Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts

RESEARCH

Susanne Schnell

Muster und Variabilität erkunden

Konstruktionsprozesse kontextspezifischer Vorstellungen zum Phänomen Zufall

Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts

Springer Spektrum

Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematik-unterrichts

Band 14

Herausgegeben von
S. Hußmann,
M. Nührenbörger,
S. Prediger,
C. Selter,
Dortmund, Deutschland

Eines der zentralen Anliegen der Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts stellt die Verbindung von konstruktiven Entwicklungsarbeiten und rekonstruktiven empirischen Analysen der Besonderheiten, Voraussetzungen und Strukturen von Lehr- und Lernprozessen dar. Dieses Wechselspiel fi ndet Ausdruck in der sorgsamen Konzeption von mathematischen Aufgabenformaten und Unterrichtsszenarien und der genauen Analyse dadurch initiierter Lernprozesse.

Die Reihe „Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts"trägt dazu bei, ausgewählte Themen und Charakteristika des Lehrens und Lernens von Mathematik – von der Kita bis zur Hochschule – unter theoretisch vielfältigen Perspektiven besser zu verstehen.

Herausgegeben von
Prof. Dr. Stephan Hußmann,
Prof. Dr. Marcus Nührenbörger,
Prof. Dr. Susanne Prediger,
Prof. Dr. Christoph Selter,
Technische Universität Dortmund, Deutschland

Susanne Schnell

Muster und Variabilität erkunden

Konstruktionsprozesse kontextspezifischer Vorstellungen zum Phänomen Zufall

Springer Spektrum

Susanne Schnell
Technische Universität Dortmund, Deutschland

Dissertation Technische Universität Dortmund, 2013

Tag der Disputation: 29.04.2013

Erstgutachterin: Prof. Dr. Susanne Prediger
Zweitgutachter: Prof. Dr. Andreas Eichler
Drittgutachter: Prof. Dr. Stephan Hußmann

ISBN 978-3-658-03804-5 ISBN 978-3-658-03805-2 (eBook)
DOI 10.1007/ 978-3-658-03805-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-spektrum.de

Geleitwort

Auch wenn die Mathematikdidaktik auf eine nun 40-jährige Tradition empirischer Forschung zu Lernständen von Schülerinnen und Schülern zurückblickt, ist die empirische Erfassung von Lernprozessen in ihrer Dynamik auf Mikroebene nach wie vor Neuland, das theoretische und methodologische Herausforderungen bietet. Dies gilt insbesondere für die Themengebiete, in denen im Sinne des Conceptual Change Ansatzes nicht neue Vorstellungen und Begriffe gebildet werden müssen, sondern bestehende, vorunterrichtliche Vorstellungen verändert, ausdifferenziert und in ihren Anwendungsbereichen angepasst werden müssen.

Die hier vorliegende Dissertation von Susanne Schnell geht aus von der lerntheoretischen Idee des horizontalen Conceptual Change, demgemäß tragfähige Vorstellungen nicht die vorunterrichtlichen Vorstellungen überformen, sondern neben diese treten und jeweils situationsspezifisch aktiviert werden sollen. Dazu bedient sich die Arbeit der im zehnjährigen Dortmund-Freiburger Entwicklungs- und Forschungsprojekt KOSIMA entwickelten Lernumgebung, die diese Grundidee für den spezifischen Bereich der Anwendungsbedingungen für Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen durcharbeitet: Schülerinnen und Schüler sollen darin lernen, dass sich stochastische Vorstellungen dann gut aktivieren lassen, wenn Zufallsversuche auf lange Sicht betrachtet werden, denn dann zeigen sich wiederkehrende Muster mit immer geringer werdender Relevanz von Variabilität und ermöglichen sichere Prognosen. Für jeweils nur einen Ausfall dagegen sind die stochastischen Vorstellungen und Gesetzmäßigkeiten nicht wirklich anwendbar, weil Variabilität die Muster zu stark stört und Prognosen daher nur unsicher sein können. Das empirische Gesetz der großen Zahlen erweist sich in dieser Perspektive als diejenige Erfahrungstatsache, die die kontextspezifische Anwendbarkeit stochastischer Gesetzmäßigkeiten klärt. In der untersuchten Lernumgebung für Lernende der 6. Klasse wird diese Erkenntnis angebahnt durch ein Wettspiel mit variierenden Wurfanzahlen.

Diese Lernumgebung war der Rahmen für eine empirische Untersuchung der Frage, wie Lernende ihre Vorstellungen zu Muster und Variabilität bei Zufallsversuchen sukzessive weiterentwickeln und hinsichtlich des tragfähigen Kontextes zunehmend ausschärfen. Die dazu durchgeführten Design-Experimente und die daran anschließenden Analysen und Theoriebildungen ermöglichten, die allgemeine Theorie des horizontalen Conceptual Change durch substantielle Präzisierungen auf der Mikroebene zu einer gegenstandsspezifischen und prozessorientierten lokalen Theorie der Wissenskonstruktionsprozesse in der Stochastik zu ergänzen.

Susanne Schnell nutzt in ihrer Arbeit konsequent eine Strukturierung anhand des Zusammenspiels aus Variabilität und Mustern, um den mathematischen Gegenstand zu beleuchten und zahlreiche Befunde verschiedener empirischer Studien in einen kohärenten Zusammenhang zu bringen. Besonders relevant ist dabei die ressourcenorientierte Deutung hinsichtlich möglicher Anknüpfungspunkte für die Strukturierung von Lehr- und Lernprozessen.

In den empirischen Analysen zeigt sich eindrucksvoll, wie vorunterrichtliche und aus normativer Sicht nicht tragfähige Vorstellungen zwar zu Beginn der Auseinandersetzung mit dem Lehr-Lern-Arrangement zur Stochastik auftreten, im weiteren Verlauf der Lernprozesse allerdings an Quantität abzunehmen scheinen.

Weiterhin zeigen Feinanalysen, wie Lernende auf Grundlage der gewonnenen Erfahrungen und Einsichten ihre Vorstellungen zum Zusammenspiel von Variabilität und Mustern tatsächlich im Detail weiterentwickeln, zum Beispiel als komplexe Mikroprozesse der sukzessiven Ausweitung und Einschränkung von spezifischen Bestandteilen der Konstrukte. Auch wenn von einer theoretischen Sättigung in Bezug auf die Kategorien von Mikroprozessen vermutlich noch nicht gesprochen werden kann, ist mit den herauspräparierten Kategorien eine Sprache entwickelt, mit der Momente des vertikalen und horizontalen Conceptual Change im Detail beschrieben werden können.

Die Arbeit leistet damit einen höchst substantiellen Beitrag zur Theoriebildung über Vorstellungsentwicklungsprozesse, die über den konkreten mathematischen Gegenstandsbereich hinaus von Bedeutung sein können.

Gleichzeitig ist sie praktisch bedeutsam, weil sie die Wirkungen einer didaktisch fundierten Lernumgebung verstehbar macht und erlebbar werden lässt, wie ein ressourcen- und prozessorientierter Blick auf die Lernenden neue Perspektiven auch auf die fachlichen Gegenstände ermöglicht.

