RESEARCH

Jasmin Sprenger
Anke Wagner
Marc Zimmermann *Hrsg.*

Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen

Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule

Springer Spektrum

Mathematatik lernen, darstellen, deuten, verstehen

Jasmin Sprenger • Anke Wagner
Marc Zimmermann (Hrsg.)

Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen

Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule

Springer Spektrum

Herausgeber
Jasmin Sprenger
Anke Wagner
Marc Zimmermann

Pädagogische Hochschule Ludwigsburg
Deutschland

ISBN 978-3-658-01037-9 ISBN 978-3-658-01038-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-01038-6

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-spektrum.de

Grußwort

Zum 60. Geburtstag von Frau Professorin Dr. Silvia Wessolowski am 23. Mai 2012 und Frau Professorin Dr. Laura Martignon am 30. Mai 2012 haben KollegInnen und WegbegleiterInnen eine Reihe von Beiträgen verfasst, die aufzeigen, wie es gelingen kann, dass Kinder Mathematik leichter lernen können. Allen AutorInnen sei an dieser Stelle ganz besonders herzlich gedankt.

Frau Silvia Wessolowski kam 1995 an die Pädagogische Hochschule Ludwigsburg. Nach einem kurzen Gastspiel von 2003 bis 2004 als Professorin an der Pädagogischen Hochschule Schwäbisch Gmünd am Institut für Mathematik und Informatik, kam sie zurück nach Ludwigsburg, wo sie seither – von 2004 bis 2011 als besonders umsichtige Leiterin unseres Instituts für Mathematik und Informatik – tätig ist. Ihre Forschungsfelder umfassen die frühe mathematische Bildung, das Mathematiklernen im jahrgangsgemischten Anfangsunterricht sowie die schulische Förderung bei Rechenstörungen. Neben ihren zahlreichen Aufgaben in der Hochschullehre zählt zu ihren besonderen Verdiensten die Leitung der Beratungsstelle für Kinder mit Lernschwierigkeiten in Mathematik. Schwerpunkt dieser Stelle ist die Entwicklung und Erprobung von Fördermaßnahmen zur Überwindung von Rechenstörungen bei Grundschulkindern mit den damit verbundenen Diagnosemöglichkeiten.

Um die vielfältigen beruflichen Lebensstationen und Forschungsinteressen von Frau Laura Martignon aufzuzeichnen, bedarf es eigentlich eines eigenen Buches. Hier nur kurz die wichtigsten Stationen in Stichworten: Geboren in Bogota, kam Frau Martignon nach der Licenciatura der Universidad Nacional in Bogota nach Tübingen zum Mathematikstudium, das sie mit Diplom und Promotion abschloss. Es folgten Professuren in Carbondale, Illinois an der Universität von Brasilia, bevor sie nach Deutschland zurückkehrte und an der Universität Ulm in Neuroinformatik habilitierte. Weitere Stationen führten sie über die Universität Düsseldorf, das Münchener Max-Planck-Institut für Psychologische Forschung, an das Max-Planck-Institut für Bildungsforschung in Berlin, wo sie zu Heuristiken von menschlichen Entscheidungen in Situationen der Ungewissheit forschte. Seit 2003 ist Laura Martignon Professorin an der Pädagogischen Hochschule in Ludwigsburg mit einem Schwerpunkt in Geschlechterforschung. Ihre Forschungsinteressen umfassen neben der mathematischen Modellierung von Heuristiken und der Geschlechterforschung das frühe mathematische Denken von Kindern sowie Ansätze der Schulmathematik für Fragen der Nachhaltigkeit.

Am Ende dieses Grußworts möchten wir unseren beiden Jubilarinnen nochmals ganz herzlich zu Ihrem 60. Geburtstag gratulieren. Wir wünschen Ihnen für die nächsten Jahre an unserem Institut viele Erfolge, sowohl in der Lehre als auch in der Forschung, vor allem aber Glück und Gesundheit.

Ludwigsburg, im Mai 2012

Andreas Zendler und Joachim Engel

Vorwort

Wie *lernen* Kinder Mathematik? Wie können Lernende und Lehrende Mathematik so *darstellen*, dass intensive Kommunikationsprozesse beim Mathematiklernen angeregt werden? *Deuten* Schülerinnen und Schüler bestimmte mathematische Darstellungen während des Lernprozesses anders als Lehrende? Gibt es Diskrepanzen? Wenn ja, welche? Wie kann es gelingen Kindern und Jugendlichen das Lernen von Mathematik zu erleichtern? Wie können Lehrende Kinder dabei unterstützen Mathematik zu *verstehen*?

Die eingangs aufgeführten Fragen stellen Themenstränge aus den Forschungs- und Lehrtätigkeiten der beiden Jubilarinnen, Frau Wessolowski und Frau Martignon - beide Professorinnen im Bereich der Mathematik und ihrer Didaktik an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg - dar. Silvia Wessolowski arbeitet seit vielen Jahren hauptsächlich im Bereich der Primarstufendidaktik. Ihre Arbeitsschwerpunkte sind insbesondere der Umgang mit Lernschwierigkeiten sowie die Förderung von Kindern mit Rechenschwäche. Aus diesem Grund leitet sie auch die seit 1997 an der PH bestehende Arbeitsstelle für Kinder mit Lernschwierigkeiten in Mathematik. Das Arbeitsgebiet von Laura Martignon ist sehr breit gefächert. In den letzten Jahren beschäftigte sie sich in ihrer Forschung aber hauptsächlich mit der Darstellung, der Beurteilung und der Kommunikation von Risiken, sowohl bei Kindern in der Primarstufe als auch bei Erwachsenen.

