



Eberhard Zeidler *Hrsg.*

Springer-Handbuch  
der Mathematik

---

# Springer-Handbuch der Mathematik II

**Herausgeber und Autor:**

Prof. Dr. Eberhard Zeidler, Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig, Deutschland

---

# Springer-Handbuch der Mathematik II

Begründet von I.N. Bronstein und K.A. Semendjaew  
Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler  
Herausgegeben von E. Zeidler

*Herausgeber*

Prof. Dr. Eberhard Zeidler

Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften

Leipzig

Deutschland

ISBN 978-3-658-00296-1

ISBN 978-3-658-00297-8 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-658-00297-8

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Der Verlag und die Autoren haben alle Sorgfalt walten lassen, um vollständige und akkurate Informationen in diesem Buch zu publizieren. Der Verlag übernimmt weder Garantie noch die juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für die Nutzung dieser Informationen, für deren Wirtschaftlichkeit oder fehlerfreie Funktion für einen bestimmten Zweck.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

*Planung und Lektorat:* Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE.

Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

[www.springer-spektrum.de](http://www.springer-spektrum.de)

## Vorwort

Theoria cum praxi

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Die Mathematik spielt eine wichtige Rolle in vielen Bereichen unserer modernen Gesellschaft. Sie ist eine Querschnittswissenschaft und zugleich eine Schlüsseltechnologie mit vielfältigen engen Verbindungen zu anderen Wissenschaften. Das betrifft die Naturwissenschaften, die Ingenieurwissenschaften, die Informatik und Informationstechnologie, die Wirtschafts- und Finanzwissenschaft, die Sozialwissenschaften sowie die Medizin. Mathematik ist abstrakt und zugleich sehr praktisch. Das vorliegende

SPRINGER-HANDBUCH DER MATHEMATIK,

das sich um einen breit angelegten Brückenschlag zwischen der Mathematik und ihren Anwendungen bemüht, stellt eine wesentliche Erweiterung des SPRINGER-TASCHENBUCHES DER MATHEMATIK dar, das 2012 im Verlag Springer Spektrum erschienen ist. Das Springer-Handbuch umfasst die folgenden vier Teile:

- TEIL I: Analysis.
- TEIL II: Algebra, Geometrie, Grundlagen der Mathematik.
- TEIL III: Variationsrechnung und Physik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Numerik und Wissenschaftliches Rechnen, Wirtschafts- und Finanzmathematik, Algorithmen und Informatik.
- TEIL IV: Funktionalanalysis, Dynamische Systeme, Mannigfaltigkeiten, Topologie, Mathematische Physik.

Als mehrbändiges Nachschlagewerk ist das Springer-Handbuch in erster Linie für wissenschaftliche Bibliotheken gedacht, die ihren Leserinnen und Lesern parallel zum Springer-Taschenbuch der Mathematik das umfangreichere Material des Springer-Handbuches (in elektronischer Form und Papierform) zur Verfügung stellen wollen. Für individuell interessierte Leserinnen und Leser sei auf folgendes hingewiesen. Die Teile I bis III des Springer-Handbuches der Mathematik enthalten die entsprechenden Kapitel des Springer-Taschenbuches der Mathematik, die durch wichtiges zusätzliches Material ergänzt werden. Dagegen sind die neun Kapitel von Teil IV nicht im Springer-Taschenbuch der Mathematik enthalten.

Teil I enthält neben dem einführenden Kapitel und dem Kapitel 1 des Springer-Taschenbuches der Mathematik zusätzliches Material zur höheren komplexen Funktionentheorie und zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Teil II enthält neben den Kapiteln 2–4 des Springer-Taschenbuches der Mathematik zusätzliches Material zu folgenden Gebieten: multilineare Algebra, höhere Zahlentheorie, projektive Geometrie, algebraische Geometrie und Geometrien der modernen Physik.

Teil III enthält neben den Kapiteln 5–9 des Springer-Taschenbuches der Mathematik zusätzliches Material zu stochastischen Prozessen.

Teil IV enthält die folgenden Zusatzkapitel zum Springer-Taschenbuch der Mathematik:

- Kapitel 10: Höhere Analysis (Tensoranalysis und spezielle Relativitätstheorie, Integralgleichungen, Distributionen und lineare partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, moderne Maß- und Integrationstheorie).
- Kapitel 11: Lineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen.
- Kapitel 12: Nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen.
- Kapitel 13: Dynamische Systeme – Mathematik der Zeit.
- Kapitel 14: Nichtlineare partielle Differentialgleichungen in den Naturwissenschaften.
- Kapitel 15: Mannigfaltigkeiten.
- Kapitel 16: Riemannsche Geometrie und allgemeine Relativitätstheorie.
- Kapitel 17: Liegruppen, Liealgebren und Elementarteilchen - Mathematik der Symmetrie.
- Kapitel 18: Topologie - Mathematik des qualitativen Verhaltens.
- Kapitel 19: Krümmung, Topologie und Analysis (Eichtheorie in Mathematik und Physik).

Hier werden im Rahmen der mathematischen Physik die Bedürfnisse der modernen Physik berücksichtigt. Am Ende von Teil IV findet man eine Tafel zur Geschichte der Mathematik. Die sorgfältig zusammengestellten Literaturangaben am Ende jedes Kapitels sollen dem Leser helfen, bei auftretenden Fragen geeignete moderne Bücher zu konsultieren, wobei zwischen einführender Literatur und anspruchsvollen Standardwerken gewählt werden kann.

Das vorliegende Springer-Handbuch der Mathematik wendet sich an:

- Fortgeschrittene Studierende der Mathematik und angrenzender naturwissenschaftlicher, technischer, wirtschaftswissenschaftlicher Fachrichtungen, Graduierte, Doktoranden
- Mathematiker, Physiker, Ingenieure, Informatiker, Wirtschaftsmathematiker in Forschung, Lehre und Praxis
- wissenschaftliche Bibliotheken, akademische Institutionen und Firmen.

Die Bedürfnisse eines derart breiten Leserkreises werden berücksichtigt, indem der Bogen von elementaren Kenntnissen bis hin zu anspruchsvollen mathematischen Resultaten sehr weit gespannt wird und das Werk ein breites Spektrum mathematischer Gebiete überdeckt. Großer Wert wird dabei auf folgende Aspekte gelegt:

- ausführliche Motivation und Erläuterung der Grundideen,
- leichte Fasslichkeit, Anschaulichkeit, und Übersichtlichkeit,
- die Verbindung zwischen reiner und angewandter Mathematik,
- vielseitige Anwendungen der Mathematik und Praxisnähe, sowie
- die Diskussion des historischen Hintergrunds.

Es wird gezeigt, dass die Mathematik mehr ist als eine trockene Ansammlung von Formeln, Definitionen, Theoremen und Rechenrezepten. Sie ist ein unverzichtbarer Partner der modernen Technik, und sie hilft wesentlich bei der optimalen Gestaltung von Industrie- und Wirtschaftsprozessen. Gleichzeitig ist die Mathematik ein wichtiger Bestandteil unserer menschlichen Kultur und ein wundervolles Erkenntnisorgan des Menschen, das ihn etwa in der Hochtechnologie, der Elementarteilchenphysik und der Kosmologie in Bereiche vorstoßen lässt, die ohne Mathematik nicht zu verstehen sind, weil sie von unserer täglichen Erfahrungswelt extrem weit entfernt sind.

Während das Springer-Taschenbuch der Mathematik den Anforderungen des Bachelor-Studiums angepasst ist, bezieht sich das Springer-Handbuch der Mathematik sowohl auf das Bachelor-Studium als auch auf das weiterführende Master-Studium.