Ich wünsche der Arbeit viele Leserinnen und Leser, und diesen eine anregungsreiche Lektüre!

Susanne Prediger

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist das Ergebnis eines Prozesses, der in den letzten Jahren einen bedeutenden Teil meines Lebens ausgemacht hat. Bei diesem habe ich nicht nur viel über die höchst individuellen Denk- und Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern gelernt, sondern auch über das spannende und breite Spektrum der Forschung in der Mathematikdidaktik. Dabei bin ich zahlreichen Personen begegnet, die mich auf meinem Weg begleitet, geprägt und unterstützt haben und denen mein aufrichtigster und herzlichster Dank gilt.

Professor Dr. Susanne Prediger, die ein hervorragendes Gespür dafür hatte, mich mit einem gut ausgewogenen Verhältnis an fachlicher Unterstützung einerseits und kreativer Freiheit andererseits im Forschungsprozess zu betreuen. Ihr Interesse nicht nur an Phänomenen des Lehrens und Lernens von Mathematik, sondern auch ihr Engagement für die Disziplin der Mathematikdidaktik als solche war und ist mir eine große Inspiration.

Professor Dr. Andreas Eichler, ohne dessen Einfluss während meines Studiums ich eine Promotion möglicherweise nie in Erwägung gezogen hätte. Ich danke ihm herzlichst für sein großes Interesse an meinem Werdegang und meiner Forschung sowie seine substanziellen fachlichen Rückmeldungen zu meiner Dissertation.

Professor Dr. Stephan Hußmann, dessen Begeisterung für das Fach Mathematik sowie die theoretische Durchdringung der Denkwege von Schülerinnen und Schüler ansteckend war. Seine kritischen und konstruktiven Rückmeldungen im gesamten Prozess des Entstehens meiner Arbeit habe ich stets als sehr hilfreich empfunden für eine tiefere Durchdringung meiner Ideen.

Neben meinen Betreuerinnen und Betreuern gibt es noch zahlreiche weitere Personen, denen ich danken möchte:

- Nadine Krägeloh, die mich nicht nur in langen Stunden der Diskussion und Analyse meiner Daten unterstützt hat, sondern die mir durch ihre positive Art und ihr offenes Ohr in den letzten Jahren eine sehr gute Freundin geworden ist.

- Professor Dr. Michael Meyer, mit dem ich viele schöne Stunden der Diskussion verbracht habe und der mich auf weitere theoretische Ansätze neugierig machen konnte.

- Dr. Andrea Schink, Ann-Christin Buttlar, Birte Pöhler, Dr. Florian Schacht, Kirstin Erath, Lena Wessel, Larissa Zwetzschler, Maike Schindler und Nadine Renk, die mich in verschiedenen Phasen der Dissertation durch gemeinsames Analysieren, kritische Nachfragen, konstruktive Vorschläge oder das gewissenhafte Suchen von Rechtschreibfehlern sehr unterstützt haben.

- Allen Mitgliedern des Instituts für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts, die mir nicht nur immer wieder substanzielle Rückmeldungen zu den verschiedenen Stadien meiner Arbeit gegeben haben, sondern durch die ich auch Einblicke in zahlreiche andere spannende Forschungsprojekte gewinnen konnte. Besonders den auch schulformübergreifenden Austausch am IEEM habe ich immer als sehr konstruktiv und inspirierend empfunden.

- Meiner Mutter Gerhild Schnell, meiner Schwester Cornelia und meinem Freund Christopher Orr, die mich durch alle Höhen und Tiefen der letzten Jahre begleitet haben. Meinen Dank dafür kann ich nicht in Worte fassen.

- Allen Lehrerinnen und Lehrern sowie den Schülerinnen und Schüler, die an meiner Studie teilgenommen haben, und ohne die letztlich die Untersuchung nicht möglich gewesen wäre. Weiterhin danke ich auch allen Lehrpersonen und Lernenden, die mir in den vergangenen Jahren die Türen geöffnet haben, so dass ich zahlreiche Unterrichtsstunden mitverfolgen und vieles daraus auch für meinen eigenen Unterricht lernen konnte.

Für meinen Vater.

Susanne Schnell

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit waren Aussagen von Bekannten und Freunden, Lehrkräften und Studierenden, die dem Thema Stochastik eher reserviert gegenübertreten: „Stochastik ist immer anders als man denkt".

Woran kann es liegen, dass selbst Personen, die Mathematik studiert haben und es unterrichten wollen, mit diesem Teilgebiet Schwierigkeiten haben? Und wie könnten erfolgreiche Lernwege aussehen, an deren Ende tragfähige Vorstellungen zum Phänomen Zufall stehen und die die Lernenden befähigen, begründet unter Unsicherheit zu entscheiden – so wie es bereits Bernoulli in seinem Werk ‚Ars Conjectandi' – der ‚Kunst des Vermutens' – als Ziel der Stochastik beschrieben hat (Bernoulli 1899).

Die wissenschaftliche Literatur zeigt zahlreiche Beispiele auf für den eingeschränkten Erfolg des Stochastikunterrichts (vgl. Überblick in Jones et al. 2007; Kahnemann et al. 1982 als eines der bekanntesten Beispiele). Als Ursache dafür werden häufig Differenzen zwischen vorunterrichtlichen, im Alltag gebildeten und unterrichtlichen, mathematisch tragfähigen Vorstellungen genannt (Fischbein et al. 1991; Borovcnik und Peard 1996). Diese Diskrepanz scheint in der Stochastik besonders groß zu sein, was unter anderem über die Nähe zwischen dem alltäglichen Begriff ‚zufällig' und dem (schul-)mathematischen Phänomen „Zufall" erklärt werden kann: Lernende werden mit dem Zufall bereits in frühester Kindheit konfrontiert und entwickeln Vorstellungen und Regeln, ihn in spezifischen Situationen geschickt zu nutzen; zum Beispiel beim Spiel „Schere – Stein – Papier", bei dem jeder Spieler zufällig eine von drei Spielfiguren wählt und die den Spielregeln nach überlegenere davon gewinnt (vgl. Martignon und Wassner 2005). Eine vor allem bei Alltagsspielen genutzte Eigenschaft des Zufalls ist die der Unvorhersagbarkeit des einzelnen Ereignisses: Es ist nicht abzusehen (ausgenommen etwaiger persönlicher Vorlieben), welche Spielfigur gewählt wird, so dass jeder Mitspielende die gleiche Chance zu gewinnen hat.

Phänomen ‚Zufall' als Zusammenspiel aus Mustern und Variabilität

Das Phänomen Zufall lässt sich für (schul-)mathematische Betrachtungen jedoch nicht auf die Unvorhersagbarkeit beschränken: Eines der Ziele der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist es, begründete Vorhersagen auf Grundlage theoretischer Überlegungen oder empirischer Erfahrungen für das Eintreten zukünftiger Ereignisse zu treffen. Anders formuliert werden mathematische Modelle an zufällige Vorgänge herangetragen und so *Muster* – das heißt wiederkehrender Regelmäßigkeiten – identifiziert (vgl. Eichler und Vogel 2009, S. 169; Borovcnik 2005, S. 489). Diese Muster sind versetzt mit Abweichungen und Störungen, die im Einzelfall tatsächlich unvorhersagbar sind; dies wird als (unerklärter Teil der) *Variabilität* bezeichnet und kann über die gewählten mathematischen Modelle nicht erfasst werden (vgl. Wild und Pfannkuch 1999, S. 235 ff.). Es ist gerade dieses Zusammenspiel aus Mustern und Variabilität, das das Wesen stochastischer Vorgänge im Gegensatz zu deterministischen ausmacht und das im Folgenden als das Phänomen Zufall charakterisierend verwendet wird.