An der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg arbeiten im Fachbereich Mathematik sowohl Kolleginnen und Kollegen, die sich seit vielen Jahren mit der Mathematik und ihrer Didaktik auseinandersetzen, wie auch junge NachwuchswissenschaftlerInnen, bei denen es sich unter anderem um Doktoranden der beiden Jubilarinnen handelt. Zu unserer Freude zeigten alle Kolleginnen und Kollegen des Faches Mathematik große Spontanität und erklärten sich bereit, ihre Gedanken und Überlegungen zu der Thematik zu einem Beitrag zusammenzufassen. Auch ehemalige MitarbeiterInnen bzw. auch einige Kolleginnen und Kollegen von anderen Hochschulen, die mit den beiden Jubilarinnen in den letzten Jahren enger zusammengearbeitet haben, konnten für die Erstellung dieser Festschrift gewonnen werden. An dieser Stelle ein herzliches Dankeschön allen Autorinnen und Autoren für dieses Engagement.

Die Fachbeiträge in der vorliegenden Festschrift greifen Teile der Forschungs- und Lehrgebiete von Frau Wessolowski und Frau Martignon auf und geben gleichzeitig Einblick in die unterschiedlichen Sichtweisen der Autorinnen und Autoren. Zunächst geben Jens Holger Lorenz und Sebastian Kuntze in ihren

Leitartikeln einen Überblick über das Lernen und Verstehen von Mathematik im Kopf von Kindern sowie die Bedeutung von Darstellungen und deren Nutzen im Mathematikunterricht vom Kindergarten bis zur Hochschule. Die nachfolgenden Beiträge zeigen unterschiedliche Sichtweisen dieser Themen auf mit Schwerpunkten auf den jeweiligen Bildungseinrichtungen. Das frühe mathematische Lernen in Kindertagesstätten bzw. Kindergärten wird in Beiträgen von Elisabeth Rathgeb-Schnierer, Esther Henschen und Martina Teschner sowie Stefanie Schuler in den Blick genommen. Sichtweisen zur Primarstufe erfolgen von Jutta Schäfer, Stefanie Uischner, Andreas Kittel, Jasmin Sprenger, Birgit Gysin und Dieter Klaudt. Die Beiträge von Joachim Engel und Ute Sproesser, Alexandra Scherrmann, Andrea Hoffkamp und Andreas Fest, Anke Wagner und Claudia Wörn, Ute Sproesser und Christoph Till, Annika Dreher sowie Gerald Wittmann beziehen sich auf die Sekundarstufe. Abgerundet wird die Festschrift durch Beiträge zur mathematischen Hochschullehre von Marc Zimmermann und Christine Bescherer, Christian Spannagel sowie Sebastian Kuntze.

Ob eine solche Festschrift die Arbeit und das Wirken unserer beiden Kolleginnen entsprechend würdigen kann, dürfen die LeserInnen des Bandes letztlich selbst entscheiden. Wir wünschen in jedem Fall den beiden Geburtstagskindern Frau Wessolowski und Frau Martignon alles Gute zu ihrem 60. Geburtstag, insbesondere Gesundheit auch für die jeweiligen Familien, viel Erfolg in ihrer weiteren Forschungs- und Lehrtätigkeit und viel Freude beim Lesen der Festschrift.

Ludwigsburg, im Mai 2012

Jasmin Sprenger, Anke Wagner und Marc Zimmermann

Inhalt

Sekundarstufe

Basisartikel

Zahlen und Rechenoperationen

Wie sind sie im Kopf des Lernenden?

Jens Holger Lorenz
Pädagogische Hochschule Heidelberg

Kurzfassung: Die Entstehung mathematischer Begriffe im kindlichen Kopf wird in der Kognitionspsychologie lebhaft diskutiert, nicht hingegen in der Mathematikdidaktik. Aus den Bezugswissenschaften liegen empirische Befunde vor, welche die Entstehung und die Veränderung arithmetischer Konzepte von der Geburt bis in die späte Schulzeit beschreiben. Die didaktischen Implikationen lassen hingegen noch auf sich warten. Es wird versucht, die unterschiedlichen Sichtweisen darzustellen und die theoretischen Konfliktpunkte zu benennen. Hierbei wird insbesondere auf die Änderung von Repräsentationen im Laufe der Lernzeit eingegangen, die sich in unterschiedlichen Formaten zeigen und Auswirkungen auf erfolgreiches und weniger erfolgreiches Lernen haben.

1 Rechnen im Kopf

Natürlich rechnen wir gut und richtig, zumindest bei leichten Aufgaben. Aber was passiert dabei in unserem Kopf? Wie denken wir Zahlen und wie werden Rechenoperationen repräsentiert? Diese Frage zielt auf das Denken mit Zahlen, und sie könnte vielleicht, zumindest teilweise, mit den allgemeinen Aussagen der Denk- bzw. Kognitionspsychologie beantwortet werden. Also beginnen wir allgemein, bevor wir auf das Spezielle der Zahlen eingehen. Die Inhalte unseres Denkens sind die Repräsentationen von etwas, das möglicherweise außerhalb von uns liegt, und sie sind immer symbolisch. Das Format allerdings kann im Denken unterschiedlich sein: gestisch/motorisch, bildhaft, sprachlich oder eben auch mathematisch-symbolisch. Diese Formate bilden die „Medien des Denkens“ (Aebli, 1980). Denken ist Prozess des Operierens mit diesen Symbolen in unterschiedlichen Formaten. Hierbei erzeugt, d.h. konstruiert Denken neues Wissen, ohne dass externe Information zusätzlich hinzukommen muss.

J. Sprenger et al. (Hrsg.), *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen,*
DOI 10.1007/978-3-658-01038-6_1, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

1.1 Wie entsteht ein Begriff im Kopf?

Ein Grundschulkind weiß z.B., dass 5 + 5 = 10 ist und zeigt zum Beweis seine beiden Hände. Damit ist sein Wissen in einer bestimmten Form, nämlich als Sprachkette gespeichert, mehr nicht. Durch Nachdenken kann es aber den (logischen) Schluss ziehen, dass aus der Tatsache, dass 2mal 5 10 ist, auch gelten muss, dass 4mal 5 wohl 20 sein wird. Hier ist nicht gesagt, wie das Kind auf den Schluss kommt, ob es sich bildhaft die erste Tatsache, $2 \cdot 5 = 10$, als beide Hände neben einander gelegt vorstellt und dann diese wiederum noch einmal vorstellungsmäßig daneben legt, oder ob andere Formen des Denkens vorliegen. Es gelangt aber zu einer Einsicht, die auf seiner Repräsentation eines Denkinhalts beruht.