Bei den Anwendungen der Mathematik spielen Phänomene eine große Rolle, die in Natur und Technik auftreten. Das mathematische Verständnis dieser Phänomene erleichtert dem Anwender in den Naturwissenschaften und in den Ingenieurwissenschaften den Überblick über die Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen mathematischen Disziplinen. Deshalb wird in diesem Springer-Handbuch der Mathematik die Sicht auf wichtige Phänomene besonders betont. Das betrifft:

- Mathematik der Grenzübergänge (Analysis und Funktionalanalysis),
- Mathematik des Optimalen (Variationsrechnung, optimale Steuerung, lineare und nichtlineare Optimierung),
- Mathematik des Zufalls (Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und stochastische Prozesse),
- Mathematik der Zeit und des Chaos (dynamische Systeme),
- Mathematik der Stabilität von Gleichgewichtszuständen in Natur und Technik, von zeitabhängigen Prozessen und von Algorithmen auf Computern,
- Mathematik der Komplexität von Algorithmen auf Computern,
- Mathematik der Symmetrie (Gruppentheorie),
- Mathematik der Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden (Funktionalanalysis),
- Mathematik des qualitativen Verhaltens von Gleichgewichtszuständen und zeitabhängigen Prozessen in Natur und Technik (Topologie),
- Mathematik der Wechselwirkungskräfte in der Natur (nichtlineare partielle Differentialgleichungen und nichtlineare Funktionalanalysis, Differentialgeometrie der Faserbündel und Eichtheorie),
- Mathematik der Strukturen (Kategorientheorie).

Interessant ist die Tatsache, dass klassische Ergebnisse der Mathematik heutzutage im Rahmen neuer Technologien völlig neue Anwendungen erlauben. Das betrifft etwa die Zahlentheorie, die lange Zeit als ein reines Vergnügen des menschlichen Geistes galt. Beispielsweise wird die berühmte Riemannsche Zetafunktion der analytischen Zahlentheorie, die in Kapitel 2 betrachtet wird, in der modernen Quantenfeldtheorie zur Berechnung von Streuprozessen von Elementarteilchen im Rahmen der Renormierungstheorie eingesetzt. Der klassische Satz von Fermat–Euler über Teilbarkeitseigenschaften von Zahlen wird heute wesentlich benutzt, um die Übermittlung von Nachrichten in raffinierter Weise zu verschlüsseln. Das findet man ebenfalls in Kapitel 2.

Das „Springer-Handbuch der Mathematik“ knüpft an eine lange Tradition an. Das „Taschenbuch der Mathematik“ von I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew wurde von Dr. Viktor Ziegler aus dem Russischen ins Deutsche übersetzt. Es erschien 1958 im Verlag B. G. Teubner in Leipzig, und bis zum Jahre 1978 lagen bereits 18 Auflagen vor. Unter der Herausgabe von Dr. Günter Grosche und Dr. Viktor Ziegler und unter wesentlicher redaktioneller Mitarbeit von Frau Dorothea Ziegler erschien 1979 die völlig überarbeitete 19. Auflage, an der Wissenschaftler der Leipziger Universität und anderer Hochschulen des mitteleuropäischen Raumes mitwirkten.<sup>1</sup> Diese Neubearbeitung wurde ins Russische übersetzt und erschien 1981 im Verlag für Technisch-Theoretische Literatur in Moskau. Ferner wurden eine englische und eine japanische Übersetzung publiziert.

Motiviert durch die stürmische Entwicklung der Mathematik und ihrer Anwendungen erschien in den Jahren 1995 und 1996 ein völlig neuverfasstes, zweibändiges „Teubner-Taschenbuch der Mathematik“ im Verlag B. G. Teubner, Stuttgart und Leipzig.<sup>2</sup> Das daraus entstandene, vorliegende „Springer-Handbuch der Mathematik“ enthält zwei völlig neu geschriebene Kapitel über Wirtschafts- und Finanzmathematik sowie über Algorithmik und Informatik.

<sup>1</sup>Bis 1995 erschienen sieben weitere Auflagen.

<sup>2</sup>Die englische Übersetzung des ersten Bandes erschien 2003 im Verlag Oxford University Press, New York, als „Oxford Users' Guide to Mathematics“.



Die moderne Konzeption und Koordination des Kapitels 8 über Wirtschafts- und Finanzmathematik lag in den erfahrenen Händen von Herrn Prof. Dr. Bernd Luderer (TU Chemnitz). In das von Herrn Prof. Dr. Juraj Hromkovič (ETH Zürich) verfasste Kapitel 9 über Algorithmik und Informatik flossen seine reichen Lehrerfahrungen ein. Im Mittelpunkt steht das zentrale Problem der Komplexität von Algorithmen. Erinnert sei daran, dass eines der berühmten sieben Millenniumsprobleme der Mathematik aus dem Jahre 2000 eine tiefe Frage der Komplexitätstheorie betrifft. Das Kapitel 7 über Numerik und Wissenschaftliches Rechnen wurde von Herrn Prof. Dr. Wolfgang Hackbusch (Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig) wesentlich überarbeitet, und die übrigen Kapitel wurden aktualisiert. Der Herausgeber möchte den Kollegen Hackbusch, Hromkovič und Luderer sowie allen seinen Koautoren für ihre engagierte Arbeit sehr herzlich danken. Das betrifft:

- Prof. Dr. Hans-Rudolf Schwarz (7.1–7.6) und  
Prof. Dr. Wolfgang Hackbusch (7.7),
- Prof. Dr. Bernd Luderer (8.1, 8.13),  
Prof. Dr. Jochen Blath (8.2, 8.3),  
Prof. Dr. Alexander Schied (8.4, 8.5),  
Prof. Dr. Stephan Dempe (8.6–8.10) und  
Prof. Dr. Gert Wanka (8.11, 8.12),
- Prof. Dr. Juraj Hromkovič (9.1–9.9) und  
Prof. Dr. Siegfried Gottwald (9.10).

Ein herzliches Dankeschön geht auch an Frau Micaela Krieger-Hauwede für das sorgfältige Anfertigen vieler Abbildungen in den Teilen I bis III, das Lesen der Korrekturen und die einfühlsame, ästhetisch gelungene Textgestaltung. Frau Kerstin Fölting danke ich sehr herzlich für das sorgfältige Anfertigen der Abbildungen und der  $\LaTeX$ -Version von Teil IV sowie für zahlreiche Hinweise zur Verbesserung der Darstellung. Den Mitarbeitern des Leipziger Max-Planck-Institutes für Mathematik in den Naturwissenschaften, Regine Lübke (Sekretariat), Katarzyna Baier und Ingo Brüggemann (Bibliothek), Oliver Heller und Rainer Kleinrensing (EDV-Abteilung) sei sehr herzlich für die technische Unterstützung bei der Fertigstellung des Springer-Handbuches der Mathematik gedankt. Ferner danke ich sehr herzlich Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch vom Verlag Springer Spektrum für die Koordination des gesamten Projekts und für die kompetente Aktualisierung des Literaturverzeichnisses. Schließlich sei allen Leserinnen und Lesern gedankt, die in der Vergangenheit durch ihre Hinweise zur Verbesserung der Darstellung beigetragen haben.

Alle Beteiligten hoffen, dass dieses Nachschlagewerk in allen Phasen des Studiums und danach im Berufsleben ein nützlicher Begleiter sein wird, der die Einheit der Mathematik betont.

Leipzig, im Sommer 2012

Der Herausgeber

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>v</b>
<b>2 Algebra</b>	<b>1</b>
2.1 Elementare Methoden	1
2.1.1 Kombinatorik	1
2.1.2 Determinanten	4
2.1.3 Matrizen	8
2.1.4 Lineare Gleichungssysteme	12
2.1.5 Das Rechnen mit Polynomen	18
2.1.6 Der Fundamentalsatz der klassischen Algebra von Gauß	20
2.1.7 Partialbruchzerlegung	27
2.2 Matrizenkalkül	28
2.2.1 Das Spektrum einer Matrix	28
2.2.2 Normalformen von Matrizen	30
2.2.3 Matrizenfunktionen	38
2.3 Lineare Algebra	40
2.3.1 Grundideen	40
2.3.2 Lineare Räume	41
2.3.3 Lineare Operatoren	43
2.3.4 Das Rechnen mit linearen Räumen	48
2.3.5 Dualität	52
2.4 Multilineare Algebra	53
2.4.1 Algebren	54
2.4.2 Das Rechnen mit Multilinearformen	54
2.4.3 Universelle Produkte	60
2.4.4 Liealgebren	64
2.4.5 Superalgebren	65
2.5 Algebraische Strukturen	66
2.5.1 Gruppen	66
2.5.2 Ringe	72
2.5.3 Körper	75
2.6 Galoistheorie und algebraische Gleichungen	78
2.6.1 Die drei berühmten Probleme der Antike	78
2.6.2 Der Hauptsatz der Galoistheorie	78
2.6.3 Der verallgemeinerte Fundamentalsatz der Algebra	81
2.6.4 Klassifikation von Körpererweiterungen	82
2.6.5 Der Hauptsatz über Gleichungen, die durch Radikale lösbar sind	83
2.6.6 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	85
2.7 Zahlentheorie	88
2.7.1 Grundideen	88
2.7.2 Der Euklidische Algorithmus	90
2.7.3 Die Verteilung der Primzahlen	93
2.7.4 Additive Zerlegungen	99
2.7.5 Die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale Zahlen und Kettenbrüche	102
2.7.6 Transzendente Zahlen	108