Kontextspezifität stochastischer Aussagen und Erkundung stochastischer Phänomene

Zentral für dieses Zusammenspiel ist die Frage nach der Anzahl der Wiederholungen des zufälligen Vorgangs: Während einzelne Versuchsausgänge (bezeichnet als ‚kurze Sicht') nicht vorhersagbar sind, können bei ausreichend vielen Versuchswiederholungen unter gleichen Bedingungen (bezeichnet als ‚lange Sicht') Muster identifiziert werden. Diese Unterscheidung wird als „stochastischer Kontext" bezeichnet, der die Gültigkeit von Wahrscheinlichkeiten einschränkt: sie machen erst eine zuverlässige Aussage auf *lange Sicht* (vgl. Prediger 2008). Im Gegensatz dazu zeigen Lernende jedoch häufig intuitiv die Erwartungshaltung, einzelne Ausgänge eines Vorgangs mit Zufallscharakter vorhersagen zu können (vgl. Konold 1991; Borovcnik 1992, S. 41 f.).

Das Spannungsverhältnis zwischen Mustern und Variabilität einerseits und der Betrachtung der kurzen und langen Sicht andererseits erscheint daher als grundlegend für den Aufbau tragfähiger Vorstellungen in der Stochastik (vgl. Hußmann 2003, S. 165 ff.; Prediger 2008). Im Sinne konstruktivistischer Lerntheorien (vgl. Gerstenmaier und Mandl 1995) sollten diese Zusammenhänge von Schülerinnen und Schülern eigenständig nacherfunden und *erkundet* werden, so dass aktive Wissenskonstruktionsprozesse stattfinden können (vgl. Barzel et al. 2011).

Notwendig dafür ist die Bereitstellung eines geeigneten Lehr- und Lernarrangements, das neben dem systematischen Aufbau substanzieller Vorstellungen auch die Reflexion über bestehende vorunterrichtlicher Vorstellungen und deren Gültigkeitsbereiche (in vielen Fällen beschränkt auf die kurze Sicht) zulässt (vgl. Konold 1991; Aspinwall und Tarr 2001; Hußmann und Prediger 2009).

Wenn nun also Schülerinnen und Schülern solche Erkundungsprozesse ermöglicht werden, dann ergibt sich die Frage, *wie* dabei neue Vorstellungen konstruiert werden. In der Beantwortung dessen besteht das zentrale Interesse, das der vorliegenden Arbeit zugrunde liegt.

Vorstellungsentwicklung in der Stochastik - Prozessperspektive auf Mikroebene

Entscheidend für die Untersuchung dieser Frage ist die Betrachtung nicht nur der Lernstände vor und nach der Bearbeitung eines Lehr- und Lernarrangements, sondern auch der dabei ablaufenden (epistemischen) Prozesse. Von besonderem Wert erscheint dafür eine Analyse auf der Mikroebene der Vorstellungsentwicklung: Während auf Makroebene die Vorstellungen wie ‚Unvorhersagbarkeit' und ‚Vorhersagbarkeit von Mustern auf lange Sicht' identifiziert werden können, deuten einige empirische Studien (für die Stochastik Pratt 1998; Johnston-Wilder 2005; Ron et al. 2010) an, dass Entwicklungen in kleineren, subtileren Schritten stattfinden können, die an spezifische Kontexte gebunden sind.

Für die vorliegende Arbeit ergab sich daraus das Interesse, einerseits die stochastikspezifischen Entwicklungen von Vorstellungen auf Mikroebene zu beschreiben und hinsichtlich ihrer Situiertheit in verschiedenen Kontexten zu erfassen. Andererseits sollten auch auf erkenntnistheoretischer Ebene generelle Prozesse der Entwicklungen beschrieben werden, um so tiefere Einblicke in die Epistemologie des Vorstellungsaufbaus zu erlangen.

Zur Untersuchung dessen werden die Ergebnisse einer empirischen Studie in Klassenstufe 6 genutzt, in der Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern zu Beginn der Sekundarstufe I zum Zusammenspiel von Variabilität und Mustern beobachtet wurden. Zentral für die Beschreibungen ist die Erfassung der Vorstellungen auf der Mikroebene als „Konstrukte" und die Analyse der dynamischen Beziehungen zwischen diesen Konstrukten.

Ziel der Arbeit ist die Entwicklung einer lokalen, gegenstandsspezifischen Theorie zur Vorstellungsentwicklung in der Stochastik, mit Hilfe derer Lernverläufe, Hürden und Chancen beschrieben werden können.

Aufbau der Arbeit

Der erste Teil der Arbeit stellt die *theoretische Fundierung* dar:
In *Kapitel 1* werden zunächst lerntheoretische Annahmen und Hintergründe geklärt. Auf Grundlage einer konstruktivistischen Auffassung von Lernen werden Vorstellungen als zentrales Element der Untersuchungen vorgestellt, wobei besondere Aufmerksamkeit auf deren Situiertheit in bestimmten Kontexten gelegt wird. Erfasst werden die Entwicklungen dieser Vorstellungen über den Ansatz des Conceptual Change, der in der vorliegenden Arbeit zur Konzeptualisierung der Lernprozesse auf Makroebene dient.

Der Begriff der Vorstellungen wird in *Kapitel 2* genutzt, um die normativ-fachlichen Perspektiven auf den Gegenstand des schulmathematischen Phänomens Zufall zu klären.

Diese stoffdidaktischen Analysen dienen als Rahmen für die strukturierte Darstellung empirischer Forschungsergebnisse zu Lernendenvorstellungen zum Phänomen Zufall in *Kapitel 3*. Ziel des Kapitels ist die Beschreibung der Vielfalt der Ergebnisse zu Lernständen einerseits und des Mangels an Untersuchungen der Prozesse der Vorstellungsentwicklung in der Stochastik andererseits.

In *Kapitel 4* wird auf Grundlage der vorangegangen Beschreibung das Lehr- und Lernarrangements ‚Wettkönig' (Prediger und Hußmann 2014) für die Klassenstufe 6 und 7 vorgestellt. Zentrales Element des Lehr- und Lernarrangements ist ein Spiel, in dem über (mit einer Computersimulation) erzeugten Daten Wetten über zukünftige Ereignisse getroffen und hinsichtlich ihrer Sicherheit bei unterschiedlichen Anzahlen von Versuchswiederholungen charakterisiert werden sollen. Das Lehr- und Lernarrangement dient in der vorliegenden Arbeit dazu, substanzielle Lernprozesse zu ermöglichen, die in der empirischen Studie analysiert werden.