Die wesentlichen Charakteristika des Denkens sind damit benannt: Es erzeugt Bedeutung und neues Wissen, es ist aktiv, kumulativ, idiosynkratisch und zielgerichtet. Wissen ist also keine Abbildung sondern eine (persönliche) Konstruktion mittels organisierender Schemata (Resnick, 1986) und Denken ist der Prozess des Operierens mit Symbolen, die Wissen (subjektive Erfahrungen, Vorstellungen, Gedanken) repräsentieren.

Für die didaktische Forschung stellt sich nun die Frage, wie die Repräsentationen von Zahlen und Rechenoperationen, von Brüchen und Funktionen, von geometrischen Abbildungen und dem schwierigen Wahrscheinlichkeitsbegriff in den Kopf des Schülers kommen. Beginnen wir ganz früh: Piaget meinte, dass das Kleinkind sensumotorische bzw. enaktive Schemata entwickelt, um die Welt „zu begreifen"; und diese stellen die Bausteine der weiteren kognitiven Entwicklung dar (Rumelhart et al., 1986, nennen sie „buildung blocks"). Nach Piaget entstehen die Schemata durch Verinnerlichung, durch „Interiorisierung" der regulären Struktur von Handlungen. Auch dies erscheint auf den ersten Blick überzeugend, aber es erhebt sich die Frage, wie diese Interiorisierung von statten geht. Die pädagogische Annahme, „von der Hand in den Kopf" erscheint zu schlicht, ein solcher Automatismus kann nicht unterstellt werden. Und sie wird durch die Erfahrung mit rechenschwachen Kindern widerlegt, die nicht rechenschwach sind, weil sie zu wenig Handlungserfahrung besäßen, im Gegenteil. Sie besitzen meist mehr als ihre Klassenkameraden. Zumindest setzt der Verinnerlichungsvorgang voraus, dass Handlungsmerkmale im Gedächtnis fixiert und einer Abstraktion unterworfen werden (Campbell, 2005).

Die Addition als Handlungsvollzug ist die Vereinigung von Mengen, zumindest in dieser Form erleben die Kinder sie im ersten Schritt. Zu einer Menge wird eine weitere geschoben, angeklebt, angeheftet, gefunden, wie auch immer: sie kommt hinzu. Die Addition als Begriff, als Herauslösen aus der Wirklichkeit, ist aber eine doppelte Abstraktion: auf die Ebene der Mengen und von dort zur

Ebene der Zahlen. Wird von einer Menge etwas entfernt, weggenommen, abgeschnitten, verbrannt, geht verloren: Dann handelt es sich um eine Subtraktion. Dies ist die prototypische Mengenhandlung, die als Basis dem Begriff der Subtraktion zugrundeliegt.

Ähnlich verhält es sich mit der Multiplikation als wiederholter Addition, d. h. der wiederholten Ausführung einer Handlung, und der Division als das Aufteilen einer Menge. Sicher nehmen Grundschüler diese Handlungen vor, aber es ist kein Automatismus, um aus der Aufteilhandlung eine kraftvolle Vorstellung des „Enthaltenseins“ einer Teilmenge in einer Obermenge zu entwickeln, die für die Bruchrechnung notwendig ist. Anderenfalls wird die Aufgabe 14 : ¼ für die Schülerinnen und Schüler zur unverstandenen Leerformel „Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit dem Kehrwert multipliziert.“ Eine auf Verständnis gegründete Repräsentation liegt nicht zugrunde. Und dieses Unverständnis der Division, sicher die schwierigste Operation in der Grundschule, führt nicht nur in der Bruchrechnung zu Folgeproblemen, sondern auch in der Algebra, in den Naturwissenschaften (was bedeutet Weg durch Zeit?) bis hin zur Differentialrechnung.

Die jeweiligen Repräsentationen, die den Kindern zu Verfügung stehen, sind unterschiedlicher Art: Der Handlungsvollzug (die Vereinigung von Mengen) ist eine enaktive Repräsentation, die überführt wird in eine ikonische Repräsentation und schließlich in eine sprachliche Repräsentation, bevor sie in eine mathematisch-symbolische Form mündet. Es bleibt als mathematikdidaktisches Forschungsproblem bestehen, diese Übergänge zu beschreiben und zu erklären. (Mit den von Bruner beschriebenen Repräsentationsformen enaktiv, ikonisch, symbolisch sind keine didaktischen Stufen in ihrer Abfolge gemeint!)

Auch andere Ansätze, Formen des Wissen und der Repräsentationen zu beschreiben, führen auf empirische Widersprüche. Die Unterscheidung deklarativen vs. prozeduralen Wissens löst die Theorieprobleme der Mathematikdidaktik nicht hinreichend auf. So wird deklaratives Wissen als semantisches Netzwerk aufgefasst, als Begriffsgefüge, wohingegen prozedurales Wissen als nichtbewusste kognitive Operationen fungiert, als „Produktionen“ (Metapher: Computerprogramm).

Üblicherweise wird angenommen, dass deklaratives Wissen vor dem prozeduralen Wissen entsteht. Aufgebautes prozedurales Wissen ist leichter abrufbar, aktivierbar, man denke etwa an die Einmaleins-Reihen, die als Lösungsverfahren für die Multiplikation dem Schüler zur Verfügung stehen, an die schriftlichen Rechenverfahren, später die binomischen Sätze, die Verfahren, Polynome zu differenzieren oder zu integrieren usw. Bevor also diese automatisierten Verfahren als Routinen verfügbar sind, so besagt zumindest die Theorie, müssten die semantischen Netzwerke, also die Begrifflichkeit (etwa der Multiplikation) vorhanden sein. Nun weiß jede Lehrerkraft von Klasse 1 bis 13 (und auch im Mathematikstudium), dass dem keineswegs so ist. Gerade die leistungsschwächeren Schüler entfalten ein großes Wissen der Routinen, ohne über ein Verständnis der Begriffe zu verfügen.