2.7.7	Anwendung auf die Zahl $\pi$ . . . . .	111
2.7.8	Gaußsche Kongruenzen . . . . .	116
2.7.9	Minkowskis Geometrie der Zahlen . . . . .	119
2.7.10	Das fundamentale Lokal-Global-Prinzip der Zahlentheorie . . . . .	119
2.7.11	Ideale und höhere Teilbarkeitslehre . . . . .	121
2.7.12	Anwendungen auf quadratische Zahlkörper . . . . .	123
2.7.13	Die analytische Klassenzahlformel . . . . .	125
2.7.14	Die Hilbertsche Klassenkörpertheorie für allgemeine Zahlkörper . . . . .	126
<b>Literatur zu Kapitel 2</b> . . . . .		127
<b>3</b>	<b>Geometrie</b>	<b>129</b>
3.1	Die Grundidee der Geometrie (Erlanger Programm) . . . . .	129
3.2	Elementare Geometrie . . . . .	130
3.2.1	Ebene Trigonometrie . . . . .	131
3.2.2	Anwendungen in der Geodäsie . . . . .	138
3.2.3	Sphärische Trigonometrie . . . . .	140
3.2.4	Anwendungen im Schiffs- und Flugverkehr . . . . .	146
3.2.5	Die Hilbertschen Axiome der Geometrie . . . . .	147
3.2.6	Das Parallelenaxiom des Euklid . . . . .	151
3.2.7	Die nichteuklidische elliptische Geometrie . . . . .	151
3.2.8	Die nichteuklidische hyperbolische Geometrie . . . . .	152
3.3	Anwendungen der Vektoralgebra in der analytischen Geometrie . . . . .	155
3.3.1	Geraden in der Ebene . . . . .	155
3.3.2	Geraden und Ebenen im Raum . . . . .	157
3.3.3	Volumina . . . . .	159
3.4	Euklidische Geometrie (Geometrie der Bewegungen) . . . . .	159
3.4.1	Die euklidische Bewegungsgruppe . . . . .	159
3.4.2	Kegelschnitte . . . . .	160
3.4.3	Flächen zweiter Ordnung . . . . .	163
3.5	Projektive Geometrie . . . . .	167
3.5.1	Grundideen . . . . .	167
3.5.2	Projektive Abbildungen . . . . .	169
3.5.3	Der $n$ -dimensionale reelle projektive Raum . . . . .	170
3.5.4	Der $n$ -dimensionale komplexe projektive Raum . . . . .	172
3.5.5	Die Klassifikation der ebenen Geometrien . . . . .	173
3.6	Differentialgeometrie . . . . .	176
3.6.1	Ebene Kurven . . . . .	177
3.6.2	Raumkurven . . . . .	183
3.6.3	Die lokale Gaußsche Flächentheorie . . . . .	187
3.6.4	Globale Gaußsche Flächentheorie . . . . .	197
3.7	Beispiele für ebene Kurven . . . . .	198
3.7.1	Einhüllende und Kaustik . . . . .	198
3.7.2	Evoluten . . . . .	198
3.7.3	Evolventen . . . . .	199
3.7.4	Die Traktrix von Huygens und die Kettenlinie . . . . .	200
3.7.5	Die Lemniskate von Jakob Bernoulli und die Cassinischen Kurven . . . . .	201
3.7.6	Die Lissajou-Kurven . . . . .	202
3.7.7	Spiralen . . . . .	202
3.7.8	Strahlkurven (Konchoiden) . . . . .	204
3.7.9	Radkurven . . . . .	205

3.8	Algebraische Geometrie . . . . .	209
3.8.1	Grundideen . . . . .	209
3.8.2	Beispiele ebener algebraischer Kurven . . . . .	218
3.8.3	Anwendungen in der Integralrechnung . . . . .	223
3.8.4	Die projektiv-komplexe Form einer ebenen algebraischen Kurve . . . . .	225
3.8.5	Das Geschlecht einer Kurve . . . . .	229
3.8.6	Diophantische Geometrie . . . . .	232
3.8.7	Analytische Mengen und der Vorbereitungssatz von Weierstraß . . . . .	238
3.8.8	Die Auflösung von Singularitäten . . . . .	239
3.8.9	Die Algebraisierung der modernen algebraischen Geometrie . . . . .	241
3.9	Geometrien der modernen Physik . . . . .	242
3.9.1	Grundideen . . . . .	242
3.9.2	Unitäre Geometrie, Hilberträume und Elementarteilchen . . . . .	245
3.9.3	Pseudounitäre Geometrie . . . . .	252
3.9.4	Minkowskigeometrie . . . . .	255
3.9.5	Anwendungen in der speziellen Relativitätstheorie . . . . .	259
3.9.6	Spingeometrie und Fermionen . . . . .	265
3.9.7	Fast komplexe Strukturen . . . . .	274
3.9.8	Symplektische Geometrie . . . . .	274
	<b>Literatur zu Kapitel 3 . . . . .</b>	<b>276</b>
<b>4</b>	<b>Grundlagen der Mathematik . . . . .</b>	<b>281</b>
4.1	Der Sprachgebrauch in der Mathematik . . . . .	281
4.1.1	Wahre und falsche Aussagen . . . . .	281
4.1.2	Implikationen . . . . .	282
4.1.3	Tautologien und logische Gesetze . . . . .	284
4.2	Beweismethoden . . . . .	286
4.2.1	Indirekte Beweise . . . . .	286
4.2.2	Induktionsbeweise . . . . .	286
4.2.3	Eindeutigkeitsbeweise . . . . .	287
4.2.4	Existenzbeweise . . . . .	287
4.2.5	Die Notwendigkeit von Beweisen im Computerzeitalter . . . . .	289
4.2.6	Falsche Beweise . . . . .	291
4.3	Anschauliche Mengentheorie . . . . .	292
4.3.1	Grundideen . . . . .	292
4.3.2	Das Rechnen mit Mengen . . . . .	294
4.3.3	Abbildungen . . . . .	297
4.3.4	Gleichmächtige Mengen . . . . .	301
4.3.5	Relationen . . . . .	302
4.3.6	Mengensysteme . . . . .	304
4.4	Mathematische Logik . . . . .	305
4.4.1	Aussagenlogik . . . . .	305
4.4.2	Prädikatenlogik . . . . .	308
4.4.3	Die Axiome der Mengentheorie . . . . .	310
4.4.4	Cantors Strukturierung des Unendlichen . . . . .	311
4.5	Geschichte der axiomatischen Methode . . . . .	314
	<b>Literatur zu Kapitel 4 . . . . .</b>	<b>317</b>
	<b>Index . . . . .</b>	<b>318</b>

---

## KAPITEL 2

---

### ALGEBRA

*Algebra ist die Lehre von den vier Grundrechenarten – Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division – und der Auflösung der in diesem Zusammenhang entstehenden Gleichungen. Eine solche Lehre wird dadurch möglich, dass die Dinge, auf die jene Operationen wirken, weitgehend unbestimmt gelassen werden.*

*Die alte Algebra sah in den Zeichen, die sie an Stelle der Zahlen in ihren Rechnungen setzte, nur unbestimmt gelassene Zahlen. Sie ließ also nur die Quantität unbestimmt, während die Qualität der Gegenstände ihrer algebraischen Rechnungen feststand.*

*Es kennzeichnet die neue, im letzten Jahrhundert entstandene Algebra und insbesondere ihre heutige als „abstrakte Algebra“ bekannte Form, dass sie auch die Qualität der Gegenstände ihrer Rechnungen unbestimmt lässt und somit zu einer wirklichen Operationenlehre geworden ist.*

*Erich Kähler (1953)*

Eine wichtige formale Voraussetzung für die Entwicklung des algebraischen Denkens war der Übergang von der Zahlenrechnung zur Buchstabenrechnung mit unbestimmten Ausdrücken. Diese Revolution in der Mathematik wurde von François Viète (Vieta) in der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts vollzogen.

