quando si aggiunga il campo generato dai potenziali (III-46, 47), possono essere impiegate con il metodo di Kirchoff, dando luogo a un campo che soddisfa le equazioni di Maxwell. L'aggiunta dei termini (III-46, 47) è stata suggerita da Kottler.

13. Le soluzioni di Sommerfeld.

§ 15. La trattazione della diffrazione elettromagnetica si semplifica molto quando la si può ricondurre a un problema bidimensionale.

Per esempio, supponiamo che né il campo, né le condizioni al contorno dipendano dalla coordinata x e sviluppiamo le (III-1,2) in componenti cartesiane. Per ragioni che vedremo, scriveremo prima la prima componente della (III-1) e le ultime due componenti della (III-2).

$$(IV-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{ik}{Z} E_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = ikZ H_y \\ -\frac{\partial E_x}{\partial y} = ikZ H_z \end{array} \right.$$

quindi scriveremo la prima componente della (III-2) e le ultime due componenti della (III-1)

$$(IV-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = ikZ H_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} = -\frac{ik}{Z} E_y \\ -\frac{\partial H_x}{\partial y} = -\frac{ik}{Z} E_z \end{array} \right.$$

Si verifica subito che le (IV, 1, 2) costituiscono due sistemi indipendenti, dei quali il primo contiene E_x, H_y, H_z e il secondo E_y, E_z, H_x . Pertanto, se nemmeno le condizioni al contorno impongono alcuna interdipendenza fra questi due gruppi di incognite, il problema si scinde in due problemi separati.

Se dalla prima equazione (IV-1) si eliminano H_y, H_z mediante le altre due, si ottiene

$$(IV-3) \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0$$

Una volta ottenuta E_x , si ottengono H_y , H_z dalle (IV-1) con semplici derivazioni.

Similmente dalle (IV-2) si ottiene

$$(IV-4) \quad \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0$$

e, una volta nota H_x , si ricavano E_y , E_z con semplici derivazioni.

§ 14. Il più semplice e fondamentale problema di questo tipo fu risolto da Sommerfeld [Math. Ann., 47, 317 (1896)]. Si tratta della diffrazione di un'onda piana da parte di uno schermo infinitamente sottile che occupa un semipiano ed ha conduttività infinita.

Giaccia lo schermo nel semipiano $z = 0, y > 0$. L'orlo dello schermo è l'asse x . L'onda incidente si propaga in una direzione del piano yz .

Per quanto abbiamo visto al paragrafo precedente il problema si scinde in due problemi distinti, rappresentati dalle (IV-1) e (IV-2) rispettivamente:

Problema I. L'onda è polarizzata parallelamente all'asse x . Il campo elettrico ha la sola componente E_x . Ponendo $E_x = f$, per la (IV-3) dovrà essere

$$(IV-5) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0$$

e, per la conduttività, $f = 0$ sullo schermo.

Problema II. L'onda è polarizzata perpendicolarmente all'asse x . Il campo magnetico ha la sola componente H_x . Ponendo $H_x = f$, la f deve obbedire alla (IV-5). Inoltre, per la seconda delle (IV-2) dovrà aver si $\partial f / \partial z = 0$ sullo schermo.

§ 15. Nell'affrontare il caso del semipiano riflettente è naturale che si pensi al caso dell'intero piano riflettente. In questo ultimo la soluzione si ottiene facilmente col metodo delle immagini. Se, per esempio, la sorgente è situata dalla banda $z < 0$, basta aggiungere al campo generato dalla sorgente reale il campo generato da una sorgente virtuale, simmetrica di quella reale rispetto al piano $z = 0$.