Ähnliches gilt auch für die vorschulische Phase des Erwerbs mathematischen Wissens: Der kindliche Zählvorgang gelingt als Aufbau prozeduralen Wissens bereits während des Spracherwerbs, also im Alter von 2;6 – 3 Jahren und durchläuft die bekannten Stufen der Zählkompetenz. Dies bedeutet, dass der Aufbau konzeptionellen, also deklarativen Wissens, dem prozeduralen Wissen zeitlich nachgeordnet ist und auf diesem fußt.

2 Zahlenrepräsentationen im Vorschulalter

Empirische Studien belegen, dass bereits Säuglinge in sehr frühem Alter Mengenanzahlen unterscheiden können (Wynn, 1990, 1992). Nicht nur dies, im Alter von wenigen Monaten sind sie sogar in der Lage, die Anzahl von Elementen in einer Menge (unabhängig vom Typ der Elemente) und die Anzahl auditiv dargebotener Signale einander zuzuordnen. Die Frage aber, ob hiermit das Bestehen frühkindlicher arithmetischer Kompetenzen belegt ist, wird kontrovers diskutiert. Dies würde der Annahme Piagets widersprechen, der davon ausgeht, dass sich Zahlen und Rechenoperationen als Ergebnis einer generellen, unspezifischen Entwicklung, insbesondere der Koordination von Seriation und Klassifikation, entwickeln.

Damit stellt sich ein weiteres theoretisches Problem ein: Ist die Repräsentation von Zahlen und Rechenoperationen ein spätes Produkt, wie Piaget annimmt, oder liegen bereits entsprechende Repräsentationen beim Säugling vor? Und wie sehen diese Repräsentationen aus?

Es lässt sich im Gegensatz zu Piaget festhalten, dass die Invarianz wesentlich früher entwickelt und beim Kind vorhanden ist, als die angenommene Altersgrenze von fünf Jahren angibt (Gelman, 1990a, b). Zudem ist auf den in der Mathematikdidaktik immer noch schwelenden Streit hinzuweisen, ob sich die Invarianz oder das Zählen früher entwickelt. Ohne sämtliche empirischen Befunde hier referieren zu wollen, so lässt sich doch festhalten, dass sich die Konservierung sehr früh (< 5 J) einstellt, es aber sich am kindlichen Verhalten nicht ablesen lässt, ob sich die richtigen Konservierungsantworten über Invarianzurteile, über schnelles Zählen oder über Subitizing, das heißt direkte Wahrnehmungsurteile einstellen.

Es ist auf Grund der empirischen Lage anzunehmen, dass sich eine Repräsentationsänderung einstellt, da jüngere Kinder einen höheren Zeitbedarf bei ihren Urteilen aufweisen als ältere Kinder. Dies lässt sich erklären, wenn man annimmt, dass jüngere Kinder zählen, ältere Kinder hingegen logisch schließen, d.h. dass sie unterschiedlich zu ihren Lösungen kommen.

Kehren wir noch einmal zurück zu der frühkindlichen arithmetischen Anzahlunterscheidung, die sich im Alter von weniger als einem halben Jahr nachweisen lassen und die nicht modalitätsspezifisch nur nachweisbar sind, sondern auch intermodal (Starkey et al., 1990). Mehr noch, ab dem Alter von zwölf Monaten sind Kleinkinder in der Lage, Mengenordnung nach der Anzahl vorzunehmen (Sophian, 1996, 1998).

Heißt dies nun, es existieren protoquantitative Schemata, also mathematische Repräsentationen im Kopf des Säuglings? Dies wäre zu weit gehend, aber es existieren in Bezug auf Mengen verschiedene Schemata, insbesondere ein

- „increase-decrease-Schema“ und ein
- „part-whole-Schema“

Auch hier stellt sich die Frage, ob dies nun einen angeborenen Zahlenmodul darstellt. Die Meinungen hierüber gehen auseinander. So wird argumentiert, dass das Urteil über die Anzahl einer Menge im Alter von wenigen Monaten lediglich ein „subitizing“ ist, also ein Wahrnehmungsprozess (Glasersfeld, 1982; Mack, 2005), andere vermuten, dass es konzeptionell gesteuert (Mandler et al., 1982; Gelman, 1990) sei. Zumindest lässt sich auf dem aktuellen Stand der empirischen Befunde festhalten, dass es sich nicht (nur) um eine angeborene Fähigkeit im Bereich der visuellen Wahrnehmung handelt. Die beobachtete Intermodalität setzt vielmehr voraus, dass es ein einheitliches Format für numerische Informationen (Anzahl und Anzahlveränderungen) gibt. Die Anzahl aber ist etwas, das das Kind der Umwelt aufdrückt, sie ist nicht wahrnehmbar wie die Farbe „Blau“.

Andererseits setzt die intermodale Eins-zu-Eins-Zuordnung kein Wissen über Zahlen („3“), oder Bezeichnungen („+1“) voraus, sondern ist lediglich die kognitive Basis für das anschließende Lernen.

Die Entwicklung der Zahlwortreihe beginnt als (fehlerhafte) Sprachkette, ohne Bewusstsein von Prinzipien. Zählprinzipien entwickeln sich im Laufe des Gebrauchs der Zahlwortreihe, insbesondere

- das Prinzip der Eins-zu-Eins-Zuordnung
- das Prinzip der stabilen Ordnung

- das Kardinalprinzip
- Abstraktionsprinzip und schließlich
- das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung

Aber: Diese Prinzipien sind nicht bewusst und schon gar nicht explizit versprachlichbar, die Kinder können sie nicht benennen. Und die Prinzipien werden in bestimmten Bereichen angewendet, sie sind aber nicht übertragbar.