Die moderne algebraische Strukturtheorie geht auf Vorlesungen von Emmy Noether (1882–1935) in Göttingen und Emil Artin (1898–1962) in Hamburg Mitte der zwanziger Jahre zurück und wurde von Bartel Leendert van der Waerden im Jahr 1930 in dessen „Moderner Algebra“ erstmalig in Buchform dargestellt. Dieses Buch hat viele Auflagen erlebt und ist noch heute ein sehr gut lesbares Standardwerk der Algebra.

Der Grundstein wurde jedoch bereits im 19. Jahrhundert gelegt. Wichtige Impulse verdankt man Gauß (Kreisteilungskörper), Abel (algebraische Funktionen), Galois (Gruppentheorie und algebraische Gleichungen), Riemann (Geschlecht und Divisoren algebraischer Funktionen), Kummer und Dedekind (Idealtheorie), Kronecker (Zahlkörper), Jordan (Gruppentheorie) und Hilbert (Zahlkörper und Invariantentheorie).

## 2.1 Elementare Methoden

### 2.1.1 Kombinatorik

Die Kombinatorik untersucht, auf wieviel Arten man gewisse Elemente anordnen kann. Man verwendet dabei das Symbol

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \quad 0! := 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

(sprich:  $n$  Fakultät für  $n!$ ) und die Binomialkoeffizienten<sup>1</sup>

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \dots\cdot k}, \quad \binom{n}{0} := 1.$$

► **BEISPIEL 1:**  $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ,  $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ ,  $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ ,

$$\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4.$$

**Binomialkoeffizienten und der binomische Lehrsatz:** Vgl. 0.1.10.3.

**Fakultät und Gammafunktion:** Vgl. 1.14.6.

**Grundaufgaben der Kombinatorik:** Diese lauten:<sup>2</sup>

- (i) Permutationen,
- (ii) Permutationen mit Wiederholung (*das Buchproblem*),
- (iii) Kombinationen ohne Wiederholung
  - (a) ohne Berücksichtigung der Anordnung (*das Lottoproblem*),
  - (b) mit Berücksichtigung der Anordnung (*das modifizierte Lottoproblem*)
- (iv) Kombinationen mit Wiederholung
  - (a) ohne Berücksichtigung der Anordnung (*das modifizierte Wortproblem*),
  - (b) mit Berücksichtigung der Anordnung (*das Wortproblem*).

**Permutationen:** Es gibt genau

$$\boxed{n!} \tag{2.1}$$

unterschiedliche Möglichkeiten,  $n$  verschiedene Elemente hintereinander anzuordnen.

► **BEISPIEL 2:** Für die beiden Zahlen 1 und 2 gibt es  $2! = 1 \cdot 2$  Möglichkeiten der Anordnung. Diese lauten:

12, 21.

Für die drei Zahlen 1,2,3 gibt es  $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$  Möglichkeiten der Anordnung. Diese lauten:

$$\begin{array}{ccc} 123, & 213, & 312, \\ 132, & 231, & 321. \end{array} \tag{2.2}$$

**Das Buchproblem:** Gegeben sind  $n$  nicht notwendig verschiedene Bücher, die in  $m_1, \dots, m_s$  Exemplaren auftreten. Dann gibt es

$$\boxed{\frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_s!}}$$

unterschiedliche Möglichkeiten, diese Bücher hintereinander anzuordnen, wobei gleiche Exemplare nicht unterschieden werden sollen.

<sup>1</sup>Diese Definition gilt für reelle oder komplexe Zahlen  $n$  und für  $k = 0, 1, \dots$

<sup>2</sup>Kombinationen mit Berücksichtigung der Anordnung werden auch *Variationen* genannt.

► **BEISPIEL 3:** Für drei Bücher, von denen zwei gleich sind, gibt es

$$\frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 3$$

Möglichkeiten der Anordnung. Man erhält diese Anordnungen, indem man in (2.2) die Zahl 2 durch 1 ersetzt und doppelt vorkommende Anordnungen streicht. Das ergibt:

113, 311, 131.

**Das Wortproblem:** Aus  $k$  Buchstaben kann man genau

$$k^n$$

verschiedene Wörter der Länge  $n$  bilden.

Bezeichnet man zwei Wörter genau dann als äquivalent, wenn sie sich nur um eine Permutation der Buchstaben unterscheiden, dann ist die Anzahl der Klassen äquivalenter Wörter gleich

$$\binom{n+k-1}{n}$$

(modifiziertes Wortproblem).

► **BEISPIEL 4:** Aus den beiden Zeichen 0 und 1 kann man  $2^2 = 4$  Wörter der Länge 2 bilden:

00, 01, 10, 11.

Die Anzahl  $A$  der Klassen äquivalenter Wörter ist  $\binom{n+k-1}{n}$  mit  $n = k = 2$ , also  $A = \binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ . Repräsentanten sind:

00, 01, 11.

Ferner gibt es  $2^3 = 8$  Wörter der Länge 3:

000, 001, 010, 011,  
100, 101, 110, 111.

Die Anzahl der Klassen äquivalenter Wörter ist  $A = \binom{n+k-1}{n}$  mit  $n = 3$ ,  $k = 2$ , also  $A = \binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$ . Als Repräsentanten können wir wählen:

000, 001, 011, 111.

**Das Lottoproblem:** Es gibt

$$\binom{n}{k}$$

Möglichkeiten, aus  $n$  Zahlen genau  $k$  Zahlen ohne Berücksichtigung der Anordnung auszuwählen.

Berücksichtigt man die Anordnung, dann gibt es

$$\binom{n}{k} k! = n(n-1) \dots (n-k+1)$$

Möglichkeiten.

► **BEISPIEL 5:** Bei dem Spiel 6 aus 49 hat man genau

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816$$

Lottoscheine auszufüllen, um mit Sicherheit genau einen richtigen Tip zu haben.

► **BEISPIEL 6:** Es gibt  $\binom{3}{2} = 3$  Möglichkeiten, aus den drei Zahlen 1,2,3 zwei Zahlen ohne Berücksichtigung der Anordnung auszuwählen:

12, 13, 23.

Berücksichtigt man die Anordnung, dann gibt es  $\binom{3}{2} \cdot 2! = 6$  Möglichkeiten:

12, 21, 13, 31, 23, 32.

**Das Vorzeichen einer Permutation:** Gegeben seien  $n$  Zahlen  $1, 2, \dots, n$ . Die natürliche Anordnung  $12 \dots n$  wird als gerade Permutation dieser Zahlen bezeichnet.

Eine Permutation dieser Zahlen heißt genau dann *gerade* (bzw. *ungerade*), wenn man sie aus der natürlichen Anordnung durch eine gerade (bzw. ungerade) Anzahl von Vertauschungen zweier Elemente erhält.<sup>3</sup> Definitionsgemäß ist das *Vorzeichen* einer geraden (bzw. ungeraden) Permutation gleich 1 (bzw. gleich  $-1$ ).

► **BEISPIEL 7:** Die Permutation 12 der Zahlen 1, 2 ist gerade und 21 ist ungerade.

Für die Permutation von drei Elementen 1, 2, 3 gilt:

- (i) gerade Permutationen 123, 312, 231;
- (ii) ungerade Permutationen 213, 132, 321.

**Das Dirichletsche Schubfachprinzip:** Bei einer Verteilung von mehr als  $n$  Dingen auf  $n$  Schubfächer liegen in mindestens einem Fach mindestens zwei Dinge.

Dieses einfache Prinzip wird nach dem Vorbild von Dirichlet (1805–1859) in der Zahlentheorie mit Erfolg angewandt.