Während sich die Darstellungen in Kapitel 1 bis 4 auf die Makroebene der Vorstellungsentwicklung beziehen, wird diese Perspektive in *Kapitel 5* um das Analysewerkzeug der Konstrukte ergänzt. Dieses soll Einblicke in die Mikroebene und die lokale Situiertheit von Wissenskonstrukten ermöglichen und zur Beschreibung der Zusammenhänge zwischen bestehenden und neuen Einsichten dienen.

Kapitel 6 fasst die theoretische Fundierung der vorliegenden Arbeit zusammen und beschreibt die Forschungsfragen, die anhand der vorangegangenen Überlegungen ausdifferenziert werden. Weiterhin werden Konsequenzen für die empirische Studie abgeleitet.

Im *Kapitel 7* der vorliegenden Arbeit wird das Design der empirischen Studie beschrieben: Nachdem zunächst die methodologische Überlegungen zur qualitativen Anlage der empirischen Studie aufgrund des Interesses an den Prozessen der Vorstellungsentwicklung auf Mikroebene erläutert werden, werden danach der Forschungskontext der Untersuchung sowie die Ergebungsmethode der Designexperimente vorgestellt. Daran anschließend wird die Umsetzung des zuvor im Theorieteil beschriebenen Lehr- und Lernarrangements ‚Wettkönig' zur Datenerhebung erläutert. Zur detaillierteren Einsicht in die Methoden der Datenanalyse wird das Analyseinstrument der Konstrukte unter Rückgriff auf die zugrundeliegenden theoretischen Überlegungen exemplarisch vorgestellt.
In *Kapitel 8* schließlich werden die empirischen Befunde vorgestellt:

Kapitel 8.1 befasst sich mit der Frage nach verschiedenen Begründungen, die Lernende im Umgang für beobachtete Phänomene äußern. Dabei werden einerseits empirische Befunde anderer Studien repliziert; andererseits wird aufgezeigt, inwiefern alternative Vorstellungen zur Erklärung einzelner Phänomene einen eher geringen Stellenwert im Lernprozess einzunehmen scheinen.

Die längerfristige Beschreibung von zwei Lernwegen auf Mikroebene erfolgt in *Kapitel 8.2* und wird hinsichtlich des Umgangs mit Mustern und Variabilität einerseits und den gewählten theoretischen und empirischen Zugängen andererseits erfasst.

Kapitel 8.3 zeigt an lokalen Stellen im Lernprozess, wie Schülerinnen und Schüler mit Erfahrungen der Variabilität umgehen und wie sich dadurch auf Mikroebene ein zunehmend ausgewogenes Bild des Phänomens Zufall hinsichtlich des Zusammenspiels aus Mustern und Variabilität entwickeln kann.

Während die vorangegangenen Kapitel vor allem auf stochastikdidaktische Aspekte fokussieren, wird im *Kapitel 8.4* ein epistemologischer Fokus verfolgt: Hier werden die rekonstruierten Entwicklungen zwischen Konstrukten kategorisiert und hinsichtlich der Prozesse des Conceptual Change auf Mikroebene beschrieben.

Kapitel 9 fasst die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung zusammen und zeigt Konsequenzen für Unterrichtspraxis und fachdidaktische Forschung auf. Dabei werden auch Grenzen der Ergebnisse kritisch reflektiert.

1 Lerntheoretische Annahmen

1.1 Situierte Vorstellungen in sozialkonstruktivistischer Perspektive

Der Arbeit liegt ein konstruktivistisches Verständnis von Lernen zugrunde: „Wissenserwerb wird als aktive Konstruktion auf der Basis vorhandener Vorstellungen gesehen“ (Duit 1995, S. 905). Zentral ist dabei die Rolle des Lernenden, der nicht als passiv rezipierend, sondern als aktiv handelnd bei der Konstruktion von Wissen verstanden wird (vgl. von Glasersfeld 1997, S. 48): Jeder Lernprozess beinhaltet die Interpretation des Lernenden auf Grundlage seines existierenden Wissens (vgl. Smith et al. 1993, S. 116). Dabei wird auch der Teilhabe an einer sozialen Gruppe Bedeutung beigemessen: „Subjektive Theorien werden durch die gemeinsame Aushandlung zu kollektiven und anerkannten Theorien“ (Hußmann 2001, S. 6; Gerstenmaier und Mandl 1999, S. 7). Konstruktivistische Lerngelegenheiten verfolgen demnach nicht das Ziel, Inhalte zu vermitteln, sondern ermöglichen das Aneignen und die aktive Wissenskonstruktion durch die Individuen (vgl. Wittmann 1990). Vor diesem Hintergrund der konstruktivistischen Sichtweise als „konsistenter Interpretationsrahmen“ (Duit 1995, S. 908) fokussiert die vorliegende Untersuchung die individuellen, aktiven und konstruktiven Prozesse des (mathematischen) Wissenserwerbs (vgl. Tobinski und Fritz 2010, S. 231; Duit 1995, S. 905; Wittmann 1990).

Zu betonen ist dabei die Annahme der Situiertheit von Kognition und Wissen: „Denken ist in physikalischen und sozialen Kontexten (…) [und] in Kontexten von Überzeugungen und Bedeutungen situiert, die zwischen Individuen und sozialen Gruppen differieren“ (Gerstenmaier und Mandl 1995, S. 873; vgl. Brown et al. 1989). Zu diesen Kontexten zählen weiterhin sowohl konventionale schulische Rahmungen wie Rahmenrichtlinien und Kernlehrpläne, aber auch Lernumgebungen, die konstruktivistische Lernwege initiieren und beeinflussen können (vgl. Reinmann-Rothmeier und Mandl 2001; Brown et al. 1989). Somit wird einerseits deutlich, dass Kontexte sowohl einzelne Handlungen in konkreten Situationen als auch ganze Strukturen von Einstellungen oder zum Beispiel curricularen Anforderungen beinhalten können; zum besseren Verständnis werden letztere im Folgenden als ‚konventionaler Hintergrund‘ bezeichnet, während sich der Begriff ‚Kontext‘ mehr auf eine Momentaufnahme der Situation bezieht.

Zu klären bleibt, wie ‚Wissen‘ als Gegenstand konstruktivistischer Lernprozesse genauer erfasst werden kann. Für die vorliegende Arbeit wird dafür der Begriff der ‚Vorstellungen‘ als zentrales Beschreibungswerkzeug genutzt:

S. Schnell, *Muster und Variabilität erkunden*,
DOI 10.1007/978-3-658-03805-2_1, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

„‚Vorstellungen‘ sind also subjektive, gedankliche Konstrukte aller Komplexitätsebenen, also sowohl ‚Begriffe‘, ‚Konzepte‘, ‚Denkfiguren‘, ‚Theorien‘ oder ähnliches“ (Gropengießer 2001, S. 31; vgl. Kaldrimidou und Tzekaki 2005 für eine Diskussion weiterer Bedeutungen des Begriffs). Diese Termini unterliegen einer Hierarchie bezüglich der Komplexität: Begriffe sind einfachste Vorstellungen mit Begriffsextension (Beispiele von erfassten Objekten) und Begriffsintension (charakterisierende Merkmale). Diese Begriffe werden durch Relationen in Behauptungen, Sätzen und Aussagen zu Konzepten verknüpft; jene können wiederum zu Denkfiguren und schließlich zu Theorien zusammengesetzt werden (vgl. Gropengießer 2001, S. 31). Auch sie sind der Restrukturierung und Veränderung im Lernprozess unterworfen und greifen dabei auf andere Vorstellungen zurück (Gropengießer 2001, S. 27).