Fasst man die Befunde zusammen, dann stellt man fest: Das Lernen verläuft in Phasen! Dies ist zwar keine umwerfende oder gar neue Entdeckung, es erklärt auch nicht, wie Zahlen und Rechenoperationen im Kopf repräsentiert werden und wie sie sich entwickeln. Nur wird deutlich, dass dies für sämtliche Lernprozesse gilt. Natürlich können die Schülerinnen und Schüler in der frühen Sekundarstufe erkennen, dass ein Schatten größer wird, wenn die Lichtquelle näher an das Objekt rückt, während der Abstand Objekt-Leinwand gleich bleibt. Sie verwenden dies an Kindergeburtstagen zu eindrucksvollen und lustigen Effekten. Die Versprachlichung der Prinzipien, gar die Formulierung der Ähnlichkeitsabbildung bzw. zentrischen Streckung gelingt hingegen noch nicht.

3 Die Veränderung der Repräsentationen im Kopf des Lernenden

Ein für die Mathematikdidaktik brauchbares Konzept, um Veränderungen der Repräsentationen zu beschreiben, liegt im Modell der „Repräsentationsumorganisation“ vor („RR-Modell“, Karmiloff-Smith, 1992). Es beschreibt Lernphasen, die jedes Lernen durchläuft, egal auf welcher Altersstufe und mit welchem Inhalt. Die Phasen sind also keine Stufen im Sinne Piagets.

In dem Modell ist die Phase I eine datengetriebene Lernphase, die aufgrund äußerer Stimuli abläuft. In dieser Phase ist Wissen nur implizit, als Prozedur verfügbar, nicht explizit oder bewusst und daher auch nicht verbalisierbar. Während dieser Phase kommt es additiv zu bereichsspezifischen repräsentationalen Verbindungen, die zur Verhaltensgeläufigkeit („behavioral mastery“) führen. Man denke für das Grundschulalter etwa an die Zahlwortreihe oder Einmaleinsreihen oder die schriftlichen Rechenverfahren, in der Sekundarstufe an die Ausführung der Addition/Subtraktion und Multiplikation/Division in der Bruchrechnung oder gar der Algebra. Nichtverbalisierbar bedeutet, dass die Verfahren zwar durchgeführt werden können, es liegt aber kein versprachlichbares Wissen über Zusammenhänge vor. Die Schüler können natürlich jeweils beschreiben, was sie tun, aber es gelingt ihnen keine Begründung für die Richtigkeit ihrer Verfahren.

In der nächsten Phase, der Phase II /E1 im RR-Modell, kommt es zu einer Repräsentationsänderung. Jetzt kommt es zu einer internen Steuerung, welche die (auch/nur falsche) äußere Information lenkt. Die Repräsentation ist von dieser abgekoppelt, was einen Transfer der vorhandenen Repräsentation in andere Bereiche ermöglicht. Diese Abkopplung ist notwendig mit einem Detailverlust verbunden, d.h. sie ist weniger spezialisiert und daher ist eine Analogiebildung möglich. Das Kind wird z.B. Zehner und Hunderter wie die Einer addieren oder subtrahieren. Aber auch in dieser Phase gilt, dass die Repräsentationen unbewusst und nicht verbalisierbar sind.

Auch in der folgenden Phase II (E2) ist das Wissen nicht verbalisierbar, aber es wird in neuem Format repräsentiert. Diese Repräsentationsänderung führt bereits im Vorschulalter zu bildhaften Vorstellungen bei der Vorhersage von Ergebnissen additiver oder subtraktiver Handlungen (4/5 Jahre; Vilette, 2002; Brannon, 2002).

Die bildhafte Repräsentation ist hierbei in hohem Maße formgebunden und keineswegs analysierbar. Damit sind Verallgemeinerungen nur in beschränktem Maße möglich. In dieser Phase werden die Repräsentationen in anderem Format darstellbar, etwa in Handlungen oder Zeichnungen (auf diese Form der Wissenserfassung durch die Lehrkraft wird leider im Grundschulalter selten zurückgegriffen!). So werden aus den natürlichen Zahlen äquidistante Abstände auf einem Zahlenstrahl, der in der Klasse 5 mit den negativen Zahlen zu einer Zahlengeraden wird, um dann mit den rationalen Zahlen weiter verfeinert zu werden. Addition und Subtraktion werden im Laufe der Grundschulzeit und dann darüber hinaus von Mengenvereinigungen/Restmengenbildungen zu Sprüngen auf diesem (imaginierten) Zahlenstrahl.

Ein mögliches Missverständnis besteht darin zu glauben, dass durch die Verwendung einer Vielfalt von Veranschaulichungsmitteln die Transformationen den Schülern leichter fallen. Dem ist keineswegs so. Im Gegenteil ist die gleichzeitige Verwendung mehrerer Materialien insbesondere bei leistungsschwächeren Schülern problematisch. Die Handlungen, die für eine Rechenoperation an einem Veranschaulichungsmittel durchgeführt werden, verlaufen bei dem nächsten vollkommen anders, sie sind als Handlungen nicht übertragbar. Man vergleiche für die Aufgabe 36+18 die Handlung am Rechenrahmen, am Zahlenstrahl, an der Hundertertafel und den Mehr-System-Blöcken. Die Handlungen sind grundverschieden. Dies gilt auch für die Sekundarstufe, wenn in der Bruchrechnung das Tortenmodell oder ähnliche Veranschaulichungen verwendet werden, die sich dann für die Multiplikation/Division als weniger hilfreich erweisen (wie multipliziert man Tortenteile mit Tortenteilen?).

Erst in der letzten Lernphase III (E3) werden die Repräsentationen bewusst und verbalisierbar. Gleichzeitig werden die Format-/Repräsentationswechsel häufig. So zeigen sich auch bei verbaler und nonverbaler Aufgabendarbietung von Additions- oder Subtraktionssituationen, dass von den Kindern in eine bildhaft-visuelle Repräsentation gewechselt wird (Klein & Brisanz, 2000; Rasmussen et al., 2004).