## 2.1.2 Determinanten

**Grundidee:** Eine zweireihige Determinante berechnet man nach der Formel

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc. \quad (2.3)$$

Die Berechnung dreireihiger Determinanten wird durch die sehr regelmäßig aufgebaute Entwicklungsformel nach der ersten Zeile

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} := a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

<sup>3</sup>Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Vertauschungen.



auf die Berechnung zweireihiger Determinanten zurückgeführt. Dabei ergibt sich beispielsweise die bei  $a$  stehende Determinante durch Streichen der Zeile und Spalte von  $a$  usw. Analog kann man vierreihige Determinanten auf dreireihige Determinanten zurückführen usw. Das ist ein Spezialfall des Laplaceschen Entwicklungssatzes (vgl. (2.6)).

► **BEISPIEL 1:** Es gilt

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} := 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5$$

und

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ = 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-4) + 3 \cdot (-6) = 5 + 8 - 18 = -5.$$

**Definition:** Unter der *Determinante*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

verstehen wir die Zahl

$$D := \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \, a_{1m_1} a_{2m_2} \dots a_{nm_n}.$$

Summiert wird dabei über alle Permutationen  $m_1 m_2 \dots m_n$  der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ , wobei  $\operatorname{sgn} \pi$  das Vorzeichen der betreffenden Permutationen bezeichnet.

Alle  $a_{jk}$  sind reelle oder komplexe Zahlen.

► **BEISPIEL 2:** Für  $n = 2$  haben wir die gerade Permutation 12 und die ungerade Permutation 21. Deshalb gilt

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Das stimmt mit Formel (2.3) überein.

### Eigenschaften von Determinanten:

- (i) Eine Determinante ändert sich nicht, wenn man Zeilen und Spalten miteinander vertauscht.<sup>4</sup>
- (ii) Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei Zeilen oder zwei Spalten miteinander vertauscht.
- (iii) Eine Determinante ist gleich null, wenn sie zwei gleiche Zeilen oder zwei gleiche Spalten besitzt.
- (iv) Eine Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile das Vielfache einer anderen Zeile addiert.
- (v) Eine Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Spalte das Vielfache einer anderen Spalte addiert.

<sup>4</sup>Das ist gleichbedeutend mit einer Spiegelung an der Hauptdiagonalen, die durch  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  gegeben ist.

(vi) Eine Determinante multipliziert man mit einer Zahl, indem man eine fest gewählte Zeile (oder Spalte) mit dieser Zahl multipliziert.

Beispiel 3:

$$(a) \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \quad (\text{nach (i)});$$

$$(b) \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \quad (\text{nach (ii)}); \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{nach (iii)});$$

$$(c) \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c + \lambda a & d + \lambda b \end{vmatrix} \quad (\text{nach (iv)});$$

$$(d) \quad \begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad (\text{nach (vi)}).$$

**Dreiecksgestalt:** Sind in (2.5) alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen (bzw. oberhalb der Hauptdiagonalen) gleich null, dann gilt

$$D = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

► **BEISPIEL 4:**

$$\begin{vmatrix} a & \alpha & \beta \\ 0 & b & \gamma \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ \alpha & b & 0 \\ \beta & \gamma & c \end{vmatrix} = abc.$$

Eine wichtige **Strategie** zur Berechnung großer Determinanten besteht darin, durch Anwendung der Operationen (ii) und (iii) eine Dreiecksgestalt zu erreichen. Das ist stets möglich.

► **BEISPIEL 5:** Für  $\lambda = -2$  gilt

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 + 2\lambda & 1 + 3\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -10.$$

**Laplacescher Entwicklungssatz:** Für die Determinante  $D$  in (2.5) gilt:

$$D = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} \cdots + a_{kn}A_{kn}. \quad (2.6)$$

Dabei ist  $k$  irgendeine fest gewählte Zeilennummer.<sup>5</sup> Ferner bezeichnet  $A_{kj}$  die sogenannte *Adjunkte* zu dem Element  $a_{kj}$ . Definitionsgemäß besteht  $A_{kj}$  aus derjenigen Determinante, die durch Streichen der  $k$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte in (2.5) entsteht, multipliziert mit dem Vorzeichen  $(-1)^{j+k}$ .

► **BEISPIEL 6:** Die Formel (2.4) ist ein Spezialfall dieses Entwicklungssatzes.

**Multiplikation zweier Determinanten:** Sind  $A = (a_{jk})$  und  $B = (b_{jk})$  zwei quadratische Matrizen der Zeilenlänge  $n$ , dann gilt:

$$\det A \det B = \det (AB).$$

<sup>5</sup>Eine analoge Aussage gilt für die Entwicklung nach der  $k$ -ten Spalte.



### 2.1.3 Matrizen

**Definition:** Unter einer Matrix  $A$  vom Typ  $(m, n)$  versteht man ein rechteckiges Schema von Zahlen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten. Dabei sind die Elemente  $a_{jk}$  reelle oder komplexe Zahlen.<sup>6</sup> Die Matrix  $A$  heißt genau dann quadratisch, wenn  $m = n$  gilt.

Die Gesamtheit aller Matrizen vom Typ  $(m, n)$  bezeichnen wir mit  $\text{Mat}(m, n)$ .

**Zielstellung:** Wir wollen für derartige Matrizen algebraische Operationen wie Addition und Multiplikation erklären. Diese Operationen besitzen nicht mehr alle diejenigen Eigenschaften, die wir von den reellen oder komplexen Zahlen her gewohnt sind. Zum Beispiel gilt für die Matrizenmultiplikation in der Regel nicht  $AB = BA$ , im Gegensatz zum Kommutativgesetz für die Multiplikation reeller oder komplexer Zahlen.

**Addition zweier Matrizen:** Gehören  $A$  und  $B$  zu  $\text{Mat}(m, n)$ , dann erklären wir die Summenmatrix  $A + B$  durch Addition der entsprechenden Elemente. Dann gehört  $A + B$  wieder zu  $\text{Mat}(m, n)$ .

► **BEISPIEL 1:**

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \alpha & b + \beta & c + \gamma \\ d + \delta & e + \varepsilon & z + \zeta \end{pmatrix};$$

$$(a, b) + (\alpha, \beta) = (a + \alpha, b + \beta), \quad (1, 2) + (3, 1) = (4, 3).$$

**Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl:** Gehört  $A$  zu  $\text{Mat}(m, n)$ , dann erklären wir das Produkt  $\alpha A$  von  $A$  mit der Zahl  $\alpha$ , indem wir jedes Element von  $A$  mit  $\alpha$  multiplizieren. Dann gehört  $\alpha A$  wiederum zu  $\text{Mat}(m, n)$ .

► **BEISPIEL 2:**

$$\alpha \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ \alpha d & \alpha e & \alpha z \end{pmatrix}, \quad 4 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Nullmatrix:** Die  $(m \times n)$ -Matrix

$$O := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

deren Elemente alle gleich null sind, heißt *Nullmatrix*.

**Rechenregeln:** Für  $A, B, C \in \text{Mat}(m, n)$  und  $\alpha \in \mathbb{C}$  gilt:

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C), \quad A + O = A,$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

<sup>6</sup>Die Matrix  $A$  heißt genau dann reell, wenn alle ihre Elemente  $a_{jk}$  reelle Zahlen sind. Anstelle von einer Matrix vom Typ  $(m, n)$  sprechen wir auch von einer  $(m \times n)$ -Matrix.

Genauer gesprochen bildet  $\text{Mat}(m, n)$  einen linearen Raum über dem Körper der komplexen Zahlen (vgl. 2.3.2).

**Multiplikation von zwei Matrizen:** Die Grundidee der Matrizenmultiplikation ist in der Formel

$$\boxed{(a, b) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} := a\alpha + b\beta} \quad (2.7)$$

enthalten.

► **BEISPIEL 3:** Es gilt  $(1, 3) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14$ .