Mit dem Begriff der Vorstellungen wird für die vorliegende Arbeit ein deskriptiver Ansatz verfolgt: Da Vorstellungen von Lernenden vor dem Hintergrund ihres individuellen Kenntnisstands konstruiert werden, entsprechen sie möglicherweise nicht den konventionellen, mathematisch tragfähigen Vorstellungen. Für die Lernenden selbst kommt ihnen jedoch eine fundamentale Bedeutung zu, denn sie werden in der Auseinandersetzung mit der Umwelt gebildet und haben meist die Funktion, diese zu erklären:

> „Students [have] ideas that [compete], often quite effectively, with the concepts presented in the classroom. Students [do] not come to instruction as blank slates. They [have] developed durable conceptions with explanatory power, but those conceptions [are] inconsistent with the accepted mathematical and scientific concepts presented in instruction” (Smith et al. 1993, S. 116).

Die individuell geschaffenen Erklärungsansätze können also möglicherweise sogar stabiler sein als die objektiv tragfähigen Vorstellungen, so dass Lernprozesse dadurch behindert werden können (vgl. Duit und von Rhöneck 1996, S. 7).
Dies zeigt die enorme Bedeutung, die den Lernendenvorstellungen zukommt:

> „The assumption was that students connect new ideas to existing ideas, and that the existing knowledge thus serves as both a filter and a catalyst to the acquisition of new ideas. To understand what students will learn, one must first determine what they currently believe” (Confrey 1990, S. 21).

Vor allem die wahrgenommene Behinderung von Lernprozessen durch normativ nicht tragfähige Vorstellungen führt dazu, dass diese als ‚Fehlvorstellungen‘ bezeichnet werden (für die Stochastik z.B. Kahnemann et al. 1982; Fischbein und Schnarch 1997; Shaughnessy 1992, S. 470 ff., vgl. Kapitel 3). Auf Basis der erläuterten Grundauffassung von Lernen wird diese Bezeichnung in der vorliegenden Arbeit bewusst vermieden, um die Bedeutung der individuellen Vorstellungen als wichtige Ressourcen für Lernprozesse aus konstruktivistischer Sicht zu betonen (vgl. Smith et al. 1993). Es werden daher die Adjektive ‚alternativ' (in Anlehnung an Posner et al. 1982, S. 211) oder ‚individuell' verwendet, um eine Abweichung aus normativer Sicht auszudrücken. Des Weiteren ist zu betonen, dass eine reine Unterscheidung in normativ tragfähig und nicht-tragfähig den Lernendenvorstellungen nicht gerecht werden kann, wie in Kapitel 3 anhand der stochastischen Vorstellungen diskutiert werden soll. Aufgrund der zuvor erwähnten Komplexität der Vorstelllungen und ihrer Eingebundenheit in spezifische Kontexte können sie nicht nur tragfähige Elemente beinhalten, sondern sich in anderen Situationen zum Beispiel als zielführend erweisen:

> "The key is context – where and how those conceptions are used. There are certainly contexts in which students' existing knowledge is ineffective, or more carefully articulated mathematical or scientific knowledge is unnecessary. Moreover, some flawed conceptions, though sensible in the short run, may play no role whatsoever in more expert reasoning" (Smith et al. 1993, S. 124 f.).

Weiterhin ist der Begriff der ‚Vorstellungen' abzugrenzen von den in der Mathematikdidaktik etablierten ‚Grundvorstellungen' (vgl. vom Hofe 1995; Bender 1991; für die Stochastik Bender 1997). Letztere werden in der vorliegenden Arbeit genutzt zur Bezeichnung normativ geprägter Einsichten, die als Zielperspektive für Lernwege dienen (vgl. vom Hofe 1995, S. 123).

Von zentraler Bedeutung ist nun die Frage danach, wie Lernprozesse stattfinden können: Wie entwickeln sich Vorstellungen in Abhängigkeit von neuen Situationen und wie werden dabei normativ akzeptierte Vorstellungen auf Grundlage der bestehenden gebildet? Eine Beschreibung dessen liefert der Ansatz des Conceptual Change, der im Folgenden erläutert wird.

1.2 Conceptual Change
Ansatz zur Beschreibung von Prozessen des Vorstellungsaufbaus auf Makroebene

Die Rolle der vorunterrichtlichen individuellen Vorstellungen ist zentral in den theoretischen Ansätzen des Conceptual Change: Conceptual Change ist ein seit den 1980er Jahren zunächst in den Naturwissenschaften und seit einiger Zeit auch in der Mathematik etablierter Ansatz zur Erfassung und Erklärung von Lernprozessen (vgl. für die Naturwissenschaften Duit und von Rhöneck 1996; Duit und Treagust 2003; diSessa 2009 u.a.; Vosniadou und Verschaffel 2004, S. 448 ff. für einen Überblick in der Mathematik; für die Stochastik Konold 1991, Prediger 2008).

Posner et al. (1982) beschreiben den Conceptual Change als das Nutzen existierender Konzepte für den Umgang mit neuen Phänomenen im Sinne einer kontinuierlichen, additiven Erweiterung des Wissens (bezeichnet mit dem Begriff der Assimilation nach Piaget). Eine zweite, radikalere Version des Konzeptwechsels wird erfasst als das Ersetzen oder Reorganisieren zentraler Konzepte aufgrund kognitiver Konflikte (bezeichnet als Akkommodation; vgl. Posner et al. 1982, S. 212; häufig wird nur diese zweite Version als Conceptual Change bezeichnet, vgl. Duit 1995, S. 913 ff.). Diese beiden Arten des Conceptual Change greifen meist ineinander: „Bei jedem Lernprozess gibt es ein subtiles Wechselspiel zwischen Assimilation und Akkommodation; sie sind als komplementäre Aspekte anzusehen" (Duit 1996, S. 148 f.).

Für den Conceptual Change sind vier Bedingungen notwendig (vgl. Posner et al. 1982, S. 214 ff.; Strike und Posner 1992):

(1) Es muss eine Unzufriedenheit mit den existierenden Vorstellungen bestehen;
(2) Die neue Vorstellung muss Verständlichkeit besitzen (also rational nachvollziehbar sein)
(3) Die neue Vorstellung muss Plausibilität besitzen (also lokale Probleme lösen können)
(4) Die neue Vorstellung muss Fruchtbarkeit besitzen (also weiter ausgebaut werden können oder neue Untersuchungsbereiche eröffnen).

Unter diesen Voraussetzungen kann die radikale Akkommodation einer neuen Vorstellung stattfinden. Lernen bedeutet also „in aller Regel ‚Umlernen' (…), da vorunterrichtliche Vorstellungen und naturwissenschaftliche Vorstellungen zumindest in wesentlichen Aspekten einander konträr gegenüber stehen" (Duit und von Rhöneck 1996, S. 158).