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass Wissen nicht mit Verständnis gekoppelt sein muss, dass im Rahmen kindlicher arithmetischer Lernprozesse eher das Gegenteil zu erwarten ist. Wissen ohne konzeptionelles Verständnis und notwendige Repräsentationsänderungen sind im Grundschulalter (und leider oft darüber hinaus) sehr vielfältig:

- Kinder zeigen ihr Alter mit Fingern, können aber weder ihr Alter sagen noch die Zahl mit Mengen oder in anderer Form darstellen;

- Die Verwendung des Kommutativgesetzes ($a + b = b + a$), welche die Kinder bei der min-Strategie der Addition anwenden, indem sie vom größeren Summanden weiterzählen; hierbei liegt keine explizite Erkenntnis der Ergebnisgleichheit (Baroody et al., 2003), sondern ein unterschiedliches konzeptionelles Verstehen, (Canobi et al., 1998) vor.

- Für die Verwendung der Inversion ($a + b - b$, vgl. Abbildung 1) muss in der kindlichen Entwicklung zwischen einer qualitativen Inversion, die bereits im Vorschulalter vorliegt und die Ergebnisgleichheit bei Entfernung der hinzu gelegten Objekte, unabhängig von der Ausgangszahl konstatiert, und einer quantitativen Inversion unterschieden werden, die im Schulalter die Ergebnisgleichheit auch bei Entfernung anderer, aber gleich vieler Elemente anzugeben weiß (Rasmussen et al., 2003); noch schwieriger und daher erst in einer höheren Altersstufe zu erreichen ist die Inversion $a + b - a$. Sie bedarf einer sehr formalen Repräsentation.

- Zahlen werden im Vor- aber auch noch im Grundschulalter als Ergebnis eines Zählvorganges repräsentiert. Sie geben das Produkt eines Prozesses an. Dies steht in dieser Form der Zahlbereichserweiterung in den höheren Klassenstufen entgegen, da diese Repräsentationsänderung nicht vorgenommen wird, es erschwert auch die Hinzunahme der Null zu den Zahlen, die von Kindern in einer bestimmten Entwicklungsphase noch abgelehnt wird.

Abbildung 1: a + b - b ist in dieser Form eine von Kindern im Vorschulalter leicht vorstellbare und damit lösbare Aufgabe: Vier blaue Plättchen werden unter ein Tuch geschoben, anschließend drei rote ebenfalls, die anschließend wieder hervorgeholt werden. Wie viele sind noch unter dem Tuch?

Abbildung 2: Zwar ebenfalls a + b - b, aber wesentlich schwieriger

Abbildung 3: Im Vorschulalter praktisch unlösbare Aufgabe (a + b - a)

- Die Zahlen als Anzahlbestimmung von Mengen und damit eng mit dem Zählprozess verbunden bzw. durch ihn repräsentiert stehen kraftvolleren Strategien im Weg.

- Die Rechenoperationen werden ebenfalls verkürzt repräsentiert, so etwa die Addition als Mengenvergrößerung; es bedarf einer Umorganisation, die mit der Überführung der Repräsentation von Zahlen als Mengeneigenschaften hin zu Zahlen als Längenbeziehungen einhergeht. So ist der Zählprozess meist an die Finger gebunden, die Zahl wird aber von einem bestimmten Zeitpunkt der Entwicklung verändert als Länge, etwa „Fünf" als Handbreite, repräsentiert, die nun Analogiebildung und Transfers ermöglicht. Die Modalität der Repräsentation kann immer noch enaktiv sein: Im ersten Fall „Hinzutun" (Mengen), im zweiten Fall „Sprung nach rechts" in dem vorgestellten Zahlenraum, für den es nach neuesten Befunden neuronale Grundlagen als Entwicklungsbedingungen im menschlichen Gehirn gibt (Dehaene, 1999). Ähnliches gilt für die Subtraktion: In einer ersten Phase als Rückwärtszählen repräsentiert, dann als Mengenverkleinerung (Wegnehmen), das Analogiebildung auf verschiedene Mengen erlaubt, das schließlich in der Grundschule umorganisiert wird zu „Sprung nach links" (Längen im vorgestellten Zahlenraum).

- Die Mengenvorstellung von natürlichen Zahlen steht einer Erweiterung auf die rationalen Zahlen entgegen.

- Auch die Vorstellung der Multiplikation als wiederholte Addition führt zu der Repräsentation von „größer werden“, was für rationale Zahlen nicht mehr gilt. Deswegen wird diskutiert, bereits in der Grundschule die Multiplikation über funktionale Beziehungen einzuführen, damit eine erweiterbare Repräsentation möglich ist.

4 Wie erwerben Kinder mathematische Begriffe?

Der Erwerb mathematischer Begriffe gelingt durch die Verbindung verschiedener Repräsentationsformate. Für die Grundschule gilt, dass die Prototypen arithmetischer Operationen aus Handlungen entstanden sind, deren situative Charakteristik abgestreift wurde; sie bleiben aber dynamisch. Die durchaus angemessene enaktive Repräsentation, die auf Handlungen beruht, hat aber eine einschränkende Funktion. So sind bei Text- bzw. Sachaufgaben jene Situationen einfacher für Kinder lösbar, die eine dynamische Struktur aufweisen. Schwieriger sind statische Vergleichsaufgaben, die nicht der prototypischen Operationsvorstellung entsprechen. Auch das Gleichheitszeichen wird von Grundschulkindern gemeinhin interpretiert als „ergibt“, das handlungsgebunden ist, nicht etwa als (mathematisch wünschenswerte) numerische Gleichheit auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens. Aus diesem Grund stellen die symbolischen Darstellungen $b = a + x$, $x = a + b$ oder $x + a = b$ hohe Hindernisse im Verständnis der Grundschüler dar. Diese Repräsentation und ihre hindernde Funktion reichen weit in die Sekundarstufe hinein.

Die Formate bei Sachaufgaben gehen von einer kognitiv nicht lösbaren Transformation aus, nämlich von einer direkten Umsetzung von sprachlich dargebotenen Aussagen zur mathematisch-symbolischen Schreibweise (Sprache → Symbol oder platt ausgedrückt „Frage-Rechnung-Antwort“).