Die natürliche Verallgemeinerung von Definition (2.7) lautet:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} := a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n.$$

Die Multiplikation einer Matrix  $A \in \text{Mat}(m, n)$  mit einer Matrix  $B \in \text{Mat}(n, p)$  ergibt eine Matrix  $C = AB \in \text{Mat}(m, p)$ , deren Elemente  $c_{jk}$  definitionsgemäß durch die folgende Vorschrift gegeben sind:

$$\boxed{c_{jk} := j\text{-te Zeile von } A \text{ mal } k\text{-te Spalte von } B.} \quad (2.8)$$

Bezeichnen wir die Elemente von  $A$  (bzw.  $B$ ) mit  $a_{..}$  (bzw.  $b_{..}$ ), dann gilt

$$\boxed{c_{jk} = \sum_{s=1}^n a_{js} b_{sk}.$$

► **BEISPIEL 4:** Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Produktmatrix  $C := AB$  schreiben wir in der Form

$$C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$c_{11} = \text{erste Zeile von } A \text{ mal erste Spalte von } B = (1, 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 10,$$

$$c_{12} = \text{erste Zeile von } A \text{ mal zweite Spalte von } B = (1, 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3,$$

$$c_{21} = \text{zweite Zeile von } A \text{ mal erste Spalte von } B = (3, 4) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 22,$$

$$c_{22} = \text{zweite Zeile von } A \text{ mal zweite Spalte von } B = (3, 4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 7.$$

Insgesamt erhalten wir:

$$AB = C = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 22 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ferner ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denn es gilt

$$(1,2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1, \quad (0,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \quad \text{usw.}$$

Das Matrizenprodukt  $AB$  existiert genau dann, wenn  $A$  mit  $B$  *verkettet* ist, d. h., die Anzahl der Spalten von  $A$  ist gleich der Anzahl der Zeilen von  $B$ .

**Einheitsmatrix:** Die quadratische  $(3 \times 3)$ -Matrix

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

heißt  $(3 \times 3)$ -Einheitsmatrix. Analog sind die Elemente der quadratischen  $(n \times n)$ -Einheitsmatrix gleich eins in der Hauptdiagonalen, und sonst sind sie gleich null.

**Rechenregeln für quadratische Matrizen:** Es sei  $A, B, C \in \text{Mat}(n, n)$ ;  $E$  bezeichne die  $(n \times n)$ -Einheitsmatrix, und  $O$  bezeichne die  $(n \times n)$ -Nullmatrix. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A(BC) &= (AB)C, & A(B+C) &= AB + AC, \\ AE &= EA = A, & AO &= OA = O, & A + O &= A. \end{aligned}$$

Genauer gesprochen bildet  $\text{Mat}(n, n)$  einen (nichtkommutativen) Ring und zusätzlich eine Algebra über dem Körper der komplexen Zahlen (vgl. 2.4.1 und 2.5.2).

**Nullteiler des Matrizenprodukts:** Für  $A, B \in \text{Mat}(n, n)$  mit  $n \geq 2$  gilt nicht stets  $AB = BA$ .

► **BEISPIEL 5:** Es ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Nullteiler des Matrizenprodukts:** Gilt  $AB = O$  für zwei Matrizen  $A$  und  $B$ , dann folgt daraus nicht notwendigerweise, dass  $A = O$  oder  $B = O$  gilt. Es sei  $A, B \in \text{Mat}(n, n)$ . Ist  $AB = O$  für  $A \neq O$  und  $B \neq O$ , dann heißen die Matrizen  $A$  und  $B$  Nullteiler im Ring  $\text{Mat}(n, n)$ .

► **BEISPIEL 6:** Für

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt  $A \neq O$ , aber  $AA = O$ . Denn es ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Inverse Matrix:** Es sei  $A \in \text{Mat}(n, n)$ . Unter einer inversen Matrix zu  $A$  verstehen wir eine Matrix  $B \in \text{Mat}(n, n)$  mit

$$AB = BA = E,$$

wobei  $E$  die  $(n \times n)$ -Einheitsmatrix bezeichnet. Eine derartige Matrix  $B$  existiert genau dann, wenn  $\det A \neq 0$  gilt, d. h., wenn die Determinante von  $A$  ungleich null ist. In diesem Fall ist  $B$  eindeutig bestimmt und wird mit  $A^{-1}$  bezeichnet. Somit gilt im Fall  $\det A \neq 0$ :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

► **BEISPIEL 7:** Die inverse Matrix  $A^{-1}$  zu der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

existiert genau dann, wenn  $\det A \neq 0$ , also  $ad - bc \neq 0$  gilt. Dann ist

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Denn es gilt

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Satz:** Für eine beliebige  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  mit  $\det A \neq 0$  hat man

$$(A^{-1})_{jk} = (\det A)^{-1} A_{kj}.$$

Dabei bezeichnet  $(A^{-1})_{jk}$  das Element von  $A^{-1}$  in der  $j$ -ten Zeile und  $k$ -ten Spalte. Ferner ist  $A_{kj}$  die Adjunkte zu  $a_{kj}$  in der Determinante von  $A$  (vgl. 2.1.2).

**Die Gruppe  $GL(n, \mathbb{C})$ :** Eine Matrix  $A \in \text{Mat}(n, n)$  heißt genau dann regulär, wenn  $\det A \neq 0$  gilt und somit die inverse Matrix  $A^{-1}$  existiert. Die Menge aller regulären  $(n \times n)$ -Matrizen wird mit  $GL(n, \mathbb{C})$  bezeichnet.

Genauer gesprochen bildet  $GL(n, \mathbb{C})$  eine Gruppe, die man die allgemeine (komplexe) lineare Gruppe nennt<sup>7</sup> (vgl. 2.5.1).

**Anwendung auf lineare Gleichungssysteme:** Vgl. 2.1.4.

**Transponierte und adjungierte Matrizen:** Gegeben sei die reelle oder komplexe  $(m \times n)$ -Matrix  $A = (a_{jk})$ . Die transponierte Matrix  $A^T$  von  $A$  ergibt sich, indem man die Zeilen und Spalten von  $A$  miteinander vertauscht. Geht man zusätzlich zu den konjugiert komplexen Elementen über, dann erhält man die *adjungierte Matrix*  $A^*$  zu  $A$ .

Bezeichnet man die Elemente von  $A^T$  (bzw.  $A^*$ ) mit  $a_{kj}^T$  (bzw.  $a_{kj}^*$ ), dann gilt:

$$a_{kj}^T := a_{jk}, \quad a_{kj}^* := \overline{a_{jk}}, \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Somit sind  $A^T$  und  $A^*$   $(n \times m)$ -Matrizen.

<sup>7</sup>Analog bildet die Gesamtheit  $GL(n, \mathbb{R})$  aller reellen regulären  $(n \times n)$ -Matrizen die sogenannte allgemeine reelle lineare Gruppe. Sowohl  $GL(n, \mathbb{C})$  als auch  $GL(n, \mathbb{R})$  sind sehr wichtige Beispiele für Liegruppen und werden in Kapitel 17 zusammen mit Anwendungen in der Elementarteilchenphysik ausführlich untersucht.

## ► BEISPIEL 8:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3i \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3i & 6 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -3i & 6 \end{pmatrix}.$$

Für alle reellen oder komplexen Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  gilt:

$(A^T)^T = A,$ $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T,$ $(CD)^T = D^T C^T,$ $(Q^{-1})^T = (Q^T)^{-1},$	$(A^*)^* = A,$ $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*,$ $(CD)^* = D^* C^*,$ $(Q^{-1})^* = (Q^*)^{-1}.$
---	---

Dabei setzen wir voraus, dass die Matrizen  $A$  und  $B$  die gleiche Anzahl von Zeilen und die gleiche Anzahl von Spalten besitzen und dass das Matrizenprodukt  $CD$  existiert. Ferner soll die inverse Matrix  $Q^{-1}$  der quadratischen Matrix  $Q$  existieren. Dann existieren auch die inversen Matrizen zu  $Q^T$  und  $Q^*$ .

Die Matrix  $(Q^{-1})^T$  heißt *kontragredient* zu  $Q$ .

**Die Spur einer Matrix:** Unter der Spur  $\text{tr } A$  der  $(n \times n)$ -Matrix  $A = (a_{jk})$  versteht man die Summe der Hauptdiagonalelemente<sup>8</sup> von  $A$ , d. h.

$\text{tr } A := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$
---

## ► BEISPIEL 9:

$$\text{tr} \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & b \end{pmatrix} = a + b.$$

Für alle komplexe Zahlen  $\alpha, \beta$  und alle  $(n \times n)$ -Matrizen  $A, B$  gilt:

$\text{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{tr } A + \beta \text{tr } B,$ $\text{tr } A^T = \text{tr } A, \quad \text{tr } A^* = \overline{\text{tr } A}.$	$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA),$
---	----------------------------------

► BEISPIEL 10: Ist die  $(n \times n)$ -Matrix  $C$  invertierbar, dann hat man  $\text{tr}(C^{-1}AC) = \text{tr}(ACC^{-1}) = \text{tr } A$ .