In dieser frühen Variante des Conceptual Change lag der Fokus auf dem ‚Ersetzen' von nicht tragfähigen Vorstellungen durch tragfähige, in einer Wertigkeitshierarchie als höher eingestufte Vorstellungen (Posner et al. 1982; vgl. Duit 1995, S. 915; Smith et al. 1993). Daher wird dieser klassische Ansatz auch als ‚vertikaler Conceptual Change' bezeichnet (vgl. Prediger 2008).
Dabei zeigen empirische Ergebnisse ein Misslingen dieses Ersetzens:

> „Es hat sich herausgestellt, dass die ‚alten' Vorstellungen in der Regel auch nach dem Unterricht noch vorhanden sind und nach wie vor in bestimmten Kontexten angewendet werden. Bei vielen der vorunterrichtlichen Alltagsvorstellungen handelt es sich nämlich um Vorstellungen, die sich in Alltagskontexten bestens bewährt haben und die dort weiterhin ausreichend Orientierung bieten" (Duit 1995, S. 915; vgl. Tyson et al. 1997, S. 391 ff.; vgl. Smith et al. 1993).

Das Phänomen der parallel existierenden unterschiedlichen Vorstellungen bezeichnet Prediger (2008) als ‘horizontalen Conceptual Change’. Diese Beobachtung wird auch in anderen theoretischen Modellen erfasst: Siegler (1997) beispielsweise nutzt die Metapher überlappender Wellen, um die kognitive Entwicklung von Kindern hinsichtlich der auftretenden Variabilität ihres Denkens zu erklären. „Changes in children's thinking seem typically to involve not the replacement of one way of thinking by another but rather by a gradual ebbing and flowing of multiple ways of thinking, with new approaches being introduced and old ones ceasing to be used as well" (Siegler 1997, S. 326).

Die deskriptiven Befunde der Koexistenz verschiedener Vorstellungen führen auch aus normativer Sicht zu einer veränderten Auffassung der Zielsetzung von Unterricht: Statt der Ersetzung alternativer Vorstellungen steht das Bestreben im Fokus, die Lernenden von der Fruchtbarkeit wissenschaftlicher Vorstellungen in bestimmten Kontexten zu überzeugen. (vgl. Duit 1995, S. 915; Prediger 2008). "Conceptual change does not imply that initial conceptions are 'extinguished'. Initial conceptions, especially those that hold explanatory power in nonscientific contexts, may be held concurrently with new conceptions. Successful students learn to utilize different conceptions in appropriate contexts. That is, the status of one particular conception may change in differing contexts" (Tyson et al. 1997, S. 402).

Vor allem in Hinblick auf horizontale Prozesse des Conceptual Change kommt den Kontexten eine besondere Bedeutung zu: Will man das präskriptive Ziel des horizontalen Conceptual Change erreichen, so ist es notwendig, zunächst zu verstehen, in welchen Kontexten welche Vorstellungen Gültigkeit besitzen und inwiefern sich diese Gültigkeitsbereiche im Verlauf des Lernens verändern. Eine Klärung der Frage nach sich verändernden Gültigkeitsbereichen von Vorstellungen auf der Mikroebene ist Ziel der vorliegenden Arbeit.

Ähnlich der Assimilation und Akkommodation sind auch vertikale und horizontale Prozesse des Conceptual Change als komplementär zu sehen (vgl. Prediger 2008): Während das Repertoire individueller Vorstellungen um mathematisch tragfähige erweitert werden muss, können einige alternativen Vorstellungen ihre Berechtigung für bestimmte Kontexte behalten (vgl. Prediger 2005; Prediger 2008). So können Entwicklungsprozesse ausgehend von alternativen Vorstellungen hin zu einem tragfähigen mathematischen Verständnis beschrieben, Lernschwierigkeiten identifiziert und Lehrerinnen und Lehrer für typische alternative Vorstellungen sensibilisiert werden (vgl. Vosniadou und Verschaffel 2004, S. 449; Tirosh und Tsamir 2004).

1.3 Zusammenfassung in Hinblick auf das Forschungsinteresse der vorliegenden Arbeit

Ausgehend von einem konstruktivistischen Grundverständnis von Lernen bietet der Ansatz des Conceptual Change sowohl eine deskriptive als auch eine präskriptive Dimension zur Erfassung von Lernwegen (vgl. Tabelle 1.1).

Tabelle 1.1 Vertikale und horizontale Prozesse des Conceptual Change hinsichtlich deskriptiver und präskriptiver Dimensionen

	Vertikale Entwicklung	**Horizontale Entwicklung**
Deskriptive Dimension	Lernende entwickeln aus bestehenden, alternativen Vorstellungen neue mathematische Vorstellungen.	Lernende nutzen sowohl alternative als auch mathematische Vorstellungen.
Präskriptive Dimension	Lernende müssen befähigt werden, nicht tragfähige alternative Vorstellungen zu überwinden und durch mathematische zu ersetzen.	Lernende müssen befähigt werden, bewusst die Kontexte auszuwählen, in denen mathematische Vorstellungen herangezogen werden müssen.

(vgl. Prediger 2008; Duit 1995, S. 146 f.)

Über den Conceptual Change-Ansatz können Fragen danach beantwortet werden, welche vorunterrichtlichen Vorstellungen aktiviert und welche mathematischen Vorstellungen gebildet werden. Beschreibungen dieser Art sollen im Folgenden als ‚Makroperspektive' bezeichnet werden. Weitestgehend offen bleibt in Hinblick auf konkrete Lernprozesse und vor der Annahme deren Situiertheit allerdings die Frage nach dem ‚*wie*': Wenn verschiedene Vorstellungen in konkreten Lernsituationen genutzt und weiterentwickelt werden oder sich parallel entwickeln, wie verlaufen dann die Prozesse dieser Entwicklung; d.h. inwiefern ändern sich Elemente der Vorstellungen sukzessive in Relation zur Situation?

Zur Beantwortung dieser Fragen ist eine Analyse auf der Mikroebene der Vorstellungsentwicklung bzw. Wissenskonstruktion notwendig, mit der nicht nur die genauen Vorstellungen erfasst werden, sondern auch die kontextspezifischen Entwicklungsprozesse nachverfolgt werden können.

Die Kontextabhängigkeit macht es notwendig, vor der Beschreibung eines Analyseinstruments für die Mikroebene eine Klärung der relevanten Kontexte durchzuführen: Da sich die vorliegende Arbeit mit der Vorstellungsentwicklung in der Stochastik beschäftigt, erfolgt zunächst eine stoffdidaktische Analyse des Phänomens Zufall aus schulmathematischer Perspektive (Kapitel 2). Aus den

Besonderheiten und spezifischen Anforderungen dieses Gegenstands resultieren verschiedene Vorstellungen und Hürden im Lernprozess, für die das Analyseinstrument sensibel gestaltet werden muss (Kapitel 3). Weiterhin kann Kontext nicht nur die mentalen Voraussetzungen der Lernenden bezeichnen, sondern auch konkrete lokale Elemente der genutzten Lernsituation. Auch deren Besonderheiten müssen also untersucht werden (Kapitel 4).

All diese Überlegungen sind in den Theoriebildungsprozess zur Konstruktion des Analyseinstruments für die Mikroperspektive eingeflossen und sollen daher zunächst erläutert werden.