Dies wird auch in den gängigen Modellen zur „Mathematischen Modellierung“ noch so gesehen, indem davon ausgegangen wird, dass die aus der Realität entnommene Situation überführt, „modelliert“ wird auf der mathematischen Ebene. Hier fände dann die Lösung statt, die wiederum rücktransformiert („interpretiert“) wird auf die Sachebene und dort noch einer Plausibilitätsprüfung unterzogen wird („validiert“). Dieser Modellierungskreislauf hat aber die Tücke, dass gerade der Prozess der Modellierung von der Sachebene auf die Ebene der Mathematik weiterhin unklar bleibt. Damit hat man aber didaktisch wenige Möglichkeiten, den „modellierenden Schülern“ Hilfestellungen zukommen zu lassen.

Insbesondere stimmt die Verkürzung auf die schlichte Repräsentationsänderung von Sprache zur Symbolik nicht mit den konzeptionellen Repräsentationen der Kinder überein. Mathematische Begriffe werden vielmehr in Form von Handlungen und/oder in Form bildhafter Vorstellungen über diese Handlungen repräsentiert, die sprachliche und mathematisch-symbolische Repräsentation ist in der Altersstufe der Grundschüler eher Beiwerk und wird lediglich aufgrund der Unterrichtsanforderung und bestenfalls zu kommunikativen Zwecken genutzt. Der mathematische Begriff ist aber erst dann hinreichend repräsentiert, wenn von einem Repräsentationsformat in ein anderes gewechselt werden kann. Diese Transformationen sind der eigentliche Gegenstand des Sachrechnens und müssen im Unterricht betont werden. In diesem Sinne handelt es sich beim Lösen von Sachaufgaben nicht um das Modellieren einer Sachsituation. Es erscheint im Sinne der Kognitionspsychologie (Seel, 2000) plausibler anzunehmen, dass mentale Modelle von der Situation erstellt und mit den zur Verfügung stehenden mathematischen Konzepten und ihren Repräsentationen verglichen werden. Im didaktischen Diskurs ist hier von „Grundvorstellungen" die Rede (vom Hofe, 1995).

Eine Aufgabe soll dies erläutern: „Ein Malermeister schlägt dem befreundeten Auftraggeber vor, entweder ¼ vom Preis nachzulassen und dann 19 % MwSt aufzuschlagen oder umgekehrt erst die MwSt aufzuschlagen und anschließend ¼ nachzulassen. Was ist günstiger?" Diese Aufgabe ruft nicht nur in Klasse 6 und 7, sondern auch in der gymnasialen Oberstufe, ja selbst im Studium lebhafte Diskussionen hervor. Meist geht die Abstimmung pari aus. Dass es sich hier um eine Multiplikation von rationalen Zahlen handelt ((P · 0,75) · 1,19 vs. (P · 1,19) · 0,75) ist den Schülern nicht deutlich, die Multiplikation von rationalen Zahlen liegt lediglich als Verfahren, nicht aber als anwendbare bedeutungshaltige Struktur vor.

Die vorhandenen Repräsentationen der arithmetischen Operationen bestimmen daher die Fähigkeit des Schülers, Sachaufgaben zu lösen, unabhängig von der Klassenstufe. Es ist keine Modellierungsfähigkeit als allgemeine Kompetenz anzunehmen. Aber diese Erkenntnis macht den Unterricht keineswegs einfacher.

5 Literatur

Aebli, H. (1980). *Denken – das Ordnen des Tuns*. Stuttgart: Klett.

Baroody, A.J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A.J. Baroody & A. Dowker (Hrsg.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (S. 1-33). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Baroody, A.J. & Brannon, E.M. (2002). The development of ordinal numerical knowledge in infancy. *Cognition, 83*, 223-240.

Baroody, A.J. & Dowker, A. (Hrsg.) (2003). *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (S. 1-33). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Campbell, J.I.D. (2005). *Handbook of mathematical cognition*. New York: Psychology Press.

Canobi, K.H., Reeve, R.A. & Pattison, P.E. (1998). The role of conceptual understanding in children's addition problem solving. *Developmental Psychology, 34*, 882-891.

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser.

Gelman, R. (1990a). Structural constraints on cognitive development. *Cognitive Science, 14*, 39.

Gelman, R. (1990b). First principles organize attention to and learning about relevant data: Number and animate-inanimate distinction as examples. *Cognitive Science, 14*, 79-106

Glasersfeld, E. (1982). Subitizing: The role of figural patterns in the development of numerical concepts. *Archives de Psychologie, 50*, 191-218.

Karmiloff-Smith, A. (1996). *Beyond modularity: A developmental perspective on cognitive science*. Cambridge, MA: MIT Press.

Klein, J.S. & Bisanz, J. (2000). Preschoolers doing arithmetic: The concepts are willing but the working memory is weak. *Canadian Journal of Experimental Psycholgoy, 54*, 105-115.

Mack, W. (2002). *Die Wahrnehmung kleiner Anzahlen und die Entwicklung des Zahlenverständnisses beim Kleinkind*. Frankfurt: Habilitationsschrift an der Fakultät für Psychologie.

Mandler, G. & Shebo, B.J. (1982). Subitizing: An analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology: General, 11*, 1-22.

Rasmussen, C., Ho, E. & Bisanz, J. (2004). Use of the mathematical principle of inversion in young children. *Journal of Experimental Child Psychology, 85*, 89-102

Resnick, L.B. (1986). The development of mathematical intuition. In M. Permutter (Hrsg.), *Perspectives on intellectual development: Minnesota Symposia on Child Psychology, Vol. 19*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Rumelhart, D.E., McClelland, J.L. & PDP Research Group. (1986). *Parallel distributed processing: Explorations in the microstructure of cognition (vol. 1)*. Cambridge, MA: MIT Press.

Seel, N.M. (2003). *Psychologie des Lernens*. München: Reinhardt.

Sophian, C. (1987). Early developments in children's use of counting to solve quantitative problems. *Cognition and Instruction, 4*, 61-90.

Sophian, C. (1996). Young children's numerical cognition: What develops?. *Annals of Child Development, 12*, 49-86.

Sophian, C. (1998). A developmental perspective on children's counting. In C. Dolan (Hrsg.), *The development of mathematical skills* (S. 27-46). New York: Psychology Press.