## 2.1.4 Lineare Gleichungssysteme

**Grundideen:** Lineare Gleichungssysteme können lösbar oder unlösbar sein. Im Fall der Lösbarkeit ist die Lösung eindeutig, oder es existiert eine Lösungsschar, die von endlich vielen Parametern abhängt.

► BEISPIEL 1 (parameterabhängige Lösung): Um das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 8 \end{aligned} \tag{2.9}$$

<sup>8</sup>Das englische Wort für Spur ist *trace*.



durch reelle Zahlen zu lösen, multiplizieren wir die erste Zahl mit  $-2/3$ . Das liefert

$$-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -4.$$

Diesen Ausdruck addieren wir zur zweiten Zeile von (2.9). Damit entsteht aus (2.9) das neue System

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 6, \\ 2x_2 + 2x_3 &= 4. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Aus der zweiten Gleichung von (2.10) folgt  $x_2 = 2 - x_3$ . Setzen wir diesen Ausdruck in die erste Gleichung von (2.10) ein, dann erhalten wir  $x_1 = 2 - x_2 - x_3 = 0$ . Die allgemeine reelle Lösung von (2.9) lautet<sup>9</sup> somit:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2 - p, \quad x_3 = p. \tag{2.11}$$

Dabei ist  $p$  eine beliebige reelle Zahl.

Wählt man  $p$  als eine beliebige komplexe Zahl, dann stellt (2.11) die allgemeine komplexe Lösung von (2.9) dar.

► **BEISPIEL 2** (*eindeutige Lösung*): Wenden wir die Methode von Beispiel 1 auf das System

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 &= 6, \\ 2x_1 + 4x_2 &= 8 \end{aligned}$$

an, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 &= 6, \\ 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung  $x_2 = 2, x_1 = 0$ .

► **BEISPIEL 3** (*keine Lösung*): Angenommen, das System

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned} \tag{2.12}$$

besitzt eine Lösung  $x_1, x_2, x_3$ . Anwendung der Methode von Beispiel 1 liefert den Widerspruch:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 6, \\ 0 &= 4. \end{aligned}$$

Somit besitzt (2.12) keine Lösung.

### 2.1.4.1 Das Superpositionsprinzip

Ein reelles lineares Gleichungssystem besitzt die Gestalt:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Gegeben sind die reellen Zahlen  $a_{jk}, b_j$ . Gesucht werden die reellen Zahlen  $x_1, \dots, x_n$ . Das System (2.13) entspricht der Matrixgleichung

$$\boxed{Ax = b.} \tag{2.14}$$

<sup>9</sup>Unsere Überlegungen ergeben zunächst, dass jede Lösung von (2.9) die Gestalt (2.11) besitzen muss. Die Umkehrung dieser Überlegungen zeigt dann, dass (2.11) tatsächlich eine Lösung von (2.9) darstellt.

Ausführlich lautet diese Gleichung:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

**Definition:** Das System (2.13) heißt genau dann *homogen*, wenn alle rechten Seiten  $b_j$  gleich null sind. Anderenfalls heißt (2.13) *inhomogen*. Ein homogenes System besitzt stets die triviale Lösung  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

**Superpositionsprinzip:** Kennt man eine spezielle Lösung  $x_{\text{spez}}$  des inhomogenen Systems (2.14), dann erhält man alle Lösungen von (2.14) durch

$$x_1 = x_{\text{spez}} + y,$$

wobei  $y$  eine beliebige Lösung des homogenen Systems  $Ay = 0$  darstellt. Kurz:

$$\begin{array}{l} \text{allgemeine Lösung des inhomogenen Systems} \\ = \text{spezielle Lösung des inhomogenen Systems} \\ + \text{allgemeine Lösung des homogenen Systems.} \end{array}$$

Dieses Prinzip gilt für alle linearen Probleme der Mathematik (z. B. lineare Differential- oder Integralgleichungen).

### 2.1.4.2 Der Gaußsche Algorithmus

Der Gaußsche Algorithmus stellt eine universelle Methode dar, um die allgemeine Lösung von (2.13) zu bestimmen oder die Unlösbarkeit von (2.13) festzustellen. Es handelt sich dabei um eine naheliegende Verallgemeinerung der in (2.9) bis (2.12) benutzten Methode.

**Dreiecksgestalt:** Die Idee des Gaußschen Algorithmus besteht darin, das Ausgangssystem (2.13) in das folgende äquivalente System mit Dreiecksgestalt zu überführen:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \dots + \alpha_{1n}y_n = \beta_1, & & \\ \alpha_{22}y_2 + \dots + \alpha_{2n}y_n = \beta_2, & & \\ \dots & \dots & \\ \alpha_{rr}y_r + \dots + \alpha_{rn}y_n = \beta_r, & & (2.15) \\ & 0 = \beta_{r+1}, & \\ & \dots & \\ & 0 = \beta_m. & \end{array}$$

Dabei gilt  $y_k = x_k$  für alle  $k$  oder  $y_1, \dots, y_n$  ergeben sich aus  $x_1, \dots, x_n$  durch Umnummerierung (Permutation der Indizes). Ferner hat man

$$\alpha_{11} \neq 0, \quad \alpha_{22} \neq 0, \quad \dots, \quad \alpha_{rr} \neq 0.$$

Das System (2.15) ergibt sich in der folgenden Weise.

- (i) Es sei mindestens ein  $a_{jk}$  ungleich null. Nach eventueller Umnummerierung der Zeilen und Spalten können wir annehmen, dass  $a_{11} \neq 0$  gilt.

(ii) Wir multiplizieren die erste Zeile von (2.13) mit  $-a_{k1}/a_{11}$  und addieren sie zur  $k$ -ten Zeile mit  $k = 2, \dots, m$ . Das ergibt ein System, dessen erste und zweite Zeile die Gestalt von (2.15) mit  $a_{11} \neq 0$  besitzt.

(iii) Wir wenden die gleiche Prozedur auf die zweite bis  $m$ -te Zeile des neuen Systems an usw.

**Berechnung der Lösung:** Die Lösung von (2.15) lässt sich leicht berechnen. Daraus ergibt sich dann die Lösung der Ausgangsgleichung (2.13).

*Fall 1:* Es ist  $r < m$ , und nicht alle  $\beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \dots, \beta_m$  sind gleich null. Dann besitzen die Gleichungen (2.15) und (2.13) keine Lösung.

*Fall 2:* Es ist  $r = m$ . Wegen  $\alpha_{rr} \neq 0$  können wir die  $r$ -te Gleichung in (2.15) nach  $y_r$  auflösen, wobei  $y_{r+1}, \dots, y_n$  als Parameter aufgefasst werden. Anschließend benutzen wir die  $(r-1)$ -te Gleichung, um  $y_{r-1}$  zu berechnen. In analoger Weise erhalten wir der Reihe nach  $y_{r-2}, \dots, y_1$ .

Somit hängt die allgemeine Lösung der Gleichungen (2.15) und (2.13) von  $n-r$  reellen Parametern ab.

*Fall 3:* Es ist  $r < m$  und  $\beta_{r+1} = \dots = \beta_m = 0$ . Wir verfahren analog zu Fall 2 und erhalten wiederum eine allgemeine Lösung der Gleichungen (2.15) und (2.13), die von  $n-r$  reellen Parametern abhängt.

Die Zahl  $r$  ist gleich dem Rang der Matrix  $A$  (vgl. 2.1.4.5).

### 2.1.4.3 Die Cramersche Regel

**Satz:** Es sei  $n = m$  und  $\det A \neq 0$ . Dann besitzt das lineare Gleichungssystem (2.13) die eindeutige Lösung

$$x = A^{-1}b.$$

Explizit gilt:

$$x_j = \frac{(\det A)_j}{\det A}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.16)$$

Dabei entsteht die Determinante  $(\det A)_j$  aus der Determinante der Matrix  $A$ , indem man dort die  $j$ -te Spalte durch  $b$  ersetzt. Man bezeichnet die Lösungsformel (2.16) als *Cramersche Regel*.