2 Stoffdidaktische Überlegungen zum Phänomen Zufall

In diesem Kapitel soll vorgestellt werden, welche mathematischen Inhalte Gegenstand der durchgeführten Untersuchung sind. Grundsätzlich wird für die Konzeptualisierung des Phänomens Zufall ein Ansatz gewählt, in den Überlegungen aus den zwei Teilgebieten der Stochastik einfließen: Überlegungen aus der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* werden mit *statistischen* Untersuchungen von Daten verknüpft. Die konsequente Verbindung dieser beiden Teildisziplinen ist eine der zentralen Forderungen, die an eine substanzielle Auseinandersetzung mit der Stochastik in der Sekundarstufe I und II gestellt werden (vgl. Schupp 1982; Biehler 1994; Hußmann 2003, S. 166 f.; AK Stochastik 2003). Im Folgenden wird zunächst die Beschäftigung mit Mustern und Variabilität in der schulischen Stochastik allgemein beleuchtet (Kapitel 3.1), bevor das empirische Gesetz der großen Zahlen und dessen mathematische Modellierung (Kapitel 3.2) erläutert und in Hinblick auf verschiedene theoretische und empirische Zugänge diskutiert wird (Kapitel 3.3).

2.1 Stochastik als Mathematik der Muster und Variabilität

Eine moderne Auffassung von Mathematik sieht den Begriff der *Muster* als zentral an:

> „Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern. Der Mathematiker untersucht abstrakte ‚Muster' – Zahlenmuster, Formenmuster, Bewegungsmuster, Verhaltensmuster und so weiter. Solche Muster sind entweder wirkliche oder vorgestellte, sichtbare oder gedachte, statische oder dynamische, qualitative oder quantitative, auf Nutzen ausgerichtete oder bloß spielerischem Interesse entspringende" (Devlin 1998, S. 3 f.; vgl. auch Wittmann und Müller 2008).

Für die vorliegende Arbeit sollen unter dem Begriff ‚Muster' alle Regelmäßigkeiten verstanden werden, die sich durch ein wiederkehrendes Erscheinen ihrer Elemente auszeichnen, sowie „die Merkmale (…), die einer sich wiederholbaren Sache *zugrunde liegen*. Muster kann also gleichzeitig der Grundbaustein sein (z.B. eine Denk-, Gestaltungs- oder Verhaltensweise, die zur Reproduktion bestimmt ist) und das nach gleichförmiger Wiederholung entstandene Ergebnis" (Lüken 2012, S. 20; Hervorhebung im Original).

In der Stochastik werden diese Muster an Daten aus zufälligen Vorgängen herangetragen durch mathematische Modellierungen: Wahrscheinlichkeiten treffen beispielsweise eine Vorhersage für relative Häufigkeiten, die sich mehr oder weniger gut in erzeugten Versuchsausgängen identifizieren lassen. Dabei bleibt

S. Schnell, *Muster und Variabilität erkunden*,
DOI 10.1007/978-3-658-03805-2_2, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

ein ‚Rest‘ übrig, der sich nicht über die Modellierung erfassen lässt (vgl Borovcnik 2005; Eichler und Vogel 2009, S. 168 f.).

Hier liegt der zentrale Unterschied zu Mustern aus kausalen Zusammenhängen: Muster in der Stochastik sind durchsetzt mit *Variabilität*: Bei Wiederholung eines zufälligen Vorgangs können auch unter exakt gleichen Bedingungen andere Ereignisse auftreten; es finden also Abweichungen und Störungen statt (vgl. Eichler und Vogel 2009, S. XII; Wild und Pfannkuch 1999, S. 235 ff.). Für die Variabilität im Einzelfall ist im Kontext von klassischen Experimenten zur Wahrscheinlichkeitsrechnung (also mit Zufallsgeräten wie Würfeln, Münzen oder Glücksrädern) keine andere Ursache tragfähig als der Einfluss des Zufalls (auch bezeichnet als ‚unerklärter Teil der Variabilität‘, vgl. Eichler und Vogel 2009, S. 137; Borovcnik 2005).
Moore (1990) nutzt dieses Zusammenspiel von Mustern und Variabilität zur Definition von zufälligen Phänomenen:

> „Phenomena having uncertain individual outcomes but a regular pattern of outcomes in many repetitions are called *random*. ‘Random’ is not a synonym for ‘haphazard’ but a description of a kind of order different from the deterministic one that is popularly associated with science and mathematics.” (S. 98, Hervorhebung im Original).

‚Zufall‘ ist demnach von ‚Willkür‘ abzugrenzen aufgrund der Identifizierbarkeit von vorhersagbaren Mustern auf lange Sicht, obwohl im Einzelfall ein Versuchsausgang nicht sicher vorhersagbar ist. Ohne diese Musterhaftigkeit würden Wahrscheinlichkeiten als mathematische Modellierungen der Muster ihren Sinn verlieren (vgl. Prediger 2008).

2.2 Das empirische Gesetz der großen Zahlen

Bei dem von Moore beschriebenen Phänomen der auf lange Sicht auftretenden Muster handelt es sich um eines der grundlegenden ‚Gesetze‘[1] der Stochastik, das als ‚empirisches Gesetz der großen Zahlen‘ bezeichnet wird. Damit wird beschrieben, dass sich relative Häufigkeiten eines zufälligen Vorgangs mit zunehmender Anzahl an Versuchswiederholungen um einen bestimmten Wert stabilisieren. Dieser Wert entspricht ungefähr der theoretisch bestimmbaren Wahrscheinlichkeit eines Zufallsversuchs, beim Wurf mit einem 20seitigen Würfel mit sieben roten Flächen also dem Wert 0,35 für das Ereignis ‚Rot‘ (bezeichnet als $P(A)$). Die folgende Abbildung 2.1 zeigt ein Verlaufsbild der kumulierten relativen Häufigkeiten bei einer wachsenden Anzahl n von Versuchswie-

---

[1] Dabei handelt es sich in der Stochastik nicht um Gesetze im naturwissenschaftlichen Sinne, wie im Folgenden diskutiert wird (vgl. Borovcnik 2008).

derholungen mit zunächst starken Schwankungen der relativen Häufigkeiten bei wenigen Wiederholungen, die dann immer weiter abnehmen.