Sophian, C. & Adams, N. (1987). Infants' understanding of numerical transformations. *British Journal of Developmental Psychology, 5*, 257-264.

Starkey, P. (1992). The early development of numerical reasoning. *Cognition, 43*, 93-126.

Starkey, P., Spelke, E.S. & Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition, 36*, 97-127.

Vilette, B. (2002). Do young children grasp the inverse relationship between addition and subtraction? Evidence against early arithmetic. *Cognitive Development, 17*, 1365-1383.

Vom Hofe, R. V (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.

Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition, 36*, 155-193.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature, 358*, 749-750.

Vielfältige Darstellungen nutzen im Mathematikunterricht

Sebastian Kuntze
Pädagogische Hochschule Ludwigsburg

Kurzfassung: Darstellungen sind ein notwendiges Ausdrucksmittel für mathematische Ideen, nicht nur für Profis sondern auch, wenn Begriffe und Ideen im Mathematikunterricht zwischen den am Lernprozess Beteiligten ausgehandelt werden. Dabei kommt der Vielfalt an Darstellungen und dem Wechsel zwischen Darstellungen besondere Bedeutung zu, gerade auch wenn Darstellungen als Lernhilfen eingesetzt werden. Denn für ein flexibel einsetzbares mathematisches Begriffswissen ist es unabdingbar, Begriffe in verschiedenen Darstellungen und unter den verschiedenen damit meist verbundenen Perspektiven sehen zu können. Daraus ergeben sich auch Implikationen für fachliches und fachdidaktisches Professionswissen angehender und praktizierender Mathematiklehrkräfte, etwa zur Rolle des Nutzens von Darstellungen beim Diagnostizieren von Fehlvorstellungen und beim Gestalten von Lernhilfen.

1 Einführung

In den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK, 2004a, 2004b) ist die Kompetenz „mathematische Darstellungen verwenden“ bzw. „Darstellen von Mathematik“ einer von sechs bzw. von fünf Aspekten mathematischer Kompetenz, die in der Sekundarstufe bzw. in der Grundschule von besonderer Bedeutung sind. Dabei mag dieser Kompetenzaspekt auf den ersten Blick etwas technisch oder auch trivial erscheinen. *Technisch*, weil das Nutzen von Darstellungen auf den ersten Blick mit dem Training von Formalismen, symbolischen Ausdrücken oder Verfahren verwechselt werden kann. In diesem Verständnis entsteht eventuell sogar der Eindruck, dass gleichsam durch die Hintertüre der Bildungsstandards die Betonung solcher Formalismen und Verfahren im Mathematikunterricht weiter im Mittelpunkt stehen soll. Beispielsweise könnten Formulierungen wie „Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auswählen“ (KMK, 2004a, S. 8) suggerieren, dass es stets eine „ideal passende“ Darstel-

J. Sprenger et al. (Hrsg.), *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen,*
DOI 10.1007/978-3-658-01038-6_2,

lung gibt, die zur Lösung von Aufgaben ausgewählt und verwendet werden soll. Wissen über Darstellungen würde sich in einem solchen Verständnis möglicherweise in einer Art Wissen über Verfahren und Formalismen erschöpfen.

Trivial könnte dieser Kompetenzaspekt erscheinen, weil die Oberflächenmerkmale von Mathematik, z. B. die verwendeten Zahl- und Rechenzeichen, mit den Inhalten des Mathematikunterrichts gleichgesetzt werden könnten. Wird unter dem „Darstellen" beispielsweise vorwiegend verstanden, „für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen [zu] entwickeln, aus[zu]wählen und [zu] nutzen" (KMK, 2004b, S. 7f), so könnte das Geschehen in der Mathematik und im Mathematikunterricht insofern oberflächlich interpretiert werden, als „mathematisch tätig zu sein" demnach in erster Linie bedeutete, irgendwelche Probleme mit Hilfe von Symbolen und formalen Schreibweisen „mathematisch" darzustellen und bereits durch die Nutzung dieser Darstellungen ihren Lösungen zuzuführen.

Dass mathematische Darstellungen in dieser Hinsicht auch viel zur Wahrnehmung des Mathematikunterrichts insgesamt aus Lernendensicht beitragen können, zeigen die Bilder in Abbildung 1. Hier wurden Lehramtsstudierende gebeten, ihr Bild vom Mathematikunterricht zu malen oder zu skizzieren (vgl. Kuntze, 2010a). Mathematische Darstellungen spielen hier vor allem als Oberflächenmerkmale eine Rolle: Sei es im Sinne einer Sammlung von Anspielungen auf Beispielinhalte, sei es als Teil einer bedrohlich wirkenden Unterrichtswelt wie im unteren Bild. In diesen Bildern erscheinen mathematische Darstellungen als untereinander unverbundene, teils schwer verstehbare Objekte. Würde man die Kompetenz „Darstellungen nutzen" der Bildungsstandards so verstehen, so bestünde ein Hauptziel des Unterrichts darin, Darstellungen entschlüsseln zu können, sie zur Lösung von Aufgaben einzusetzen oder sie mit bestimmten Themen, Gedanken oder Gegenständen zu verbinden.

Fairerweise sollte hinzugefügt werden, dass es andererseits sicherlich keine ganz einfache Aufgabe ist, Gegenstände des Mathematikunterrichts in einem Bild umzusetzen.

Dies liegt auch an der Mathematik selbst, deren Inhalte letztlich in einer abstrahierenden Vorstellungswelt beheimatet sind (Duval, 2006). Mathematische Objekte sind damit meist gleichzeitig „unsichtbar" und multipel repräsentierbar, was letztlich die große Bedeutung des Nutzens von Darstellungen ausmacht. Diese Überlegungen zeigen, dass die Kompetenz des Nutzens mathematischer Darstellungen, wie sie sowohl für die Grundschule als auch für Klasse 10 von der KMK genannt wird, in ihrer Bedeutung für den Mathematikunterricht und in ihrem Lernpotential erst untersucht und erschlossen sein will. Insbesondere macht Wissen und unterrichtsbezogene Reflexionsfähigkeit zum Nutzen von