► **BEISPIEL:** Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

besitzt im Fall  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  die folgende eindeutige Lösung:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

### 2.1.4.4 Die Fredholmsche Alternative

**Satz:** Das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  besitzt genau dann eine Lösung  $x$ , wenn

$$b^T y = 0$$

für alle Lösungen  $y$  der homogenen dualen Gleichung  $A^T y = 0$  gilt.

### 2.1.4.5 Das Rangkriterium

**Linear unabhängige Zeilenmatrizen:** Gegeben seien die  $m$  Zeilenmatrizen  $A_1, \dots, A_m$  der Länge  $n$  mit reellen Elementen. Besteht die Gleichung

$$\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_m A_m = 0$$

für reelle Zahlen  $\alpha_j$  nur dann, wenn  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$  gilt, dann heißen  $A_1, \dots, A_m$  *linear unabhängig*. Anderenfalls nennen wir  $A_1, \dots, A_m$  *linear abhängig*.

Eine analoge Definition gilt für Spaltenmatrizen.

► **BEISPIEL 1:** (i) *Lineare Unabhängigkeit.* Für  $A_1 := (1, 0)$  und  $A_2 := (0, 1)$  folgt aus

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = 0$$

die Gleichung  $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$ , also  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Somit sind  $A_1$  und  $A_2$  linear unabhängig.

(ii) *Lineare Abhängigkeit.* Für  $A_1 := (1, 1)$  und  $A_2 := (2, 2)$  gilt

$$2A_1 - A_2 = (2, 2) - (2, 2) = 0,$$

d. h.,  $A_1$  und  $A_2$  sind linear abhängig.

**Definition:** Der *Rang* einer Matrix  $A$  ist gleich der Maximalzahl der linear unabhängigen Spaltenmatrizen.

Jede Determinante, die sich aus einer Matrix  $A$  durch Streichen von Zeilen und Spalten ergibt, heißt *Unterdeterminante* von  $A$ .

**Satz:** (i) Der Rang einer Matrix ist gleich der Maximalzahl der linear unabhängigen Zeilenmatrizen, d. h.,  $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^T)$ .

(ii) Der Rang einer Matrix ist gleich der maximalen Länge der von null verschiedenen Unterdeterminanten.

**Der Rangatz:** Ein lineares Gleichungssystem  $Ax = b$  besitzt genau dann eine Lösung, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix  $A$  gleich dem Rang der um die Spalte  $b$  erweiterten Matrix  $(A, b)$  ist.

Dann hängt die allgemeine Lösung von  $n - r$  reellen Parametern ab, wobei  $n$  die Anzahl der Unbekannten und  $r$  den Rang von  $A$  bezeichnet.

► **BEISPIEL 2:** Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2, \\ 2x_1 + 2x_2 &= 4. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Dann gilt

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A, b) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(i) *Lineare Abhängigkeit der Zeilenmatrizen.* Die zweite Zeile von  $A$  ist gleich dem 2-fachen der ersten Zeile, d. h.,

$$2(1,1) - (2,2) = 0.$$

Somit sind die erste und zweite Zeile von  $A$  linear abhängig. Folglich ist  $r = \text{Rang}(A) = 1$ . Analog ergibt sich  $\text{Rang}(A, b) = 1$ . Es ist  $n - r = 2 - 1 = 1$ .

Das Gleichungssystem (2.17) besitzt deshalb eine Lösung, die von einem reellen Parameter abhängt.

Dieses Resultat ergibt sich leicht direkt. Da die zweite Gleichung in (2.17) gleich dem 2-fachen der ersten Gleichung ist, kann man die zweite Gleichung weglassen. Die erste Gleichung in (2.17) besitzt die allgemeine Lösung

$$x_1 = 2 - p, \quad x_2 = p$$

mit dem reellen Parameter  $p$ .

(ii) *Determinantenkriterium.* Wegen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

verschwinden alle Unterdeterminanten von  $A$  und  $(A, b)$  der Länge 2. Es gibt jedoch von null verschiedene Unterdeterminanten der Länge 1. Deshalb ist  $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A, b) = 1$ .

**Algorithmus zur Rangbestimmung:** Wir betrachten die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Sind alle  $a_{jk}$  gleich null, dann gilt  $\text{Rang}(A) = 0$ .

Anderenfalls kann man durch Vertauschen von Zeilen und Spalten sowie durch Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile stets eine Dreiecksgestalt

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & & \dots & \alpha_{2n} \\ & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{rr} & \dots & \alpha_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

erreichen, wobei alle  $\alpha_{jj}$  ungleich null sind. Dann gilt  $\text{Rang}(A) = r$ .

► **BEISPIEL 3:** Gegeben sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Subtrahieren wir das 2-fache der ersten Zeile von der zweiten Zeile, dann erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

d. h.,  $\text{Rang}(A) = 2$ .

**Komplexe Gleichungssysteme:** Sind die Koeffizienten  $a_{jk}$  und  $b_j$  des linearen Gleichungssystems (2.13) komplexe Zahlen, dann suchen wir komplexe Zahlen  $x_1, \dots, x_n$  als Lösungen. Alle Aussagen bleiben dann bestehen. Lediglich bei der Definition der linearen Unabhängigkeit muss man komplexe Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  zulassen.

### 2.1.5 Das Rechnen mit Polynomen

Unter einem *Polynom vom Grad  $n$*  mit reellen (bzw. komplexen) Koeffizienten versteht man einen Ausdruck

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. \quad (2.18)$$

Dabei sind  $a_0, \dots, a_n$  reelle (bzw. komplexe) Zahlen mit<sup>10</sup>  $a_n \neq 0$ .

**Gleichheit:** Definitionsgemäß ist

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$$

genau dann, wenn  $n = m$  und  $a_j = b_j$  für alle  $j$  gelten (gleicher Grad und gleiche Koeffizienten).

**Addition und Multiplikation:** Man benutze die üblichen Regeln (vgl. 1.1.4) und fasse Terme mit gleichen Potenzen von  $x$  zusammen.

► **BEISPIEL 1:**  $(x^2 + 1) + (2x^3 + 4x^2 + 3x + 2) = 2x^3 + 5x^2 + 3x + 3,$   
 $(x + 1)(x^2 - 2x + 2) = x^3 - 2x^2 + 2x + x^2 - 2x + 2 = x^3 - x^2 + 2.$

**Division:** Anstelle von  $7 : 2 = 3$  mit Rest 1 kann man  $7 = 2 \cdot 3 + 1$  oder auch  $\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$  schreiben. Analog verfährt man mit Polynomen.

Es seien  $Z(x)$  und  $N(x)$  Polynome, wobei der Grad des Polynoms  $N(x)$  größer gleich eins sei. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome  $Q(x)$  und  $R(x)$ , so dass

$$Z(x) = N(x)Q(x) + R(x) \quad (2.19)$$

gilt, wobei der Grad des „Restpolynoms“  $R(x)$  kleiner als der Grad des „Nennerpolynoms“  $N(x)$  ist. Anstelle von (2.19) schreiben wir auch

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{N(x)}. \quad (2.20)$$

Man bezeichnet  $Z(x)$  als „Zählerpolynom“ und  $Q(x)$  als „Quotientenpolynom“.

► **BEISPIEL 2** (Division ohne Rest): Für  $Z(x) := x^2 - 1$  und  $N(x) := x - 1$  gilt (2.19) mit  $Q(x) = x + 1$  und  $R(x) = 0$ . Denn es ist  $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ . Das bedeutet

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1.$$

► **BEISPIEL 3** (Division mit Rest): Es gilt

$$\frac{3x^4 - 10x^3 + 22x^2 - 24x + 10}{x^2 - 2x + 3} = 3x^2 - 4x + 5 + \frac{-2x - 5}{x^2 - 2x + 3}.$$

Um die zugehörige Zerlegung

$$3x^4 - 10x^3 + 22x^2 - 24x + 10 = (x^2 - 2x + 3)(3x^2 - 4x + 5) + (-2x - 5)$$

<sup>10</sup>Bei einem streng formalen Aufbau der Mathematik stellt (2.18) eine Zeichenreihe dar, der man eine komplexe Zahl zuordnen kann, falls man für  $a_0, \dots, a_n, x$  feste komplexe Zahlen einsetzt. Man sagt auch, dass  $a_0, \dots, a_n, x$  durch komplexe Zahlen belegt werden.