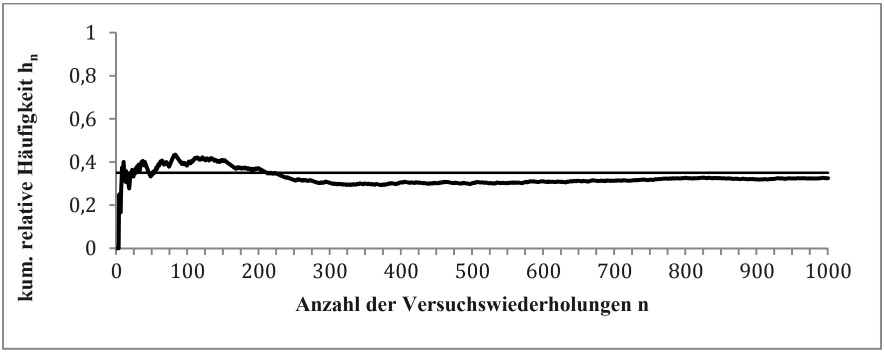

Abbildung 2.1 Ergebnisse einer Excel-simulierten Versuchsreihe bei einer objektiven Wahrscheinlichkeit $P(A) = 0{,}35$ (horizontale Linie); dargestellt sind die kumulierten relativen Häufigkeiten des Ereignisses A bei der jeweiligen Anzahl an Versuchswiederholungen (insgesamt 1000 Wiederholungen)

Während die Abnahme der Schwankungen der relativen Häufigkeiten gezeigt werden kann (vgl. Eichler und Vogel 2011, S. 110 f.), ist das ungefähre Annähern des theoretischen Wertes P(A) eine Erfahrungstatsache oder ein Naturgesetz, das nicht mathematisch bewiesen werden kann. Dies lässt sich folgendermaßen über einen Widerspruch zeigen (vgl. Eichler und Vogel 2011, S. 104):

> Wenn sich die relativen Häufigkeiten $h_n(A)$ eines Ereignisses A um einen eindeutigen Grenzwert P(A) stabilisieren, dann müsste gelten: Für jeden beliebigen Abstand (bezeichnet als ε) existiert eine Schranke n_0, so dass alle $h_n(A)$ bei mehr als n_0 Versuchswiederholungen einen kleineren Abstand zu P(A) haben als ε.
>
> Also:
>
> $\forall \varepsilon > 0 \colon \exists n_0 \epsilon \mathbb{N} \colon |h_n(A) - P(A)| < \varepsilon \; \forall n > n_0$
>
> Geht man nun davon aus, dass sich die relativen Häufigkeiten ab n_0 Wiederholungen stabilisiert haben, so kann man ein ε auswählen und die Aussage annehmen, dass der Abstand aller weiteren relativen Häufigkeiten $h_n(A)$, $n>n_0$ zum theoretischen Wert P(A) immer kleiner als ε ist.
>
> Tritt nun wiederholt in Folge das Ereignis A ein, so nimmt der Abstand $|h_n(A) - P(A)|$ zu und überschreitet den Wert ε.

Es handelt sich demnach nicht um einen analytischen Grenzwert; die relativen Häufigkeiten bei einer großen Anzahl an Versuchswiederholungen stellen nur einen *Schätzwert* dar, der gegebenenfalls im weiteren Verlauf der Experimente verworfen werden muss (vgl. Kütting 1994, S. 44).

Das empirische Gesetz der großen Zahlen vereint Muster und Variabilität über die Anzahl der Versuchswiederholungen: Je kleiner die Versuchsanzahlen sind, desto stärker variieren die relativen Häufigkeiten; je größer sie sind, desto besser ist ein Muster identifizierbar. Abbildung 2.2 stellt dieses Zusammenspiel dar; dabei sollen Regelmäßigkeiten und Abweichungen nicht als sich gegenseitig ausschließende Phänomene verstanden werden; stattdessen wird veranschaulicht, dass eine hohe Variabilität bei wenigen Wiederholungen eines zufälligen Vorgangs die Identifikation eines Musters erschwert, während bei vielen Wiederholungen das Muster trotz singulärer Abweichungen in den relativen Häufigkeiten gut erkennbar ist.

Abbildung 2.2 Beobachtbarkeit von Mustern und Variabilität in Abhängigkeit von der Zahl der Versuchswiederholungen

Das empirische Gesetz der großen Zahlen ist grundlegend, um mathematischen Wahrscheinlichkeitsaussagen Sinn zu verleihen: „[It] explains why one *can* adopt probabilistic conceptions in a successful way *although* random cannot be calculated for single outcomes. It explains the *sense* and the *preconditions*, but also the limits of probabilistic considerations“ (Prediger 2008, S. 16, Hervorhebungen im Original). Gemeint ist damit, dass obwohl einzelne Versuchsausgänge nicht sicher vorhersagbar sind, die Beobachtbarkeit von sich stabilisierenden Mustern ermöglicht jedoch, dass Vorhersagen aufgrund von Wahrscheinlichkeitsüberlegungen getroffen werden können. Daher handelt es sich bei der Unterscheidung der kurzen und langen Sicht um den zentralen *Kontext,* vor dem die Gültigkeit von Vorstellungen betrachtet werden muss. Bezogen auf die präskriptive Dimension des horizontalen Conceptual Change (vgl. Kapitel 1.2) bedeutet dies, dass Lernende befähigt werden müssen, Vorstellungen in Hinblick auf ihre Gültigkeit für die kurze oder lange Sicht zu aktivieren (vgl. Prediger 2005; Prediger 2008): Während die Annahme von Unvorhersagbarkeit tragfähig ist für die kurze Sicht (einzelne zufällige Vorgänge oder eine sehr geringe Anzahl an Wiederholungen), ist die zuverlässige Vorhersagbarkeit beobachtbarer Muster tragfähig für die lange Sicht (viele Versuchswiederholungen).

Zur Aneignung des empirischen Gesetzes der großen Zahlen durch Lernende können verschiedene Perspektiven genutzt werden, die im Folgenden charakterisiert werden.

2.3 Perspektiven auf das empirische Gesetz der großen Zahlen

Das Zusammenspiel aus Variabilität und Zufall bietet reichhaltige Möglichkeiten, verschiedene Untersuchungen anzustellen:

> „Das empirische Gesetz der großen Zahlen und die darin zunächst empirisch anzutreffende Stabilisierung relativer Häufigkeiten ist eine Aufforderung, sich den dort zutage tretenden Besonderheiten zuzuwenden, zu versuchen, diese auszuarbeiten, und zu verstehen, unter welchen Bedingungen sich Stabilisierungen einstellen und wie diese mathematisch zu präzisieren und zu interpretieren sind.“ (Biehler und Steinbring 1982, S. 299).

Dabei ergeben sich verschiedene Möglichkeiten verschiedene Perspektiven auf die erzeugten Daten einzunehmen (vgl. Abb. 2.3).

Die Blickrichtungen verfolgen unterschiedliche Untersuchungsinteressen:
Bei der *dynamischen* Betrachtung einer wachsenden Anzahl von Versuchswiederholungen steht die Stabilisierung der kumulierten relativen Häufigkeiten als Schätzwert für eine Wahrscheinlichkeit *P(A)* auf lange Sicht im Vordergrund (vgl. Abb. 2.3). Freudenthal (1972) kritisiert jedoch, dass bei der alleinigen Einnahme dieser Perspektive die naturgemäße Variabilität und damit ein zentrales stochastisches Charakteristikum verloren geht. Ergänzend dazu kann die *statisch-komparative Sichtweise* eingenommen werden, bei der Serien von Versuchsreihen mit gleicher Anzahl an Wiederholungen betrachtet werden (vgl. Abb. 2.4). Hier steht die Frage nach der Schwankungsbreite der relativen Häufigkeiten in Abhängigkeit von einem festen n im Vordergrund (vgl. Borovcnik 1992, S. 107; Riemer 1991, S. 19). Die Abnahme der Schwankungen bei größeren n kann über das $1/\sqrt{n}$- Gesetz modelliert werden (vgl. Kapitel 2.4.2).